

Конечно-разностный аналог задачи равновесия “среднего поля”

В. С. Корниенко^{1,2,*}, В. В. Шайдунов¹, Е. Д. Кареева¹

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

²Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

*Контактный автор: Корниенко Виктория Сергеевна, e-mail: vika-svetlakova@yandex.ru

Поступила 24 июня 2019 г., доработана 19 февраля 2020 г., принята в печать 19 марта 2020 г.

Представлен конечно-разностный аналог дифференциальной задачи, сформулированной в терминах теории “игр среднего поля” (mean field games). Задачи оптимизации такого типа формулируются как связанные системы параболических дифференциальных уравнений в частных производных типа Фоккера — Планка и Гамильтона — Якоби — Беллмана. Предложенный конечно-разностный аналог обладает основными свойствами оптимизационной дифференциальной задачи непосредственно на дискретном уровне. В итоге он может служить как приближение, сходящееся к исходной дифференциальной задаче при стремлении шагов дискретизации к нулю, так и как самостоятельная оптимизационная задача с конечным числом участников. Для предложенного аналога построен алгоритм монотонной минимизации функционала стоимости, проиллюстрированный на модельной экономической задаче.

Ключевые слова: оптимальное управление, игры среднего поля, численные методы, конечные разности, экономические задачи.

Цитирование: Корниенко В.С., Шайдунов В.В., Кареева Е.Д. Конечно-разностный аналог задачи равновесия “среднего поля”. Вычислительные технологии. 2020; 25(4):31–44. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.004.

Введение

Математическая постановка “игр среднего поля” — относительно молодая часть теории оптимального управления, строго сформулированная в работах [1–3]. Ее цель — исследование задач оптимального управления для системы однотипных взаимодействующих агентов (игроков) путем предельного перехода к их бесконечному числу. Необходимость такой постановки вызвана экстремальной сложностью, возникающей при использовании традиционных подходов (например, динамического программирования) к исследованию систем большого числа взаимодействующих агентов.

Математические постановки “игр среднего поля” (MFG), развиваемые в задачах физики и механики сплошной среды, были адаптированы ко многим задачам экономики, сетевой инженерии и моделирования социальных явлений [4]. Поэтому большое внимание уделяется разработке эффективных численных методов решения таких задач (см., например, [5–8] и литературу в них). Для аппроксимации дифференциальных уравнений развиваются преимущественно методы конечных разностей и конечных элементов

с итерационными методами решения получающихся систем (вообще говоря, нелинейных) алгебраических уравнений.

Ранее [9] авторами предложена конечно-разностная полулагранжева схема для аппроксимации дифференциальных задач с улучшенными свойствами дискретной задачи в сравнении с другими работами. В настоящей работе вычислительная схема из [9] упрощена без потери порядка аппроксимации и применена к более общему случаю функций, отвечающих за управление динамической системой.

1. Математическая модель

Подробное описание математической постановки дифференциальной задачи среднего поля представлено в [10]. Начнем с уравнения Фоккера — Планка для функции плотности $m(t, x)$ “точечных” агентов, распределенных на отрезке $[0, 1]$ в момент времени $t \in [0, T]$. Термин “точечный” означает, что отдельный агент из их бесконечного числа не влияет на ситуацию, но выбирает рациональную стратегию с учетом его собственной позиции x и текущей плотности распределения $m(t, x)$.

1.1. Уравнение Фоккера — Планка

Рассмотрим одномерную задачу [10] динамики плотности $m(t, x)$:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times (0, 1), \quad (1)$$

$$m(0, x) = m_0(x) \quad \forall x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial m}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (3)$$

Здесь σ^2 — положительная константа, характеризующая стохастичность процесса [10]; $\alpha(t, x)$ — стратегия игрока, а (2) определяет начальное распределение агентов. И, наконец, краевое условие (3) препятствует их выходу за пределы области.

Этот тип уравнения получен А. Н. Колмогоровым в более общем виде из теории марковских цепей, а в физических задачах он интерпретируется как уравнение Фоккера — Планка с коэффициентом диффузии σ^2 и функцией сноса $\alpha(t, x)$ для электрических, магнитных полей и механики сплошной среды.

1.2. Функционал стоимости

В рассматриваемой модели будем минимизировать функционал стоимости

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x)m + g(t, x, m)) dx dt. \quad (4)$$

Здесь $F(\alpha, t, x)$ при каждом t и x — функция стоимости стратегии $\alpha(t, x)$; $g(t, x, m)$ — текущий платеж, который зависит не только от переменных t, x , но и от текущей

локальной плотности агентов $m(t, x)$. Мы требуем выполнение следующего условия для функции $g(t, x, m)$, необходимость которого определена в [3] для решения задачи MFG:

$$g(t, x, \tilde{m}) - g(t, x, m) \leq (\tilde{m} - m)b(t, x, m),$$

где $b(t, x, m) = \frac{\partial g}{\partial m}(t, x, m)$ для всех допустимых значений аргумента m .

Во многих публикациях по теории игр среднего поля функция $F(\alpha, t, x)$ принимается квадратично зависимой от α [3]. Это существенно упрощает применение численных методов; в противном случае они приводят к решению многомерных нелинейных задач. Но на практике функция F имеет более сложный характер, формируемый такими факторами, как сезонность, изменение законодательства или политики управления и т. п. В данной статье мы изложим численный метод, в котором более сложный вид функции F не приводит к драматическому усложнению алгоритмов.

Пусть для функции $F(\alpha, t, x)$ выполняются следующие условия:

- 1) $F(\alpha, t, x)$ непрерывна по $\alpha \in (-\infty, +\infty) \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$,
причем $F(0, t, x) = 0$;
- 2) $\partial F / \partial \alpha(\alpha, t, x)$ кусочно-непрерывна и строго монотонна
по $\alpha \in (-\infty, +\infty) \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$, причем $\partial F / \partial \alpha(0, t, x) = 0$.

1.3. Задача оптимизации

Сформулируем задачу оптимизации в следующем виде: найти

$$\inf_{\alpha} J(m, \alpha) \tag{6}$$

при выполнении (1) с начальными и граничными условиями (2) и (3).

Кратко опишем способ получения условий оптимальности для задачи (6). Строгий вывод с обоснованием можно найти в [10], а здесь он служит как конспект для вывода условий оптимальности на дискретном уровне в двух следующих разделах.

Возьмем произвольную функцию $v(t, x) \in C^\infty([0, T] \times [0, 1])$, умножим на нее уравнение (1) и проинтегрируем по частям относительно t и x :

$$-\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) m dx dt + \int_0^1 (v(T, x)m(T, x) - v(0, x)m_0(x)) dx = 0. \tag{7}$$

Принимая во внимание граничные условия, аналогичные (3), получим

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа для задачи (6):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, \alpha, v) := & J(m, \alpha) + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) m dx dt - \\ & - \int_0^1 (v(T, x)m(T, x) - v(0, x)m_0(x)) dx. \end{aligned} \tag{9}$$

С ее помощью задачу (6) можно переписать в виде задачи о седловой точке [11]:

$$\inf_{(m,\alpha)} \sup_v \mathcal{L}(m, \alpha, v). \quad (10)$$

Поиск стационарной точки задачи (10) приводит к (обратному по времени) уравнению Гамильтона — Якоби — Беллмана

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = -F(\alpha, t, x) - b(t, x) \text{ на } [0, T] \times [0, 1] \quad (11)$$

с начальными и граничными условиями

$$v(T, x) = 0 \quad \forall x \in (0, 1), \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (13)$$

Вариация функции Лагранжа по α дает равенство

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, t, x) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (14)$$

Из строгой монотонности $\partial F/\partial \alpha$ по α вытекает наличие некоторой функции θ такой, что

$$\alpha(t, x) := \theta(\partial v/\partial x(t, x)) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (15)$$

Вследствие (13), (14) и $\partial F/\partial \alpha(0, t, x) = 0$ получаем свойство

$$\alpha(t, 0) = \alpha(t, 1) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (16)$$

препятствующее выходу агентов за пределы отрезка интегрирования $[0, 1]$.

В итоге два связанных дифференциальных уравнения с начальными и граничными условиями (1)–(3) и (11)–(13) совместно с выражением (14) дают необходимые условия для минимизации функционала (4).

2. Численное решение уравнения Фоккера — Планка

Для численного решения оптимизационной задачи введем в рассмотрение дискретную однородную сетку по времени и пространству:

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, M, \quad \tau = T/M, \quad x_{i+1/2} = (i + 1/2)h, \quad i = -1, \dots, N, \quad h = 1/N,$$

для целых $M, N \geq 2$. Введем также точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$.

Решение задачи (1)–(3) будем искать на каждом временном слое t_k в виде кусочно-линейной функции $m^h(t, x)$, непрерывной на $[0, 1]$ и линейной на каждом отрезке $\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ $\forall i = 0, \dots, N$. Кроме того, будем считать $m^h(t_k, x)$ постоянной на интервалах $\omega_0 = [0, x_{1/2}]$ и $\omega_N = [x_{N-1/2}, 1]$ для выполнения условий (3). Таким образом, на каждом временном шаге функция $m^h(t_k, x)$ полностью определяется своими дискретными значениями $m_{k,i+1/2}^h \equiv m^h(t_k, x_{i+1/2})$, поскольку

$$m^h(t_k, x) = m_{k,i-1/2}^h(x_{i+1/2} - x)/h + m_{k,i+1/2}^h(x - x_{i-1/2})/h \quad \forall x \in \omega_i.$$

Для выполнения краевого условия положим

$$m_{k,-1/2}^h = m_{k,1/2}^h \quad \text{и} \quad m_{k,N+1/2}^h = m_{k,N-1/2}^h. \quad (17)$$

В работе [9] для задачи (1)–(3) предложена полулагранжева конечно-разностная схема с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Анализ разложения в ряд Тейлора показал, что разностные уравнения можно упростить без изменения порядка аппроксимации, пренебрегая квадратичными членами от $\alpha_{k-1,i}$.

В итоге используем следующее конечно-разностное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) m_{k,i+1/2}^h + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i+3/2}^h = \\ & = \gamma_{k-1,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \gamma_{k-1,i+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2}^h + \gamma_{k-1,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h \\ & \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{k-1,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k-1,i} \right), \\ \gamma_{k-1,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left(3 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k-1,i} \right) + \frac{1}{8\tau} \left(3 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k-1,i+1} \right), \\ \gamma_{k-1,i+1/2}^3 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k-1,i+1} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

с начальным условием

$$m_{0,i+1/2}^h = m_0(x_{i+1/2}) \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (20)$$

Заметим, что при выполнении условий

$$\tau |\alpha_{k,i}^h| \leq h/2 \quad \text{и} \quad h^2 < 4\tau\sigma^2 \quad \forall k = 0, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \quad (21)$$

коэффициенты $\gamma_{k-1,i+1/2}^s$ при $s = 1, 2, 3$ неотрицательны. Согласно этим условиям, внедиагональные элементы матрицы системы (17)–(20) отрицательны, а диагональные — положительны. В соответствии с определением из [11] матрица \mathbb{A} обладает M-свойством, если для ее элементов выполняется $a_{i,j} \leq 0$ при $i \neq j$, а $a_{i,i} > 0$ и, кроме того, существует положительная диагональная матрица \mathbb{D} такая, что $\mathbb{A}\mathbb{D}$ — матрица со строгим диагональным преобладанием. Поскольку для матрицы системы (17)–(20) выполняется неразложимое диагональное преобладание по столбцам, это означает, что матрица системы (17)–(20) обладает M-свойством.

Замечание 1. Полагая значения $m_{k-1,i+1/2}^h$ на временном слое $t = t_{k-1}$ неотрицательными, из положительности $\gamma_{k-1,i+1/2}^s$ и свойств M-матрицы [11] получаем, что значения $m_{k,i+1/2}^h$ на следующем временном слое $t = t_k$ также будут неотрицательными. Поэтому с учетом неотрицательного начального распределения все остальные значения плотности также будут неотрицательными.

Замечание 2. Просуммируем (18) по $i = 0, \dots, N-1$ и умножим на τh . В итоге получаем равенство

$$\int_0^1 m^h(t_k, x) dx = \int_0^1 m^h(t_{k-1}, x) dx.$$

С учетом неотрицательных значений $m_{k,i+1/2}^h$ это равенство представляет собой закон сохранения совокупности агентов на дискретном уровне. Оба интеграла являются дискретными аналогами $L_1(0, 1)$ -нормы для неотрицательных функций:

$$\int_0^1 m^h(t_k, x) dx = \|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} := \sum_{i=1}^N |m_{k,i-1/2}^h| h.$$

Здесь и далее точка вместо параметра или индекса означает, что он может принимать все подходящие значения. Например, $m^h(t_k, \cdot)$ — это функция со значениями $m^h(t_k, x)$, $x \in [0, 1]$, а $m_{k,\cdot}^h$ — сеточная функция со значениями $\{m_{k,i-1/2}^h\}_{i=1,\dots,N}$.

В этих терминах систему уравнений (17)–(20) запишем кратко в следующем виде:

$$\mathbb{A}m_{\cdot,\cdot}^h = \mathbb{F}m_{0,\cdot}^h, \quad (22)$$

где \mathbb{A} и \mathbb{F} при фиксированной α_{\cdot} — линейные разностные операторы, детально представленные в работе [9] в матричной форме. Здесь их конкретный вид нам не потребуется, поэтому запись (22) будет использована только для упрощения описания.

3. Оптимальное управление для дискретной задачи оптимизации

Вместо интеграла (4) рассмотрим его дискретный аналог

$$J^h(m^h, \alpha^h) = \sum_{k=0}^M \sum_{i=0}^{N-1} (r_{k,i+1/2}^h m_{k,i+1/2}^h + g_{k,i+1/2}^h) \tau h. \quad (23)$$

Здесь

$$r_{k,i+1/2}^h = F(\alpha_{k,i}^h, t_k, x_i)/2 + F(\alpha_{k,i+1}^h, t_k, x_{i+1})/2 \quad (24)$$

— аппроксимация функции $F(\alpha, t, x)$. Положим также

$$g_{k,i+1/2}^h = g(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}^h). \quad (25)$$

Применение квадратурной формулы (23) для вычисления функционала стоимости (4) также дает погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Таким образом, задача (6) сводится к следующей дискретной задаче:

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} J^h(m^h, \alpha^h), \\ \mathbb{A}m_{\cdot,\cdot}^h = \mathbb{F}m_{0,\cdot}^h. \end{cases} \quad (26)$$

Для формулировки задачи оптимального управления на дискретном уровне введем сеточную функцию $v_{\cdot,\cdot}^h = \{v_{k,i+1/2}^h\}_{k=0,\dots,M, i=0,\dots,N-1}$. Опустим промежуточные рассуждения, аналогичные (7)–(16) на алгебраическом уровне, поскольку они детально повторяют изложение в [9], и сразу приведем конечно-разностную схему для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2}\right) v_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2}\right) v_{k,i+1/2}^h + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2}\right) v_{k,i+3/2}^h = \\ & = \gamma_{k,i-1/2}^3 v_{k+1,i-1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^2 v_{k+1,i+1/2}^h + \gamma_{k,i+3/2}^1 v_{k+1,i+3/2}^h + z_{k,i+1/2}^h \\ & \forall k = M - 1, \dots, 0, \quad \forall i = 0, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$z_{k,i+1/2}^h = b(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}) + r_{k,i+1/2}^h. \quad (28)$$

Для однородности записи положим

$$v_{k,-1/2}^h = v_{k,1/2}^h, \quad v_{k,N+1/2}^h = v_{k,N-1/2}^h. \quad (29)$$

Начальные данные для (27) получаются равными нулю:

$$v_{M,i+1/2}^h = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (30)$$

Заметим, что здесь вычисление с помощью уравнений (27) ведется обратно по времени от t_{M-1} до t_0 .

Выберем центральную разность для аппроксимации $\partial v / \partial x$ в точке $x_{i+1/2}$, тогда дискретный аналог (15) приводит к выражению

$$\alpha^h(t_k, x_i) = \theta \left((v_{k,i+1/2}^h - v_{k,i-1/2}^h) / h \right) \quad \forall k = 0, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (31)$$

Замечание 3. При фиксированных k и α_{\cdot} , задача (17)–(20) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с M -матрицей благодаря диагональному преобладанию ее элементов *по столбцам*. А для задачи (27)–(30) при фиксированных k , m_{\cdot} и α_{\cdot} , это же свойство матрицы системы линейных алгебраических уравнений достигается благодаря диагональному преобладанию элементов *по строкам*. Поэтому для обоснования устойчивости схемы (27)–(30) более естественно использовать дискретный аналог $L_{\infty}(0, 1)$ -нормы:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |v^h(t_k, x)| = \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} := \max_{0 \leq x \leq 1} |v_{k,i-1/2}^h|.$$

Разложение в ряд Тейлора для (17)–(20) и (26)–(29) в точке $(t_k, x_{i+1/2})$ демонстрирует второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени $O(\tau + h^2)$ в дискретных нормах $\|m^h(t_k, \cdot)\|_{1, h}$ и $\|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h}$ соответственно.

Свойства M -матриц не только обеспечивают устойчивость разностного решения на каждом шаге по времени, но и дают следующие оценки устойчивости.

Теорема 1. *Рассмотрим уравнение (18) с некоторой погрешностью $\{\epsilon_{k,i+1/2}^h\}_{i=0, \dots, N-1}^{k=0, \dots, M}$ в правой части:*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) m_{k,i+1/2}^h + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i+3/2}^h = \\ & = \gamma_{k-1,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \gamma_{k-1,i+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2}^h + \gamma_{k-1,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h + \epsilon_{k,i+1/2}^h \\ & \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (32)$$

но с теми же самыми начальными и краевыми условиями (17) и (20). Тогда при выполнении условий (21) для решения задачи (17), (20), (31) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot)\|_{1, h} \leq \|m_0(\cdot)\|_{1, h} + T \max_{0 \leq k \leq M} \|\epsilon^h(t_k, \cdot)\|_{1, h}. \quad (33)$$

Доказательство. Ключевым свойством коэффициентов схемы (17)–(19) является легко проверяемое равенство

$$\gamma_{k-1,i+3/2}^1 + \gamma_{k-1,i+1/2}^2 + \gamma_{k-1,i-1/2}^3 = 1/\tau. \quad (34)$$

Сначала рассмотрим случай, когда все компоненты $\epsilon_{k,i+1/2}^h$ и $m_0(x_{i+1/2})$ неотрицательны. Тогда решение системы (17), (20), (32) тоже имеет неотрицательные компоненты. Умножим уравнение (32) на τ и просуммируем по $i = 0, \dots, N-1$. С учетом (34) получим равенство

$$\|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} = \|m^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{1,h} + \tau \|\epsilon^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{1,h} \quad \forall k = 1, \dots, M.$$

Использование математической индукции по k приводит к неравенству

$$\|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} \leq \|m_0(\cdot)\|_{1,h} + k\tau \max_{1 \leq s \leq M} \|\epsilon^h(t_s, \cdot)\|_{1,h} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (35)$$

Такое же неравенство справедливо для неположительных компонент $\epsilon_{k,i+1/2}^h$ и $m_0(x_{i+1/2})$. В соответствии с теоремой сравнения [11] неравенство (35) будет справедливо и для компонент $\epsilon_{k,i+1/2}^h$ и $m_0(x_{i+1/2})$ с любыми знаками. Взяв максимум от обеих частей неравенства (35), получаем (33). \square

Теорема 2. При выполнении условий (21) для решения задачи (27)–(30) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} \leq T \max_{0 \leq k \leq M} \|g^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h}. \quad (36)$$

Доказательство. Пусть $v^h(t_k, x_{i+1/2})$ — максимальная по модулю компонента на слое t_k , так что $|v^h(t_k, x_{i+1/2})| = \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h}$. Снова используем ключевое свойство коэффициентов (34) для получения неравенства

$$\|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} \leq \|v^h(t_{k+1}, \cdot)\|_{\infty,h} + \tau \|g^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} \quad \forall k = M-1, \dots, 0.$$

Использование математической индукции по k приводит к (36). \square

С учетом этих оценок и порядка аппроксимации $O(\tau + h^2)$ на основании теоремы эквивалентности вытекает сходимость приближенных решений обеих задач в сеточных нормах $\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h}$ и $\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h}$ с тем же порядком точности.

4. Численное решение полной задачи

4.1. Основной алгоритм

Предположим, что некоторые начальные выражения для $\alpha_{\cdot,\cdot}^h$ и $m_{\cdot,\cdot}^h$ известны. Например, для начала можем принять $\alpha_{\cdot,\cdot}^h = \mathbf{0}$. После этого вычисляем $m_{\cdot,\cdot}^h$ согласно (17)–(20) и $J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h)$ с помощью (23)–(25). Эта тройка является начальным приближением для следующего итерационного алгоритма.

Итерационный алгоритм

1. Получить значения $v_{\cdot,\cdot}^h \forall k = M-1, \dots, 0$ согласно (27)–(30).
2. Получить $\tilde{\alpha}_{\cdot,\cdot}^h$ согласно (31) для $k = 0, \dots, M-1$.
3. Получить $\tilde{m}_{\cdot,\cdot}^h$ согласно (17)–(20).
4. Получить $J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h)$ согласно (23)–(25).
5. Если $|J^h(m^h, \alpha^h) - J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h)| > Tol$, то $\{\alpha_{\cdot,\cdot}^h := \tilde{\alpha}_{\cdot,\cdot}^h; m_{\cdot,\cdot}^h := \tilde{m}_{\cdot,\cdot}^h;$ перейти к шагу 1}.
6. Выбрать $\tilde{\alpha}_{\cdot,\cdot}^h$ и $\tilde{m}_{\cdot,\cdot}^h$ как приближенное решение (26).

4.2. Вычислительный эксперимент

Для тестирования построенного численного алгоритма решения задачи MFG с неквадратичным контролем будем использовать модель экономического взаимодействия, предложенную в [5]. Здесь рассматривается континуум агентов-потребителей, где каждый агент представляет собой домохозяйство, решающее вопрос обогрева дома, имея выбор между затратами на установку и содержание теплоизоляции помещения или дополнительными затратами на электричество. Пусть x — положение агента (домохозяйства), который характеризуется уровнем теплоизоляции: $x = 0$ соответствует домохозяйству с тонкими стенами без каких-либо изоляционных характеристик, а $x = 1$ означает домохозяйство со всеми возможными технологиями теплоизоляции. Будем также считать, что все агенты склонны выбирать наиболее выгодную стратегию, но имеют разные уровни теплоизоляции на начальный момент времени. В соответствии с подходом MFG учитывается, с одной стороны, что действие отдельно взятого агента не влияет на глобальную плотность игроков, а с другой стороны, каждый агент имеет рациональные ожидания с учетом плотности распределения всех агентов. Также будем считать, что на стратегии агентов оказывают влияние случайные внешние факторы (скачки цен, колебания температуры, изменение технологий и т. д.). Коэффициент σ в данном случае может быть интерпретирован как непредсказуемые изменения температуры в регионе или как скачок в развитии технологий. Управляющая функция $F(\alpha, t, x)$ имеет смысл стоимости перехода из одного состояния в другое. Согласно [5] будем считать, что расходы на установку и содержание теплоизоляции изменяются по закону

$$w(x, m) = \frac{c_0 x}{c_1 + c_2 m}.$$

Здесь c_0, c_1, c_2 — некоторые положительные константы. Расходы традиционно растут с увеличением x и уменьшаются с увеличением плотности m , что задает явный стимул для агента выбирать уровень теплоизоляции в соответствии с распределением плотности m . Положим, что платеж за отопление вычисляется по закону

$$f(t, x) = p(t)(1 - c_3 x),$$

где $p(t)$ — цена за электроэнергию, которая может зависеть от времени (сезона, например), а $c_3 \in [0, 1]$ — положительная константа. Множитель $(1 - c_3 x)$ означает учетную ставку для текущего уровня теплоизоляции.

Платеж за отопление и стоимость теплоизоляции уровня x на момент времени t с учетом распределения агентов m выражается в форме

$$g(t, x, m) := (f(t, x) + w(x, m))m.$$

Тогда производной $\partial g(t, x, m)/\partial m$ соответствует выражение

$$b(t, x, m) := \frac{\partial g}{\partial m}(t, x, m) = f(t, x) + w(t, x) + m \frac{\partial w}{\partial m}(x, m).$$

В качестве $F(\alpha, t, x)$ выберем следующую кусочно-непрерывную функцию, удовлетворяющую условиям (5):

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^4(1 - 0.9x), & 0 \leq t < T/2, \\ \alpha^2(1 - 0.9x), & T/2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Такой вид функции управления физически означает, что затраты на переход агента из одного состояния в другое зависят от сезона, в который осуществляется переход, и от текущего уровня теплоизоляции.

Для вычислительного эксперимента выберем следующие значения параметров:

$$T = 1, \quad \tau = h = 0.01, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = 0.1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0.8, \quad \sigma^2 = 0.14.$$

Будем считать, что на начальный момент времени плотность агентов $m_0(x)$ распределена по нормальному закону с параметрами $\bar{x} = 0.5$, $\sigma^2/2 = 0.07$. На рис. 1 показан вид функции $m(t, x)$ на этапе установления итерационного процесса при фиксированной цене за энергию $p(t) \equiv 1$. В табл. 1 представлена история сходимости итерационного процесса. При этом первый шаг итерации дает наибольший вклад в минимизацию функционала стоимости (4).

При выбранной фиксированной цене вычислительный эксперимент показывает, что пик распределения агентов в момент времени $t = T$ приходится на $x = 1$, из этого следует, что установка и содержание теплоизоляции обходятся дешевле, чем отопление электричеством. Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов для разной ценовой политики в момент времени $t = T$ (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что при повышении цены на электроэнергию агенты стремятся к использованию теплоизоляционных материалов и технологий. Также численно было проверено, что площади под всеми кривыми на рис. 2 совпадают с точностью до влияния ошибок округления.

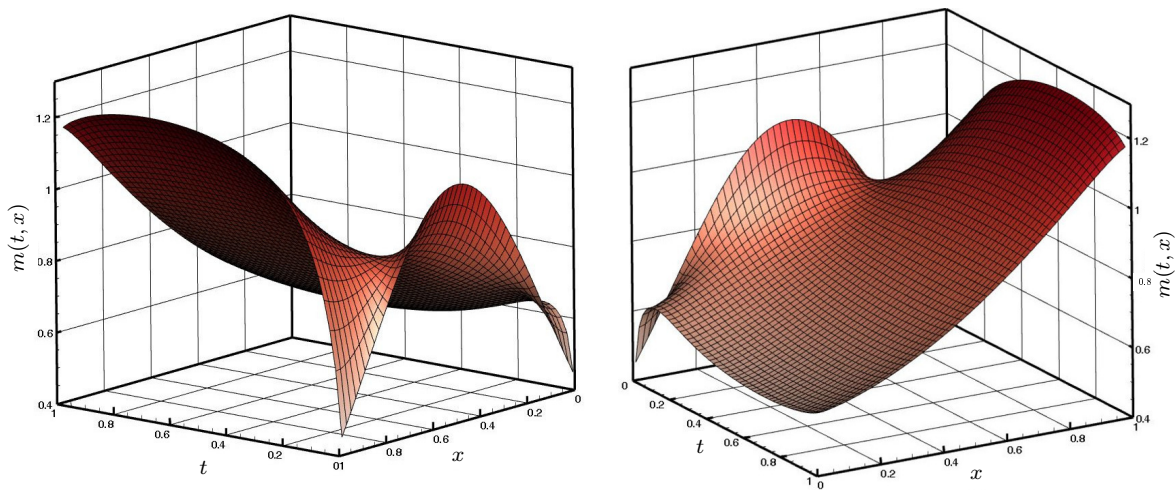


Рис. 1. Распределение плотности агентов $m(t, x)$ после сходимости итерационного процесса при $p(t) \equiv 1$

Fig. 1. Distribution of agents $m(t, x)$ after convergence of the iterative process at $p(t) \equiv 1$

Т а б л и ц а 1. История сходимости итерационного процесса

Table 1. History of convergence of iterative process

Число итераций s	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h$	Δ_s/Δ_{s-1}
0	0.945982032	—	—
1	0.919443649	0.02653838	—
2	0.918933607	0.00051004	0.01921902
3	0.91895233	0.00000837	0.01641791

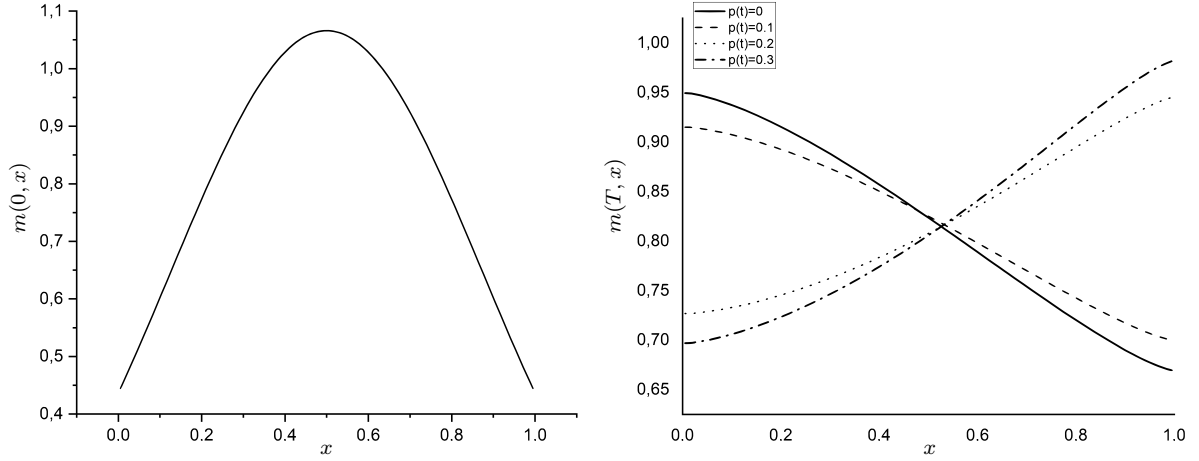


Рис. 2. Начальное распределение плотности агентов при $t = 0$ (слева) и распределение агентов при $t = T$ и разной ценовой политике (справа)

Fig. 2. Initial distribution of agent density at $t = 0$ (left) and distribution of agents at $t = T$ and different pricing policies (right)

Для проверки порядка сходимости задачи (26) при стремлении шагов h и τ в нуль рассмотрим последовательность приближенных решений $m_{\cdot, \cdot}^{h_n}$, $v_{\cdot, \cdot}^{h_n}$, J^{h_n} с набором параметров сеток

$$h_n = h/2^n \quad \text{и} \quad \tau_n = \tau/4^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

При $n = 0$ будем полагать, что $h_0 = \tau_0 = 1/4$. Поскольку точное решение задачи оптимизации неизвестно, будем использовать правило Рунге для оценки погрешности [12]. Предположим сходимость приближенных решений в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{1,h} &\approx c_m(\tau_n + h_n^2), \\ \max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} &\approx c_v(\tau_n + h_n^2), \\ |J - J^{h_n}| &\approx c_J(\tau_n + h_n^2). \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда разность двух последовательных приближенных решений со смежным набором параметров по правилу Рунге должна давать утроенную ошибку:

$$\begin{aligned} \delta_{m,n} &= \max_{0 \leq k \leq M} \|m^{h_{n-1}}(t_k, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{1,h} \approx 3c_m(\tau_n + h_n^2), \\ \delta_{v,n} &= \max_{0 \leq k \leq M} \|v^{h_{n-1}}(t_k, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} \approx 3c_v(\tau_n + h_n^2), \\ \delta_{J,n} &= |J^{h_{n-1}} - J^{h_n}| \approx 3c_J(\tau_n + h_n^2). \end{aligned}$$

Значения $\delta_{m,n}$, $\delta_{v,n}$, $\delta_{J,n}$ и $\tilde{c}_{m,n} = \delta_{m,n}/3(\tau_n + h_n^2)$, $\tilde{c}_{v,n} = \delta_{v,n}/3(\tau_n + h_n^2)$, $\tilde{c}_{J,n} = \delta_{J,n}/3(\tau_n + h_n^2)$ представлены в табл. 2, они косвенно подтверждают выполнение приближенных равенств (37) и сходимость задачи с порядком $O(\tau + h^2)$.

Т а б л и ц а 2. Сходимость последовательности приближенных решений
 Table 2. Convergence of approximate solutions

n	$\delta_{m,n}$	$\tilde{c}_{m,n}$	$\delta_{v,n}$	$\tilde{c}_{v,n}$	$\delta_{J,n}$	$\tilde{c}_{J,n}$
1	0.0356568	0.5502589	0.0060174	0.0928615	0.0132423	0.2043565
2	0.0087594	0.5407064	0.0012661	0.0781547	0.0033103	0.2043409
3	0.0021692	0.5357086	0.0003079	0.0760160	0.0008273	0.2042767
4	0.0005403	0.5336360	0.0000769	0.0759272	0.0002065	0.2039810

Таким образом, модели “игр среднего поля” и представленный вычислительный алгоритм позволяют моделировать некоторые экономические ситуации и прогнозировать динамику поведения большой массы агентов.

Заключение

Предложена вычислительная схема, применимая к задачам, сформулированным в терминах теории “игр среднего поля”, вообще говоря, с неквадратичными функциями контроля. Здесь дискретная задача полностью наследует основные свойства дифференциальной задачи одновременно с приближением каждого дифференциального уравнения. Приближения прямого во времени уравнения Фоккера — Планка и обратного во времени Гамильтона — Якоби — Беллмана имеют сопряженные операторы, монотонные в соответствующих сопряженных векторных пространствах. Для построения алгоритма использовались идеи из [9], обобщенные для задачи MFG с более общим видом функций управления.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00090.

Список литературы

- [1] **Huang M., Caines P.E., Malhamé R.P.** Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized ϵ -Nash equilibria. *IEEE Trans. Automat. Control.* 2007; 52(9):1560–1571.
- [2] **Huang M., Malhamé R.P., Caines P.E.** Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean — Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. *Commun. Assoc. Inf. Syst.* 2006; 6(3):221–251.
- [3] **Lasry J.-M., Lions P.L., Sands M.** Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics.* 2007; 2(1):229–260.
- [4] **Caines P.E., Huang M., Malhamé R.P.** Mean field games. *Handbook of dynamic game theory.* Springer, Cham; 2017: 1–28. DOI:10.1007/978-3-319-27335-8_7-1.
- [5] **Lachapelle A., Salomon J., Turinici G.** Computation of mean field equilibria in economics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.* 2010; 20(4):567588.
- [6] **Achdou Y., Dolcetta I.C.** Mean field games: numerical methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 2010; 48(3):1136–1162.

- [7] **Achdou Y.** Finite difference methods for mean field games. Hamilton — Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications. Part of the Lecture Notes in Mathematics. 2013; (2074):1–47. DOI:10.1007/978-3-642-36433-4_1.
- [8] **Achdou Y., Camilli F., Dolcetta I.C.** Mean field games: numerical methods for the planning problem. SIAM J. Control Optim. 2012; 50(1):77–109.
- [9] **Shaidurov V., Zhang S., Karepova E.** Conservative difference schemes for the computation of mean-field equilibria. 9th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences — AMITANS’17. Albena, Bulgaria, June 21–26, 2017. American Institute of Physics; AIP Conference Proceedings. 2017; (1895):020004. DOI:10.1063/1.5007358.
- [10] **Bensoussan A., Frehse J., Yam P.** Mean field games and mean field type control theory. Berlin: Springer; 2013: 132.
- [11] **Plemmons R.J., Li G., Tang Z.M.** Matrix characterizations I: nonsingular M-matrices. Linear Algebra and Its Applications. 1977; 18(2):175–188.
- [12] **Conte S.D., De Boor C.** Elementary numerical analysis: An algorithmic approach. 3d edition. N.Y.: McGraw-Hill; 1980: 408.

A finite difference analogue of the “mean field” equilibrium problem

KORNIENKO VIKTORIA S.^{1,2,*}, SHAIUROV VLADIMIR V.^{1,2}, KAREPOVA EVGENIA D.¹

¹Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia

²Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

*Corresponding author: Kornienko, Viktoria S., e-mail: vika-svetlakova@yandex.ru

Received June 24, 2019, revised February 19, 2020, accepted March 19, 2020

Abstract

In most forecasting problems, overstating or understating forecast leads to various losses. Traditionally, in the theory of “mean field games”, the functional responsible for the costs of implementing the interaction of the continuum of agents between each other is supposed to be dependent on the squared function of control of the system. Since additional external factors can influence the player’s strategy, the control function of a dynamic system is more complex. Therefore, the **purpose** of this article is to develop a computational algorithm applicable for more general set of control functions.

As a research **method**, a computational experiment and proof of the stability of the constructed computational scheme are used in this study.

As a **result**, the numerical algorithm was applied on the problem of economic interaction in the presence of alternative resources. We consider the model, in which a continuum of consumer agents consists of households deciding on heating, having a choice between the cost of installing and maintaining the thermal insulation or the additional cost of electricity. In the framework of the problem, the convergence of the method is numerically demonstrated.

Conclusions. The article considers a model of the strategic interaction of continuum of agents, the interaction of which is determined by a coupled differential equations, namely, the Fokker — Planck and the Hamilton — Jacobi — Bellman one. To approximate the differential problem, difference schemes with a semi-Lagrangian approximation are used, which give a direct rule for minimizing the cost functional.

Keywords: optimal control, mean field game, numerical methods, finite differences, economic problems.

Citation: Kornienko V.S., Shaidurov V.V., Karepova E.D. A finite difference analogue of the “mean field” equilibrium problem. Computational Technologies. 2020; 25(4):31–44. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.004. (In Russ.)

Acknowledgments. The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00090.

References

1. Huang M., Caines P.E., Malhamé R.P. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized ϵ -Nash equilibria. *IEEE Trans. Automat. Control.* 2007; 52(9):1560–1571.
2. Huang M., Malhamé R.P., Caines P.E. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean — Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. *Commun. Assoc. Inf. Syst.* 2006; 6(3):221–251.
3. Lasry J.-M., Lions P.L., Sands M. Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics.* 2007; 2(1): 229–260.
4. Caines P.E., Huang M., Malhamé R.P. Mean Field Games. *Handbook of Dynamic Game Theory.* Springer, Cham; 2017: 1–28. DOI:10.1007/978-3-319-27335-8_7-1.
5. Lachapelle A., Salomon J., Turinici G. Computation of mean field equilibria in economics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.* 2010; 20(4):567588.
6. Achdou Y., Dolcetta I.C. Mean field games: numerical methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 2010; 48(3): 1136–1162.
7. Achdou Y. Finite difference methods for mean field games. Hamilton — Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications. Part of the *Lecture Notes in Mathematics.* 2013; (2074): 1–47. DOI:10.1007/978-3-642-36433-4_1.
8. Achdou Y., Camilli F., Dolcetta I.C. Mean field games: numerical methods for the planning problem. *SIAM J. Control Optim.* 2012; 50(1):77–109.
9. Shaidurov V., Zhang S., Karepova E. Conservative difference schemes for the computation of mean-field equilibria. 9th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences — AMITANS’17. Albena, Bulgaria, June 21–26, 2017. *American Institute of Physics; AIP Conference Proceedings.* 2017; (1895):020004. DOI:10.1063/1.5007358.
10. Bensoussan A., Frehse J., Yam P. *Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory.* Berlin: Springer; 2013: 132.
11. Plemmons R.J., Li G., Tang Z.M. Matrix Characterizations I: Nonsingular M-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications.* 1977; 18(2):175–188.
12. Conte S.D., De Boor C. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach.* 3d Edition. N.Y.: McGraw-Hill; 1980: 408.