Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 3, с. 142–151. © ИВТ СО РАН, 2020 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 142–151. © ICT SB RAS, 2020 eISSN 2313-691X

DOI:10.25743/ICT.2020.25.3.015

Логические аспекты планирования и анализа экспериментов

В. И. Хабаров
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
Контактный автор: Хабаров Валерий И., e-mail: Khabarov51@mail.ru

Поступила 10 марта 2020 г., доработана 18 марта 2020 г., принята в печать 13 апреля 2020 г.

Предложена схема формализации задач активной идентификации объекта с использованием аппарата теории моделей — современного раздела математической логики. Теория моделей позволяет погрузить предмет “планирование и анализ эксперимента” в контекст семантического анализа. Семантический анализ понимается как установление соответствия между миром и его формальным представлением. С этой точки зрения представления об исследуемом объекте выражаются в некоторой прикладной теории. Предложен вывод модели для данной теории как процесс интерпретации, в котором ключевая роль отводится “экспериментатору”. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании архитектур интеллектуальных систем для экспериментальных исследований, для построения онтологии эксперимента, создания баз знаний.

Ключевые слова: активная идентификация, планирование эксперимента, теория моделей.

Цитирование: Хабаров В.И. Логические аспекты планирования и анализа экспериментов. Вычислительные технологии. 2020; 25(3):142–151.

Введение

В связи с понятием “планирование эксперимента” в работах [1–3] отмечается, что “целенаправленное наблюдение данных, а не только сами данные приводят к теоретическим заключениям”. В этом процессе определяющая роль отводится экспериментатору, который выполняет функцию интерпретатора результатов эксперимента. Рассуждения при научных экспериментальных исследованиях укладываются в следующую индуктивную схему вывода:

- априорные знания экспериментатора представлены некоторой теорией $\mathcal{T}$;
- в рамках теории $\mathcal{T}$ выделяется предположение X;
- среди возможных эмпирических утверждений $\mathcal{E}$ выделяется предложение Y;
- на основе X выводится некоторое новое предположение Z, которое включается в теорию $\mathcal{T}$.

Индуктивный способ рассуждения в данном случае отражается в следующей схеме рационального вывода:

$$\frac{X,\ Y}{Z}.$$

Под рациональным выводом здесь понимается вывод, который удовлетворяет двум содержательным требованиям [2]:

- если Z ложно, а X выполнены, то вероятность такого вывода на основе Y мала;
- если Z истина и X выполнены, то вероятность такого вывода на основе Y велика.

В терминах, введенных выше, теоретическое допущение X является утверждающей частью гипотезы H. Эмпирическое утверждение Y содержит факты, конкретизирующие вопрошающую часть гипотезы H. Следовательно, в языке эмпирических фактов находит отражение планирование экспериментов. Таким образом, основная задача планирования экспериментов сводится к экстремальной постановке: выбирать наблюдение Y таким образом, чтобы увеличить достоверность выводов. В отношении схемы индуктивного вывода можно сформулировать ряд вопросов:

- В каких языках представить $\mathcal{T}$ и $\mathcal{E}$?
- Как делать рациональный вывод, т. е. получать Z?
- Как обоснованно выбирать X из $\mathcal{T}$?
- Как выбирать Y из $\mathcal{E}$?

Приведенные вопросы по существу являются программными для исследования, связанного с интеллектуализацией эксперимента. Под интеллектуализацией следует понимать построение эффективной “индуктивной машины”, работающей в паре с экспериментатором для целенаправленного “извлечения знаний” из исследуемого объекта. Создание такого “интегрированного гибридного интеллекта” требует строгого логического обоснования с использованием достижений современной математической логики, в частности, теории моделей. Термин “интеллектуализация” оправдывается тем, что в явном виде используются понятия “знания”, “представление знаний”, “вывод на знаниях”, а также согласование представления знаний экспериментатора с представлением знания в среде искусственного интеллекта.

1. Основные результаты

Главный тезис, который лежит в основе теоретико-модельного подхода при построении интегрированной интеллектуальной системы, включает утверждение о том, что анализ эксперимента есть семантический анализ. Семантический анализ трактуется как установление соответствия между миром и его формальным представлением. С этой точки зрения индукция есть обоснованный вывод, который подтверждается семантическим анализом. В данном контексте представление об исследуемом объекте выражается в некоторой теории, которой соответствует модель. Задача заключается в установлении адекватности и степени полноты теории. Эта задача предполагает, очевидно, задачу вывода модели для данной теории. Выводом модели для заданной теории называется процесс нахождения интерпретации теории. Для дальнейших рассуждений полезно привести следующие результаты [4–6].

Определение 1.

- Теорией $\mathcal{T}$ в языке $\mathcal{L}$ является некоторое множество предложений языка $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ — язык логики предикатов первого порядка, то предложение — это всякая формула языка, не содержащая свободных переменных.
- Модель $\mathcal{M}$ для $\mathcal{T}$ — такая система языка $\mathcal{L}$, что любое предложение $\varphi \in \mathcal{T}$ истинно в $\mathcal{M}$. Под обозначением $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ далее будем подразумевать, что $\mathcal{M}$ является моделью для $\mathcal{T}$.
- Две теории $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ считаются эквивалентными, если имеют одну и ту же модель.
- Теория называется непротиворечивой (совместной), если она имеет хотя бы одну модель.

- По предположению любая аксиома $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ является общезначимой. Этот факт выражается как $\models \mathcal{A}$. Если формула $\mathcal{A}$ выводима из $\mathcal{T}$, т. е. $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A}$ или $\vdash \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ — теорема.
- $\mathcal{T}$ является адекватной теорией, если $\vdash \mathcal{A} \;\Rightarrow\, \models \mathcal{A}$.
- $\mathcal{T}$ является полной теорией, если $\models \mathcal{A} \;\Rightarrow\, \vdash \mathcal{A}$.

Утверждение 1. Адекватная теория непротиворечива [5].

Рассмотрим семантическую схему эксперимента для идентификации объекта, которая приведена ниже в виде коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[r, "\mathcal{T}_{obj}"] & \mathbb{Y} \\ \mathcal{X} \arrow[u, "\mathcal{S}_x"'] \arrow[r, "\mathcal{O}"] & \mathcal{Y} \arrow[u, "\mathcal{S}_y"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Исследуемый объект в предметной области представлен как отображение $\mathcal{O} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ — вход, $\mathcal{Y}$ — выход системы; $\mathcal{O}$ — оператор, выражающий феномен исследуемого объекта. Информация о входе $\mathcal{X}$ и выходе $\mathcal{Y}$ в информационной системе, построенной над предметной областью, представляется множеством формул соответственно в $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ в языке $\mathcal{L}$. Отображение $\mathcal{S}_x : \mathcal{X} \to \mathbb{X}$ выделяет модель для входа, а $\mathcal{S}_y : \mathcal{Y} \to \mathbb{Y}$ — модель для выхода. Теорией исследуемого объекта в этом случае является отображение $\mathcal{T}_{obj} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, элементы которого есть предложение вида $x \to y$, где x и y — предложения соответственно из $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, а "$\to$" — знак импликации. Отображение $\mathcal{S}_x$ и $\mathcal{S}_y$ можно рассматривать как семантические функции, т. е. такие функции, которые ставят в соответствие некоторый формальный объект его содержательному толкованию в предметной области. Например, $\mathcal{S}_x$ фиксирует в $\mathbb{X}$ формальное представление факторов, их свойства, а также план эксперимента, определенные свойства плана, базу данных, в которой хранятся значения для входа. $\mathcal{S}_y$ фиксирует в $\mathbb{Y}$ формальное представление вектора отклика исследуемого объекта на воздействие в точках плана, а также свойства отклика, например его статистические характеристики, базу данных для фиксации наблюдений за откликом.

Утверждение 2. Необходимым и достаточным условием адекватности и полноты теории $\mathcal{T}_{obj}$ является выполнение условия коммутативности диаграммы

$$\mathcal{T}_{obj} \circ \mathcal{S}_x = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{O}.$$

Доказательство. Пусть теория $\mathcal{T}_{obj}$ адекватна, тогда согласно утверждению 1 она является непротиворечивой, т. е. существует по крайней мере одна модель $\mathcal{M}_{obj}$. Но это значит, что для всякого $\mathcal{Y} = \mathcal{O}\left(\mathcal{X}\right)$ можно найти модель в $\mathbb{Y}$, т. е. имеет место $\mathbb{Y} = \mathcal{S}\left(\mathcal{Y}\right)$. С другой стороны, эту же модель можно получить иначе. А именно, $\mathbb{Y} = \mathcal{T}_{obj}\left(\mathbb{X}\right)$, $\mathbb{X} = \mathcal{S}_x\left(\mathcal{X}\right)$, что следует из свойства гомоморфизма отображения $\mathcal{T}_{obj}$ в моделях [4, 7]. Это эквивалентно равенству суперпозиций операторов (1).

Пусть справедливо (1). Покажем, что в этом случае существует по крайней мере одна модель. Действительно,

$$(\mathcal{T}_{obj} \circ \mathcal{S}_x)(\mathcal{X}) = (\mathcal{S}_y \circ \mathcal{O})(\mathcal{X}) = \mathbb{Y}.$$

Но это означает, что для всех y из $\mathbb{Y}$, таких, что $\vdash y$, имеет место $\models y$, т. е. теория непротиворечива. $\square$

Доказательство полноты очевидно. Ближайшая цель состоит в том, чтобы наметить структуру так называемой оснащенной теории исследуемого объекта $\mathcal{T}_{obj}$. Для этого выделяются отдельная теория планирования эксперимента $\mathcal{T}_d$ и теория анализа эксперимента $\mathcal{T}_a$, далее эти теории связываются с $\mathcal{T}_{obj}$, исследуются их свойства в отдельности и в совокупности.

Определение 2. Теория $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{obj} \cup \mathcal{T}_d \cup \mathcal{T}_a$ называется DA-оснащенной теорией объекта. Модель $\mathcal{M}$ для $\mathcal{T}$ называется DA-оснащенной моделью теории объекта $\mathcal{T}$. Будем также говорить просто "оснащенная модель" там, где из контекста понятно, о чем идет речь. Ответим сначала на вопрос: что дает оснащенная модель в смысле определения 2?

Во-первых, для оснащенной теории наряду с моделью объекта $\mathcal{M}_{obj}$ находятся модель входа $\mathbb{X}$ и модель выхода $\mathbb{Y}$. Эти задачи становятся взаимосвязаны. Если в $\mathbb{Y}$ имеются сведения об отклике, а в $\mathbb{X}$ сведения о плане эксперимента, то модель $\mathcal{M}_{obj}$ в этом случае делает истинными все предложения в $\mathcal{T}_{obj}$. Если же модели в $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ для $\mathcal{T}_{obj}$ отсутствуют, то они выводятся из $\mathcal{T}_{obj} \cup \mathcal{T}_d \cup \mathcal{T}_a$.

Во-вторых, среди множества моделей оснащенной теории $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{obj} \cup \mathcal{T}_d \cup \mathcal{T}_a$ можно искать подмножество моделей, которые будут обладать свойством достаточности. Достаточной $\mathcal{M}_d$-моделью будет называться достаточный план эксперимента [8], а достаточной $\mathcal{M}_a$-моделью — некоторая достаточная статистика от наблюдения над откликом.

Рассмотрим следующую диаграмму, которая является развитием диаграммы (1):

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X} \arrow[loop left, "\mathcal{T}_d"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{T}_{obj}"'] \arrow[d, bend right, "\mathcal{R}_x"'] & \mathbb{Y} \arrow[l, shift right, "\mathcal{T}_a"'] \\
\mathcal{X} \arrow[u, "\mathcal{S}_x"'] \arrow[r, "\mathcal{O}"] & \mathcal{Y} \arrow[u, "\mathcal{S}_y"']
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Эта диаграмма характеризует $\mathcal{T}_a$ как обратный оператор по отношению к $\mathcal{T}_{obj}$, а $\mathcal{T}_d$ — как некоторый автоморфизм на $\mathbb{X}$. Действительно, отсутствующие сведения в $\mathbb{X}$ можно получить либо на основании сведения об отклике из $\mathbb{Y}$, либо используя уже имеющиеся сведения в $\mathbb{X}$. Оператор $\mathcal{R}_x$ необходим для выхода из информационной области в предметную область и установления значения в $\mathcal{X}$, например для реализации плана эксперимента. Далее приводятся достаточно общие результаты, в которых устанавливаются свойства оснащенной теории в зависимости от свойств локальных теорий. Эти результаты фактически являются следствием фундаментальных положений теории моделей [4, 5].

Утверждение 3 (теорема Робинсона о непротиворечивости). Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — некоторые языки и $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, а $\mathcal{T}$ — полная теория в языке $\mathcal{L}$. Кроме того, $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}, \mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}$ — непротиворечивые теории в $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно. Тогда $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ — непротиворечивая теория. Непосредственным следствием этого утверждение является

Утверждение 4. Пусть $\mathcal{L}_{obj}$, $\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_a$ — языки соответственно для представления исследуемого объекта, планирования и анализа экспериментов. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{obj} \cap \mathcal{L}_d \cap \mathcal{L}_a$, а $\mathcal{T}$ — полная теория в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}_{obj} \supset \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_d \supset \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_a \supset \mathcal{T}$ — непротиворечивые теории в $\mathcal{L}_{obj}$, $\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_a$ соответственно. Тогда оснащенная теория $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{obj} \cup \mathcal{T}_d \cup \mathcal{T}_a$ является непротиворечивой.

Определение 3. Теория $\mathcal{T}$ называется устойчивой относительно:

- подмоделей, если всякая подмодель теории $\mathcal{T}$ сама является моделью этой теории;
- объединения цепей, если объединения всякой цепи $\mathcal{M}_1 \supseteq \mathcal{M}_2 \supseteq \ ... \ \mathcal{M}_n \supseteq \ ...$ есть модель теории $\mathcal{T}$;
- гомоморфизмов, если всякий гомоморфный образ любой модели $\mathcal{T}$ есть модель $\mathcal{T}$.

Устойчивость в указанных смыслах для оснащенной теории играет важную роль для задач идентификации, поскольку дает основания для частных суждений относительно $\mathcal{T}_{obj}$ и $\mathcal{M}_{obj}$. Это следует иметь в виду при построении базы знаний для интеллектуальной системы идентификации, поскольку из оснащенной теории можно выводить ряд нетривиальных результатов, а также обоснованно использовать механизмы вывода, встроенные в логические языки программирования.

Утверждение 5 [5]. Теория $\mathcal{T}$ устойчива относительно:

1) подмодели, тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ состоит из множества аксиом вида $\forall X_1, ..., X_n \exists Y_1 ... Y_m \ P\left(X_1, ..., X_n; Y_1, ..., Y_m\right)$;
2) объединения цепей, тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ состоит из множества аксиом вида $\forall X_1, ..., X_n \ P\left(X_1, ..., X_n\right)$;
3) гомоморфизмов, тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ состоит из множества позитивных аксиом (формула называется позитивной, если получается из атомарных формул применением только операторов $\&, \vee$ и кванторов $\forall, \exists$).

Представляет интерес подмножество языка логики предикатов первого порядка, называемое хорновским подмножеством, в связи с тем, что это подмножество используется в системах логического программирования и в системах искусственного интеллекта для представления знаний в виде правил.

Определение 4. Подмножество $\mathcal{L}_{horn}$ языка логики предикатов первого порядка $\mathcal{L}$, предложения которого имеют вид $\forall \ X_1, ..., X_n \ \ (S_0 \leftarrow S_1, ..., S_m)$, где $S_i \ (i = 0, ..., m)$ — дизъюнкты, зависящие от переменных $X_1, ..., X_n$, называется хорновским.

Утверждение 6. Если теория $\mathcal{T}$ представлена в $\mathcal{L}_{horn}$, то эта теория устойчива относительно моделей и цепей и неустойчива относительно гомоморфизмов.

Доказательство п. 1 непосредственно следует из утверждения 5 и определения 3. В п. 2 нарушение устойчивости может произойти вследствие использования связки импликации.

В таблице приведены результаты устойчивости для некоторых известных теорий [5], которые могут быть полезны как составляющие для $\mathcal{T}$.

Следствие 1. Теорию выбора непосредственно невозможно выразить в $\mathcal{L}_{horn}$.

Пример 1. Проиллюстрируем диаграмму (2) для простого случая классического линейного регрессионного анализа [9, 10], когда модель объекта $\mathcal{O} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ выбирается из класса параметрических линейных регрессионных моделей вида $M\left[\mathbf{Y}|\mathbf{x}\right] = \theta_1 f\left(\mathbf{x}\right) + ... + \theta_m f\left(\mathbf{x}\right) = f^T\left(\mathbf{x}\right)\theta, \ \mathbf{x} \in \mathfrak{X} \subseteq R^k$.

Схема анализа задается равенством $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, где

$$X = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1\right) & \cdots & f_m\left(x_1\right) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1\left(x_n\right) & \cdots & f_m\left(x_n\right) \end{bmatrix};$$

Устойчивость известных теорий / Stability of known theories

Теория	Подмодель	Цепь	Гомоморфизм
Частичный порядок	+	+	—
Линейный порядок	—	+	—
Булева алгебра	+	+	+
Группы	—	+	+
Поля	—	+	—
$\exists \ x \ \forall \ y \ R\left(x, y\right)$ (теория выбора)	—	—	+

$\mathbf{Y} \in R^n$ — вектор наблюдений в точках плана эксперимента $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\theta} \in R^m$ — вектор неизвестных параметров; $\boldsymbol{\varepsilon} \in R^n$ — вектор ошибок, причем наблюдения в точках плана независимы и равноточны.

Объекты $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ будем рассматривать в виде множеств предложений в языке регрессионного анализа, который в свою очередь выражается в языке логики предикатов первого порядка, опуская при этом кванторы общности и существования там, где это очевидно, и рассматривая функции в общеупотребительном смысле как функциональные символы. Пусть $\{S_1, ..., S_7\} \in \mathbb{Y}$, где логические метапеременные $\{S_1, ..., S_7\}$ принимают значения:

$S_1: \quad Y = X\boldsymbol{\theta} + \varepsilon \; \& \; \mathrm{rank}\, X = m,$

$S_2: \quad M\left[\varepsilon\right] = 0,$

$S_3: \quad M\left[\varepsilon^T \varepsilon\right] = \sigma^2 I,$

$S_4: \quad M\left[Y|X\right] = X\boldsymbol{\theta},$

$S_5: \quad Y \in \mathcal{N}\left(X\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 I\right),$

$S_6: \quad \hat{y}\left(x\right) = f^T\left(x\right)\left(X^T X\right)^{-1} X^T Y,$

$S_7: \quad \hat{\sigma}_y^2\left(x, X\right) = \sigma^2 f^T\left(x\right)\left(X^T X\right)^{-1} f\left(x\right).$

Предложения $S_1, \ldots, S_5$ включают предпосылки регрессионного анализа [9]. Предложения S_6 и S_7 являются следствиями (оценками по методу максимального правдоподобия и одновременно по методу наименьших квадратов). Пусть $\{S_8, \ldots, S_{14}\} \in \mathbb{X}$, где

$S_8: \quad X \in \mathcal{F} = \left\{f_j\left(x_i\right), \quad x_i \in \mathfrak{X} \subseteq R^k\right\}_{i=1..n;\; j=1..m} \; \& \; \mathrm{rank}\, X = m,$

$S_9: \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y,$

$S_{10}: \; \hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{N}_m(\theta, \quad \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1},$

$S_{11}: \quad M\left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\right] = \boldsymbol{\theta},$

$S_{12}: \quad \forall \hat{\vartheta} \neq \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad D\left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\right] = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1} \leq \; D\left[\hat{\vartheta}\right],$

$S_{13}: \; \exists X \in \mathcal{F} \;\; \forall\, Z \in \mathcal{F} \; \det\left(X^T X\right) \geq \det\left(Z^T Z\right),$

$S_{14}: \; \exists X \in \mathcal{F} \;\; \exists\, x \in \mathfrak{X} \;\; \forall Z \in \mathcal{F} \;\; \forall z \in \mathfrak{X} \quad f^T\left(z\right)\left(X^T X\right)^{-1} f\left(x\right) \leq f^T\left(z\right)\left(Z^T Z\right)^{-1} f\left(z\right).$

Эти предложения являются теоретическими предпосылками для входа системы $\mathbb{X}$ и предполагают модель, в которой эти предложения будут принимать истинное значение. Рассмотрим оснащенную модель $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{obj} \cup \mathcal{T}_d \cup \mathcal{T}_a$ и ее составляющие.

Теория $\mathcal{T}_{obj}$ включает предложение

$S_{13}: \; S_8 \& \; S_9 \& \; S_{12} \to S_6 \& \; S_7.$

Теория $\mathcal{T}_a$ включает предложение

$S_{14}: \; S_1 \& \; S_2 \& \; S_3 \& \; S_4 \& \; S_5 \; \to S_9 \& \; S_{10} \& \; S_{11} \& \; S_{12}.$

Теория $\mathcal{T}_d$ включает предложение

$S_{16}: \; S_1 \& \; S_2 \& \; S_3 \& \; S_4 \& \; S_5 \; \to S_9 \& \; S_{10} \& \S_{11} \& \; S_{12} \& \; S_{13} \& \; S_{14};$

$S_{17}: \quad S_{13} \; \to \; S_{14}.$

Замечания.

- S_5 — предположение о нормальности наблюдений не является обязательным, но включено для полноты представления о свойствах линейных оценок.
- S_{11}, S_{12} — свойства состоятельности и эффективности линейной оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (теорема о наилучших линейных оценках [9]).
- S_{17} — теорема эквивалентности D-G-оптимальных планов эксперимента [10].

Пример 2. Пусть $\mathcal{T}_{obj} \subset \mathcal{L}_{obj}$, где $\mathcal{T}_{obj}$ — некоторая теория, содержащая альтернативные гипотезы H_0, H_1. С целью уточнения теории $\mathcal{T}_{obj}$ альтернативы подвергаются дискриминации. Среди всех возможных гипотез H выделяется множество $H^* \subset H$, которое называется экстремальным базисом гипотез [11] или множеством "интересных" гипотез.

Обобщим результаты, полученные для случая теории планирования экспериментов для дискриминации регрессионных моделей [11, 12]. Обобщение производится по следующий схеме: основные идеи теории, сформулированные для метрического случая, рассматриваются в топологических пространствах, порожденных некоторым отношением предпочтения. Рассмотрим эту проблему с формально-логической точки зрения. Пусть язык $L_H \subset L_{obj}$, базовые формулы которого имеют вид

$$\varphi_a : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_a = \boldsymbol{\theta} : \max_{x \in X} \left[\eta_t\left(\mathbf{x}\right) - \eta\left(\mathbf{x}|, \boldsymbol{\theta}\right)\right]^2 \leq a. \tag{3}$$

Множество всех допустимых формул в данном языке строится следующим образом: $\varphi_a \,\&\, \varphi_b \;\Leftrightarrow\; \Omega_a \cap \Omega_b$, $\varphi_a \vee \varphi_b \;\Leftrightarrow\; \Omega_a \cup \Omega_b$, $\neg\Omega \Leftrightarrow \overline{\Omega}$, $\varphi_a \to\; \varphi_b \;\Leftrightarrow\; \Omega_a \;\subseteq\; \Omega_b \;\Leftrightarrow\; a \leq b$.

Правило вывода

$$\varphi_a \vdash \varphi_b \Leftrightarrow \frac{\varphi_a, \varphi_a \to \varphi_b}{\varphi_b}.$$

Воспользуемся [4, 5] и приведем несколько полезных определений и утверждений из теории моделей, которые позволят доказать некоторые важные свойства для теории планирования дискриминирующих экспериментов.

Определение 5. Для булевой алгебры $\mathfrak{B} =< \mathcal{A}, +, \times, \neg, 0, 1 >$:

- подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ называется собственным фильтром в $\mathfrak{B}$, если $\mathcal{D} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \mathcal{A}$; из условия $x, y \in \mathcal{D}$, $x \leq z$, следует, что $x \times y \in D$ и $z \in \mathcal{D}$;
- фильтр называется главным, если из условия $a \neq 0$, $a \in \mathcal{D}$ следует, что $y \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда $a \leq y$;
- $\mathcal{D}$ называется ультрафильтром в $\mathfrak{B}$, если никакое его собственное расширение не является фильтром в $\mathfrak{B}$.

Отношение эквивалентности $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ рассмотрим на формулах языка $\mathcal{L}$. Это отношение порождает следующие объекты:

$(\varphi) = (\psi : \vdash \varphi \;\Leftrightarrow \psi)$,
$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = ((\varphi) :\; \varphi \in \mathcal{L})$,
$O_{\mathcal{L}} = (\varphi \& \neg\varphi)$,
$I_{\mathcal{L}} = (\varphi \vee \neg\varphi)$,
$(\varphi) + (\psi) = (\varphi \vee \psi)$,
$(\varphi) \times (\psi) = (\varphi \;\&\psi\;)$,
$\neg\,(\varphi) = (\neg\varphi)$.

Булева алгебра $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}} =< \mathcal{B}_{\mathcal{L}}, +\;, \times, \neg, O_{\mathcal{L}}, I_{\mathcal{L}} >$ называется алгеброй Линденбаума для языка $\mathcal{L}$ [4].

Утверждение 7 (теорема Линденбаума [5]). Всякий фильтр в $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$ для всех предложений $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ языка $\mathcal{L}$ может быть расширен до ультрафильтра.

Утверждение 8. Всякая теория $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ полна и конечно-аксиоматизируема, если $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} = ((\varphi) :\; \mathcal{T} \models \varphi)$ есть главный фильтр в алгебре $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$.

Пусть $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{L}_H$ — теория, состоящая из всех предложений вида $\varphi \,\&\, \varphi_\Omega$, где $\varphi_\Omega : \boldsymbol{\theta} \in \Omega$. Здесь Ω — ограничения на параметры альтернативной гипотезы H_1.

Рассмотрим условия полноты и конечной аксиоматизируемости для $\mathcal{T}_H$.

Определение 6. Назовем гипотезы H_0, H_1 различимыми, если $\mathcal{L}_H$ не содержит $\varphi_0 :\, \boldsymbol{\theta} \in \Omega_{a=0}$.

Утверждение 9. $\mathcal{T}_H$ — полная и конечно-аксиоматизируемая теория, если $H_0,\ H_1$ — различимые гипотезы.

Доказательство. Заметим, что если $H_0,\ H_1$ — различимы, то $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$ для $\mathcal{L}_H$ — атомная булева алгебра (a — атом булевой алгебры, если не существует другого элемента b этой алгебры, такого, что $0 < b < a$). Отсюда вытекает, что существует главный фильтр, построенный относительно $\varphi_\Omega : \boldsymbol{\theta} \in \Omega$, который можно расширить до главного ультрафильтра относительно элемента:

$$\varphi^* : \boldsymbol{\theta} \in \Omega^* = \{\boldsymbol{\theta} : \max_{x \in X} \left[\eta_t\left(\mathbf{x}\right) - \eta\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\right)\right]^2 \leq a^*,$$

где

$$a^* = \min_{\theta \in \Omega} \max_{x \in X} \left[\eta_t\left(\mathbf{x}\right) - \eta\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\right)\right]^2.$$

Следствие 2. В [11, 12] доказано, что для ряда критериев оптимальности (D, G, E, A — критерии) существует способ их представления через T-критерий для дискриминации гипотез (см. (3)) в случае близких альтернативных гипотез. Для этого необходимо специальным образом выбрать конфигурацию множества Ω и положить $\eta_t\left(\mathbf{x}\right) \equiv 0$. Отсюда непосредственно следует, что соответствующие теории для указанных критериев также обладают свойствами полноты и конечно-аксиоматизируемости.

Заключение

Современные тенденции в области разработки систем искусственного интеллекта, машинного обучения, интеллектуального анализа данных предполагают разработку новых методов и переосмысление уже известных. Ориентация на “большие данные” сместила акценты в области статистических методов в сторону больших размерностей данных и, соответственно, моделей. Однако активные методы параметрической идентификации объектов на основе статистических методов и планирования экспериментов остаются актуальными в области экспериментальных наук, производства, экономики, бизнеса и также требуют новых подходов, но уже в контексте гибридного интеллекта, сочетающего в себе мощь искусственного и естественного интеллектов. Современный взгляд на создание подобных гибридных интеллектуальных систем базируется на известных подходах. В частности, концепция системы типа “ЭВМ—экспериментатор”, которая явно была впервые сформулирована в работе В.И. Денисова [1] и продолжена в работах [13–16], современна и требует дальнейшего развития в соответствии с реалиями сегодняшнего дня. Представленные результаты — это попытка вновь обратиться к этой теме и продолжить исследования в указанном направлении, отдавая дань уважения и сохраняя память об учителе, большом ученом и замечательном человеке — Денисове Владимире Ивановиче.

Список литературы

[1] **Денисов В.И.** Математическое обеспечение систем ЭВМ—экспериментатор (регрессионный и дисперсионный анализы). М.: Наука; 1977: 251.

[2] **Гаек П., Гавранек Т.** Автоматическое образование гипотез. М.: Наука; 1984: 280.

[3] **Налимов В.В.** Теория эксперимента. М.: Наука; 1971: 208.

[4] **Крейслер Г., Чен Ч.Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с.

[5] **Барвайс Дж.** Справочная книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей: Пер. с англ. М.: Наука; 1982: 392.

[6] **Тей А., Грибомон П.** Логический подход к искусственному интеллекту. М.: Мир; 1990: 432.

[7] **Чечкин А.В.** Математическая информатика. М.: Наука; 1991: 416.

[8] **Де Гроот М.** Оптимальные статистические решения. М.: Мир; 1974: 491.

[9] **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ. М.: Мир; 1980: 456.

[10] **Федоров В.В.** Теория оптимального эксперимента. М.: Наука; 1971: 313.

[11] **Fedorov V., Khabarov V.** Duality of optimal design for model discrimination and parameter estimation. Biometrika. 1986; (73):183–190.

[12] **Хабаров В.И.** Квазидифференциалы в задачах планирования экспериментов. Докл. Акад. наук высшей школы Российской Федерации. 2014; 4(25):124–136.

[13] **Хабаров В.И.** Концептуальная модель интеллектуальной системы планирования и анализа экспериментов. Системы искусственного интеллекта. Новосибирск: НЭТИ; 1992:3–15.

[14] **Khabarov V., Berestov L., Denisov V., Kozlov A., Melnik V.** Intelligent support of flight experimental designand analysis-artificial intelligence in applications of engineering. VI Intern. Symposium. Oxford; 1991:319–328.

[15] **Денисов В.И., Хабаров В.И.** Архитектура интегрированной системы “ЭВМ — экспериментатор”. Сб. науч. тр.: Машинные методы планирования эксперимента и оптимизации многофакторных систем. Новосибирск: НЭТИ; 1989:3–8.

[16] **Денисов В.И., Полетаева И.А., Хабаров В.И.** Экспертная система для анализа многофакторных объектов. Дисперсионный анализ. Прецедентный подход. Новосибирск: Новосибирский электротехнический ин-т; 1992: 127.

Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 3, с. 142–151. © ИВТ СО РАН, 2020 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 142–151. © ICT SB RAS, 2020 eISSN 2313-691X

INFORMATION TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2020.25.3.015

Logical aspects of experimental design and analysis

Khabarov Valeriy I.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russia

Corresponding author: Khabarov Valeriy I., e-mail: Khabarov51@mail.ru

Received March 10, 2020, revised March 18, 2020, accepted April 13, 2020

Abstract

Purpose. The purpose of this work is to formalize the tasks of active object identification based on the apparatus of model theory — a modern section of mathematical logic. Model theory allows putting the subject “planning and analysis of an experiment” in the context of semantic analysis. Semantic analysis is understood as establishing a correspondence between the world and its formal representation. From this point of view, the concept of the object under study is expressed in some applied theory, which allows applying formal methods of model theory to it.

Methods. It is assumed that the model is derived for this theory as an interpretation process, in which the key role is assigned to the experimenter. As a research method, it is proposed to use commutative diagrams that reflect the process of interpretation and extension of communication diagrams for the so-called equipped theories of planning and analysis of experiments.

Results. The properties of the proposed models are proved and examples for planning a regression experiment are presented as an illustration. It is proved that for linear models it is possible to construct a finitely axiomatization capable theory.

Findings, originality. The obtained results can be used in the design of architectures for an intelligent system in experimental research, building an experiment ontology and creation of knowledge bases. These studies will allow using logical programming to implement images of the presented commutative diagrams for equipped theories as applied systems for planning and interpreting the experiment.

Keywords: active identification, experimental design, model theory.

Citation: Khabarov V.I. Logical aspects of experimental design and analysis. Computational Technologies. 2020; 25(3):142–151. (In Russ.)

References

1. Denisov V.I. Matematicheskoe obespechenie sistem EVM-eksperimentator (regressionnyy i dispersionnyy analizy) [Mathematical support of computer-experimenter system (analysis of regression and variance)]. Moscow: Nauka; 1977: 251. (In Russ.)
2. H'ajek, P., Havr'anek T. Mechanising hypothesis formation: Mathematical foundations for a general theory. Berlin, Heidelberg: Springer; 1978: 398.
3. Nalimov V.V. Teoriya eksperimenta [Theory of experiment]. Moscow: Nauka; 1971: 208. (In Russ.)
4. Keisler H.J., Chang C.C. Model theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Company; 2012: 651.
5. Barwise J. Handbook of mathematical logic. North-Holland Publ. Company; 1977: 1153.
6. Thayse A., Gribomont P. Approche logique de l'intelligence artificielle. Paris: HERMES Science Publ.; 2000: 393.
7. Chechkin A.V. Matematicheskaya informatika [Mathematical Informatics]. Moscow: Nauka; 1991: 416. (In Russ.)
8. De Groot M.H. Optimal Statistical Decisions. New York: McGraw-Hill Company; 1970: 489.
9. Seber G.A. Linear Regression Analysis. New York: John Wiley and Sons; 2003: 582.
10. Fedorov V.V. Teoriya optimal'nogo eksperiment [Theory of optimal experiment]. Moscow: Nauka; 1971: 313. (In Russ.)
11. Fedorov V., Khabarov V. Duality of optimal design for model discrimination and parameter estimation. Biometrika. 1986; (73):183–190.
12. Khabarov V.I Quasidifferentials in experiment design problems. Proc. of the Russian Higher School Academy of Sciences. 2014; 4(25):124–136. (In Russ.)
13. Khabarov V.I. Kontseptual'naya model' intellektual'noy sistemy planirovaniya i analiza eksperimentov [Conceptual model of intelligent system for designing and analyzing experiments]. Sistemy iskustvennogo intellekta. Novosibirsk: NETI; 1992: 3-15. (In Russ.)
14. Khabarov V., Berestov L., Denisov V., Kozlov A., Melnik V. Intelligent support of flight experimental designand analysis-artificial intelligence in applications of engineering. VI Intern. Symposium. Oxford; 1991:319–328.
15. Denisov V.I., Khabarov V.I. Arkhitektura integrirovannoy sistemy "EVM-eksperimentator" [Architecture of the integrated the "Computer-Experimenter" system]. Sbornik nauch. tr.: Mashinnye Metody Planirovaniya Eksperimenta i Optimizatsii Mnogofaktornykh Sistem. Novosibirsk: NETI; 1989:3–8. (In Russ.)
16. Denisov V.I., Poletaeva I.A., Khabarov V.I. Ekspertnaya sistema dlya analiza mnogofaktornykh ob'ektov. Dispersionnyy analiz. Pretsedentnyy podkhod [Expert system for analyzing multi-factor objects. Analysis of variance. Case-based approach]. Novosibirsk: Novosibirskiy Elektrotekhnicheskiy Institut; 1992: 127. (In Russ.)