

## О повышении точности численных решений уравнения Гинзбурга — Ландау

В. И. ПААСОНЕН<sup>1,2,\*</sup>, М. П. ФЕДОРУК<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор: Паасонен Виктор Иванович, e-mail: [viki48@mail.ru](mailto:viki48@mail.ru)

Поступила 1 июля 2020 г., доработана 10 июля 2020 г., принята в печать 17 июля 2020 г.

Решение актуальной задачи повышения порядка точности разностных методов решения задач нелинейной волоконной оптики выше четвертого путем непосредственного построения сложных схем на расширенных шаблонах сопряжено с усложнением матрицы системы и с затруднениями в постановке дополнительных граничных условий. Кроме того, при таком подходе не происходит одновременное повышение точности также и по эволюционной переменной. В данной работе рассматривается альтернативный путь — применение экстраполяции Ричардсона, которая сводится к построению подходящих линейных комбинаций решений на различных сетках. Этот способ позволяет повышать порядок точности по обоим переменным, избегая при этом проблем с усложнением шаблонов, постановкой дополнительных граничных условий и реализацией алгоритмов. Как средство дополнительного улучшения точности наряду с простыми (однократными) поправками исследуются также двойные поправки на основе экстраполяции Ричардсона. Методика протестирована на нескольких точных решениях уравнения Гинзбурга — Ландау.

*Ключевые слова:* порядок точности, уравнение Шрёдингера, уравнение Гинзбурга — Ландау, экстраполяция Ричардсона, поправка Рунге.

*Цитирование:* Паасонен В.И., Федорук М.П. О повышении точности численных решений уравнения Гинзбурга — Ландау. Вычислительные технологии. 2020; 25(4):45–57. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.005.

### Введение

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гинзбурга — Ландау (см., например, [1]). В нелинейной оптике оно обычно используется в форме

$$i \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2 U = i\delta U + i\varepsilon |U|^2 U + i\beta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (i\mu - \nu) |U|^4 U, \quad (1)$$

где  $i$  — мнимая единица;  $U$  — искомый комплексный потенциал, который зависит от нормированной длины распространения  $t$ , являющейся эволюционной переменной, и “медленного” времени  $x$ ; коэффициент  $D = \pm 1$  определяет тип дисперсии, а  $\delta, \varepsilon, \beta \geq 0$ ,

$\mu, \nu$  в правой части — вещественные коэффициенты. В частном случае, когда все они равны нулю, уравнение (1) превращается в нелинейное уравнение Шрёдингера.

Уравнение (1) моделирует процессы, происходящие в волоконно-оптических линиях связи, волоконных лазерах и других оптических устройствах (см., например, [2]). Типичные решения таких уравнений имеют вид ряда изолированных или взаимодействующих солитонов на фоне плавного изменения решения. Ввиду наличия узких зон больших градиентов решения для успешного применения традиционных разностных схем требуются весьма детальная сетка и существенное время счета. Самый эффективный способ экономии вычислительных ресурсов состоит в повышении порядка точности схем. Среди разностных методов решения задач нелинейной волоконной оптики на традиционных трехточечных шаблонах наиболее эффективны схемы четвертого порядка точности [3–7], превосходящие классические методы типа схемы Кранка — Николсон. Но даже четвертый порядок точности не представляется достаточным, достижение более высоких порядков весьма желательно, однако попытки построения таких высокоточных схем наталкиваются на необходимость выхода за пределы трехточечных шаблонов [8, 9], что существенно усложняет алгоритм и требует постановки дополнительных граничных условий. К тому же на этом пути удается повысить порядок только по конфигурационной переменной, а по эволюционной переменной поднять порядок точности выше второго для двухслойных схем и до четвертого — для трехслойных затруднительно [9]. Увеличение числа слоев по эволюционной переменной выше трех с целью повышения порядка потребовало бы дополнительных процедур для предварительного аккуратного вычисления решения на начальных слоях. Поэтому единственным с практической точки зрения безупречным методом, не требующим ни усложнения шаблонов схем, ни дополнительных начальных и граничных условий, представляется метод Ричардсона [10], основанный на построении специальных линейных комбинаций решений, полученных на различных сетках, по сути совпадающий с применяемым при вычислении определенных интегралов методом апостериорных поправок Рунге. Этот способ позволяет, избегая всех перечисленных выше проблем, повышать порядок точности одновременно и по эволюционной переменной, связывая между собой шаги сетки при их стремлении к нулю в соответствии с порядком аппроксимации. При этом к скорректированным численным решениям ничто не мешает снова применить метод Ричардсона, еще более повышая порядок точности результата линейной комбинации.

В данной работе исследуется эффективность применения простых и двойных поправок к численным решениям, полученным по схеме Кранка — Николсон и схеме типа [3] в трехслойной версии [6, 7]. Показана эффективность подобного комбинирования решений нелинейных задач с целью повышения точности разностных решений, приведены результаты численных экспериментов на нескольких тестовых задачах нелинейной волоконной оптики, решенных с контролем реально наблюдаемых порядков точности.

## 1. Разностные схемы второго и четвертого порядков точности

Для удобства представим уравнение (1) в канонической форме, умножив его на  $-i$  и объединив слагаемые правой части. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(U), \quad f(U) = g(U)U, \quad g(U) = \delta + z|U|^2 + w|U|^4, \quad (2)$$

где

$$a = \beta + \frac{D}{2}i, \quad z = \varepsilon + i, \quad w = \mu + \nu i,$$

по форме совпадающее с уравнением теплопроводности. Основное отличие (2) от уравнения теплопроводности — комплексный коэффициент  $a$  перед второй производной.

Пусть  $h$  и  $\tau$  — шаги сетки по  $x$  и  $t$  соответственно, а  $\Lambda U$  — аппроксимация второй производной по  $x$  на равномерной сетке. Тогда для уравнения (2) разностная схема с весами имеет вид

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = a\Lambda (\sigma U^{n+1} + (1 - \sigma)U^n) + F^n. \quad (3)$$

Общая формулировка (3) включает в себя различные схемы. Например, при  $\sigma = 0.5$  и усредненной по слоям правой части имеем схему Кранка — Николсон, а при специальном значении веса схемы

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{12K}, \quad K = \frac{a\tau}{h^2},$$

и специальной правой части

$$F^n = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \frac{h^2}{12}\Lambda f^n$$

получаем классическую компактную схему (в случае уравнения теплопроводности схему Микеладзе [3]), имеющую погрешность аппроксимации  $O(\tau^2 + h^4)$ . Но из-за нелинейности в правой части схема в такой форме для своей реализации требует итераций на каждом шаге. Свободна от этого недостатка формально трехслойная версия данной схемы [4, 6]:

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\tau} = a\Lambda [\sigma U^{n+1} + (1 - \sigma)U^{n-1}] + F^n,$$

получающаяся из (3) удвоением шага  $\tau$  и изменением способа аппроксимации  $F^n$ , при котором правая часть аппроксимируется исключительно на среднем слое

$$F^n = f^n + \frac{h^2}{12}\Lambda f^n, \quad f(U) = (\delta + z|U|^2 + w|U|^4)U,$$

чем и достигается линейность схемы относительно решения на верхнем слое.

Аналогично модифицируется схема Кранка — Николсон, превращаясь в трехслойную безытерационную. Ниже применяются именно такие трехслойные схемы. Для старта вычислений трехслойная схема требует задания решения на двух начальных слоях, а краевая задача предполагает задание только одного начального данного на нулевом слое. При вычислении решения на первом слое итерации по нелинейности для двухслойной схемы (3) необходимо проводить обычным образом, тогда на всех последующих слоях можно использовать безытерационную трехслойную схему [6, 7].

На наш взгляд, эти две схемы наиболее подходят для расчетов. Схема со специальным весом  $\sigma = \sigma_0$  имеет наивысший порядок  $O(\tau^2 + h^4)$  среди всех трехточечных схем и позволяет сохранять наиболее естественное соотношение шагов при их стремлении к нулю. В самом деле, при  $\tau = O(h^2)$  ввиду постоянства  $K$  коэффициенты разностной схемы (3), представленной в индексном виде

$$-\sigma K V_{i-1} + (1 + 2\sigma K) V_i - \sigma K V_{i+1} = K (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) + \tau F_i^n, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (4)$$

где  $V = U^{n+1} - U^n$ , остаются постоянными независимо от числа шагов  $N$ . Иначе говоря, при любых  $h \rightarrow 0$  решается одна и та же система алгебраических уравнений, меняется только размерность задачи. То же самое имеет место при любом другом весе  $\sigma$ , если задано соотношение шагов  $\tau = O(h^2)$ .

Особое место среди схем с весами занимает схема Кранка — Николсон. Считается, что ввиду равенства порядков аппроксимации по обеим переменным для нее позволительно удерживать соотношение  $\tau = O(h)$  и тем самым экономить на числе шагов по эволюционной переменной. Однако нельзя не заметить, что в таком предельном переходе заложена некоторая неестественность, так как коэффициенты схемы при  $h \rightarrow 0$  не остаются постоянными (что было бы естественно ввиду постоянства коэффициента исходного дифференциального уравнения) — они зависят от бесконечно растущего параметра  $K = O(h^{-1})$ . Деление обеих частей разностного уравнения (4) на  $K$  при  $\sigma = 0.5$  и отбрасывание величин порядка  $1/K$  приводят к плохо обусловленной системе

$$S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad S = \frac{U^{n+1} + U^n}{2}.$$

При детализации сетки ухудшение обусловленности задачи сказывается таким образом, что реально наблюдаемый порядок точности перестает соответствовать теоретическим ожиданиям, хотя при умеренно крупных шагах сетки линейное соотношение между шагами для схемы Кранка — Николсон действительно приводит к экономии времени счета. Таким образом, возможность с целью экономии отступить от естественного соотношения шагов  $\tau = O(h^2)$  в пользу линейной связи  $\tau = O(h)$  не является абсолютной — для этого шаг сетки не должен быть слишком малым.

Все прочие трехточечные схемы заведомо уступают указанным двум, а особо оригинальные схемы, выходящие за пределы трехточечного шаблона (см., например, [8]), сложны в реализации, требуют дополнительных краевых условий и не обеспечивают одновременного повышения порядка по эволюционной переменной. Подробная классификация двухслойных схем на произвольных многоточечных шаблонах дана в [9].

Единственная практически значимая альтернатива для существенного повышения порядка точности, в том числе и по эволюционной переменной, на наш взгляд, состоит в синтезе хорошо зарекомендовавших себя схем, в первую очередь компактной схемы [6], и метода Ричардсона, позволяющего осуществлять коррекцию решений разностных схем с гарантированным повышением порядка точности.

## 2. Повышение порядка точности разностных решений

Проводя расчеты на последовательности вложенных равномерных сеток с удвоением числа узлов ( $N, 2N, 4N, \dots$ ), из каждой пары последовательных решений можно сформировать их линейную комбинацию на общей сетке так, чтобы она имела более высокий порядок точности. Этот способ может использоваться при любых вычислительных процедурах, где имеет место зависимость вычисляемой функции от параметра, в данном случае это шаг сетки. Заметим, что при численном интегрировании функций этот метод известен как поправка Рунге. В отношении решений разностных схем данная процедура известна как метод Ричардсона. Применительно к итерационным методам решения краевых задач для уравнения Пуассона метод Ричардсона исследован в [10].

Такого рода коррекция может проводиться при решении и стационарных, и динамических задач. В динамических задачах следует предварительно зафиксировать со-

отношение шагов при детализации сетки, с тем чтобы вычисления зависели лишь от одного параметра. Например, в случае использования схемы  $O(\tau^2 + h^4)$  условимся при уменьшении шага по  $x$  вдвое шаг по  $t$  уменьшать в четыре раза, обеспечивая этим постоянство  $K = a\tau/h^2$  при стремлении к нулю шагов сетки; при таком соглашении  $\tau = O(h^2)$  и погрешность в целом можно считать величиной четвертого порядка малости относительно шага  $h$ . Такой предельный переход используется также в схемах с весами с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ . В отношении схемы Кранка — Николсон, имеющей погрешность  $O(\tau^2 + h^2)$ , исследовались два варианта детализации сетки по эволюционной переменной — деление шага пополам и деление на четыре.

Пусть разностная схема имеет порядок  $m$  относительно шага  $h$ . Тогда значение решения схемы в произвольно выбранном узле  $u^N = u + bh^m + O(h^{m+d})$ , где  $u$  — локальное значение точного решения,  $b$  — константа, не зависящая от  $h$ , а  $d = 1$  или  $d = 2$  в зависимости от того, по всем степеням шага разлагается погрешность схемы или только по четным. Так как разностные операторы по переменной  $x$  для всех рассматриваемых здесь схем симметричны, в нашем случае  $d = 2$ . На сетке с половинным шагом  $u^{2N} = u + b(h/2)^m + O(h^{m+d})$  с той же константой  $b$ . Тогда в линейной комбинации

$$\hat{u}_i = \frac{2^m u_{2i}^{2N} - u_i^N}{2^m - 1}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

слагаемые порядка  $O(h^m)$  взаимно уничтожатся, а ошибка сеточной функции  $\hat{u}$  имеет более высокий порядок  $O(h^{m+d})$ . Если к алгоритму вычисления  $\hat{u}$ , рассматриваемому как самостоятельный метод порядка  $m + d$ , повторно применить описанную процедуру, то получится метод порядка  $m + 2d$ , использующий решения на трех последовательных сетках:

$$\tilde{u}_i = \frac{2^{m+d} \hat{u}_{2i}^{2N} - \hat{u}_i^N}{2^{m+d} - 1} = \frac{2^{2m+d} u_{4i}^{4N} - (2^{m+d} + 2^m) u_{2i}^{2N} + u_i^N}{(2^{m+d} - 1)(2^m - 1)}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Таким образом, с помощью простых и двойных поправок на базе схемы Кранка — Николсон  $O(h^2)$  можно вести вычисления с четвертым и шестым порядками точности по обоим переменным:

$$\hat{u}_i = \frac{4u_{2i}^{2N} - u_i^N}{3}, \quad \tilde{u}_i = \frac{64u_{4i}^{4N} - 20u_{2i}^{2N} + u_i^N}{45}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

а на базе компактной схемы получаются алгоритмы точности  $O(\tau^3 + h^6)$  и  $O(\tau^4 + h^8)$  соответственно:

$$\hat{u}_i = \frac{16u_{2i}^{2N} - u_i^N}{15}, \quad \tilde{u}_i = \frac{1024u_{4i}^{4N} - 80u_{2i}^{2N} + u_i^N}{945}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Ясно, что порядок точности теоретически можно повышать и далее, привлекая расчеты на более чем трех различных сетках. В частности, из решений компактной схемы на четырех сетках формируется скорректированное решение точности  $O(\tau^5 + h^{10})$ . При этом вовсе не обязательно именно удваивать число шагов сетки при детализации. Обязательное требование состоит лишь в том, чтобы в линейной комбинации все используемые сетки содержали в себе наименее детальную. Например, аналогично по расчетам на сетках с числом шагов  $N$ ,  $2N$ ,  $3N$  и  $4N$  на сетке с  $N$  шагами получаются простая, двойная и тройная поправки.

### 3. Результаты численных экспериментов

Точные решения уравнения (1), на которых тестировались основные схемы и поправочные методы, взяты из работы [1]. Все задачи решались на отрезках, симметричных относительно начала координат, при этом точные решения во всех тестах являлись четными функциями. Граничные условия Дирихле слева и справа задавались из точных решений. Ввиду четности функций всюду на рисунках приведена только половина графиков решений, это позволило использовать вдвое более крупный масштаб.

В работе [1] точные решения уравнения Гинзбурга — Ландау отыскивались в виде

$$U(x, t) = \alpha(x) \exp(i(\phi(x) - \omega t)), \quad (5)$$

где  $\omega$  — вещественная константа;  $\alpha$  и  $\phi$  — вещественные функции, связанные равенством  $\phi(x) = d \ln(\alpha(x))$ , а  $d$  — параметр чирпа. Для вещественной и мнимой компонент решения выписывалась система двух дифференциальных уравнений, и для них формулировались условия совместности. Затем некоторые свободные параметры фиксировались, а остальные параметры находились из сформулированных условий. Из коллекции тестов [1] нами были выбраны три тестовые задачи. Первая отличается от второй ненулевым коэффициентом  $\delta$ , увеличивающим градиенты решения, а третья отличается от первых двух особо сильной нелинейностью (пятой степени). Такой выбор продиктован желанием испытать методику в менее и более жестких условиях.

**Задача 1.** Рассматривается случай  $\mu = \nu = 0$ , при котором в уравнении отсутствует нелинейность пятой степени.

Условия совместности удовлетворяются при следующих соотношениях между коэффициентами уравнения:

$$d = \frac{\sqrt{9S^2 + 8H} - 3S}{2H}, \quad \omega = -\frac{\delta(1 - d^2 + 4\beta d)}{2R},$$

где использованы обозначения

$$S = 1 + 2\varepsilon\beta, \quad H = 2\beta - \varepsilon, \quad R = d - \beta + \beta d^2.$$

При этом функция  $\alpha(x)$  однозначно определяется в явном виде

$$\alpha(x) = BC \operatorname{sech}(Bx), \quad (6)$$

где

$$C = \sqrt{\frac{3d(1 + 4\beta^2)}{2H}}, \quad B = \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Задача решалась в области  $(-5 \leq x \leq 5) \times (0 < t \leq 1)$  при значениях параметров  $D = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1/4$  на сгущающихся вложенных сетках. Результаты расчетов задачи на момент эволюционной переменной  $t = 1$  по схеме Кранка — Николсон и компактной схеме при соотношении шагов  $\tau = O(h^2)$  приведены на рис. 1 и 2 соответственно. Из рис. 1 видно, что исходное решение на грубой сетке с  $N = 24$  по схеме Кранка — Николсон далеко отстоит от точного. Первая поправка, вычисленная по расчетам на сетках с 24 и 48 шагами, имеет еще довольно большую ошибку, а маркеры второй поправки, полученные по расчетам на сетках с 24, 48 и 96 узлами, визуальн

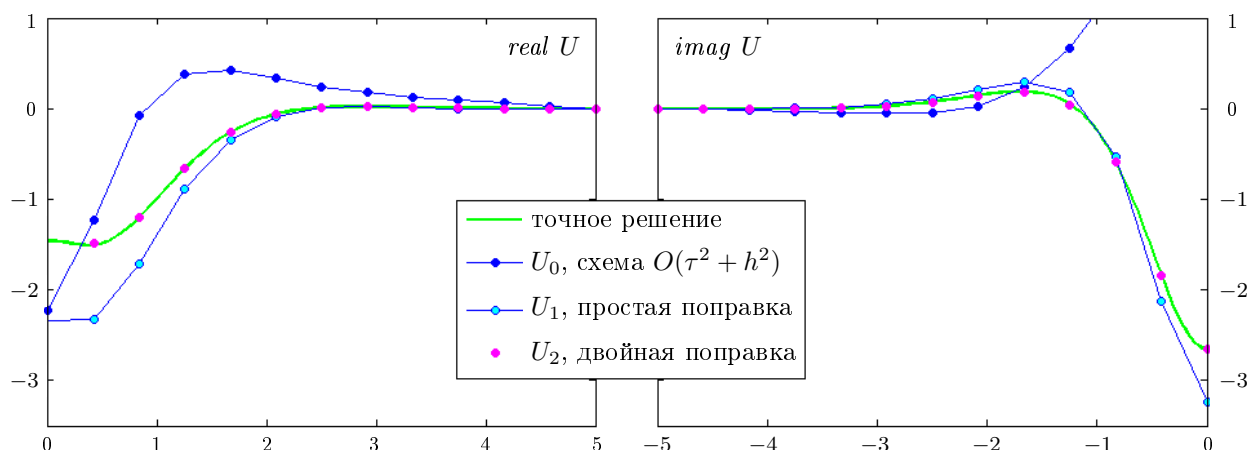


Рис. 1. Решение задачи 1 по схеме Кранка — Николсон  $O(\tau^2 + h^2)$  на сетке с числом шагов  $N = 24$ ; простая поправка выполнена по расчетам на сетках с 24 и 48 шагами, двойная поправка — по расчетам на сетках с 24, 48 и 96 шагами

Fig. 1. Solution of the problem 1 using the Crank — Nicholson scheme  $O(\tau^2 + h^2)$  on a grid with the number of steps  $N = 24$ ; simple correction was made according to calculations on grids with 24 and 48 steps, double correction — according to calculations on grids with 24, 48 and 96 steps

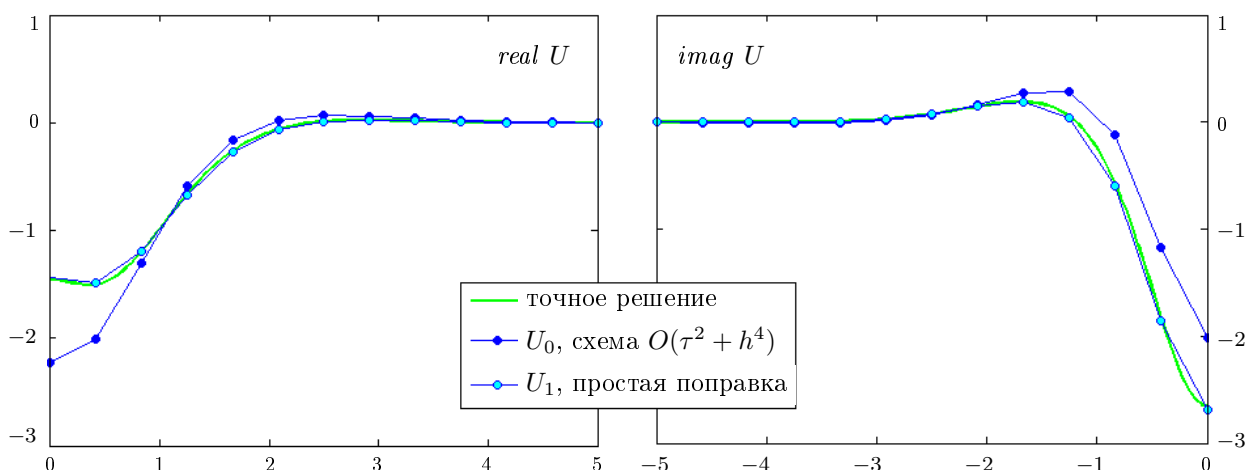


Рис. 2. Решение задачи 1 по компактной схеме  $O(\tau^2 + h^4)$  на сетке с числом шагов  $N = 24$ ; простая поправка по расчетам на сетках с 24 и 48 шагами

Fig. 2. Solution of the problem 1 using the compact scheme  $O(\tau^2 + h^4)$  on a grid with the number of steps  $N = 24$ ; simple correction for calculations on grids with 24 and 48 steps

вполне соответствуют точному решению. На тех же сетках компактная схема (рис. 2) дает более приемлемые результаты — уже первая поправка хорошо согласуется с точным решением. Вторая поправка на рисунке не приводится, так как она визуально слилась бы с точным решением.

В табл. 1 приводятся ошибки и апостериорные оценки порядков точности, вычисленные при решении задачи 1 с дроблением сетки от числа шагов  $N = 12$  до  $N = 384$ . Ошибки в  $C$ -норме и вычисленные порядки точности обозначены  $d_k$  и  $p_k$  соответственно, где индексы  $k = 0, 1, 2$  относятся к исходным расчетам ( $k = 0$ ), к простой поправке ( $k = 1$ ) и двойной поправке ( $k = 2$ ) соответственно. В последней колонке приводится время счета на самой детальной сетке. Из таблицы заметна действенность поправок во всех случаях, а также явное преимущество в точности компактной схемы четвертого порядка перед схемой Кранка — Николсон.

Т а б л и ц а 1. Результаты расчета задачи 1, полученные после пяти последовательных удвоений числа шагов сетки (до  $N = 384$ )

Table 1. The results of calculation for the problem 1, obtained after five consecutive doubling of the number of grid steps (up to  $N = 384$ )

Схема	Соотношение шагов	$d_0$	$p_0$	$d_1$	$p_1$	$d_2$	$p_2$	Время счета
$O(\tau^2 + h^2)$	$\tau = O(h)$	1.3e-02	2.0	1.0e-04	4.0	6.0e-06	4.9	0.66
$O(\tau^2 + h^2)$	$\tau = O(h^2)$	1.8e-02	2.0	2.1e-04	4.0	5.0e-06	5.9	9.00
$O(\tau^2 + h^4)$	$\tau = O(h^2)$	6.7e-06	4.0	2.0e-08	6.0	4.7e-10	8.1	8.30

Первая строка табл. 1 отличается от второй значением коэффициента дробления сетки по эволюционной переменной (2 и 4 соответственно). Этим объясняется существенная экономия времени счета при соблюдении соотношения  $\tau = O(h)$ , так как в этом варианте суммарное число шагов по эволюционной переменной на порядок меньше. С другой стороны, этим же объясняется недобор порядка точности второй поправки до теоретического шестого порядка. Заметим, что в некоторых вариантах (при иных значениях начального шага  $\tau$ ) с линейной зависимостью между шагами при дроблении сетки наблюдалось снижение порядка также и для простой поправки и даже для исходного расчета без коррекции. Поэтому при использовании схемы Кранка — Николсон с линейной связью между шагами рекомендуется контролировать реальный порядок и оценивать относительную точность. Если при детализации сетки замечена тенденция к падению порядка, это сигнал к тому, что дальнейшая детализация сетки не даст улучшения точности, и если уже достигнутая точность достаточна, есть смысл остановить дальнейшее дробление сетки. Если же достигнутую точность нельзя признать удовлетворительной, выход заключается в выборе более мелкого начального шага  $\tau$  или в переходе к более естественному соотношению шагов  $\tau = O(h^2)$ , при котором исключено приближение задачи к плохо обусловленной.

В следующих двух тестах для обеих схем приводятся результаты, полученные при одинаковой квадратичной зависимости шага  $\tau$  от  $h$ , чтобы сравнивать реальную точность двух схем в одинаковых условиях, исключив негативное влияние на точность схемы Кранка — Николсон фактора линейной зависимости между шагами.

**Задача 2.** Точное решение при  $\delta = \nu = \mu = 0$  имеет вид (5), (6), но входящие в решение параметры связаны иными соотношениями:

$$\omega = -d \frac{L^2}{2\beta} B^2, \quad C = \sqrt{\frac{dL}{2\varepsilon}}, \quad d = \frac{L-1}{2\beta}, \quad \varepsilon = \beta \frac{3L-1}{4+18\beta^2}, \quad L = \sqrt{1+4\beta^2}. \quad (7)$$

Здесь  $B$  — свободный параметр. Задача решалась в области  $(-5 \leq x \leq 5) \times (0 < t \leq 20)$  при  $D = 1$ ,  $B = 1$ ,  $\beta = 1$ .

На рис. 3 приведены результаты расчетов по схемам второго и четвертого порядков точности соответственно, полученные на момент  $t = 20$  на различных сетках, начиная с сетки  $40 \times 120$ . Для краткости показаны только вещественные компоненты решений. Слева приведены результаты расчетов непосредственно по схемам, а справа — соответствующие простые поправки. Из сравнения рисунков можно констатировать существенное преимущество компактной схемы в скорости сходимости при детализации сетки. Это касается и исходных решений (левая половина рис. 3) и поправок (правая половина).

В табл. 2 приведены  $C$ -нормы ошибок ( $d_k$ ) и оценки порядков точности ( $p_k$ ) разностных решений и простых поправок, полученные при решении задачи 2. Поправка



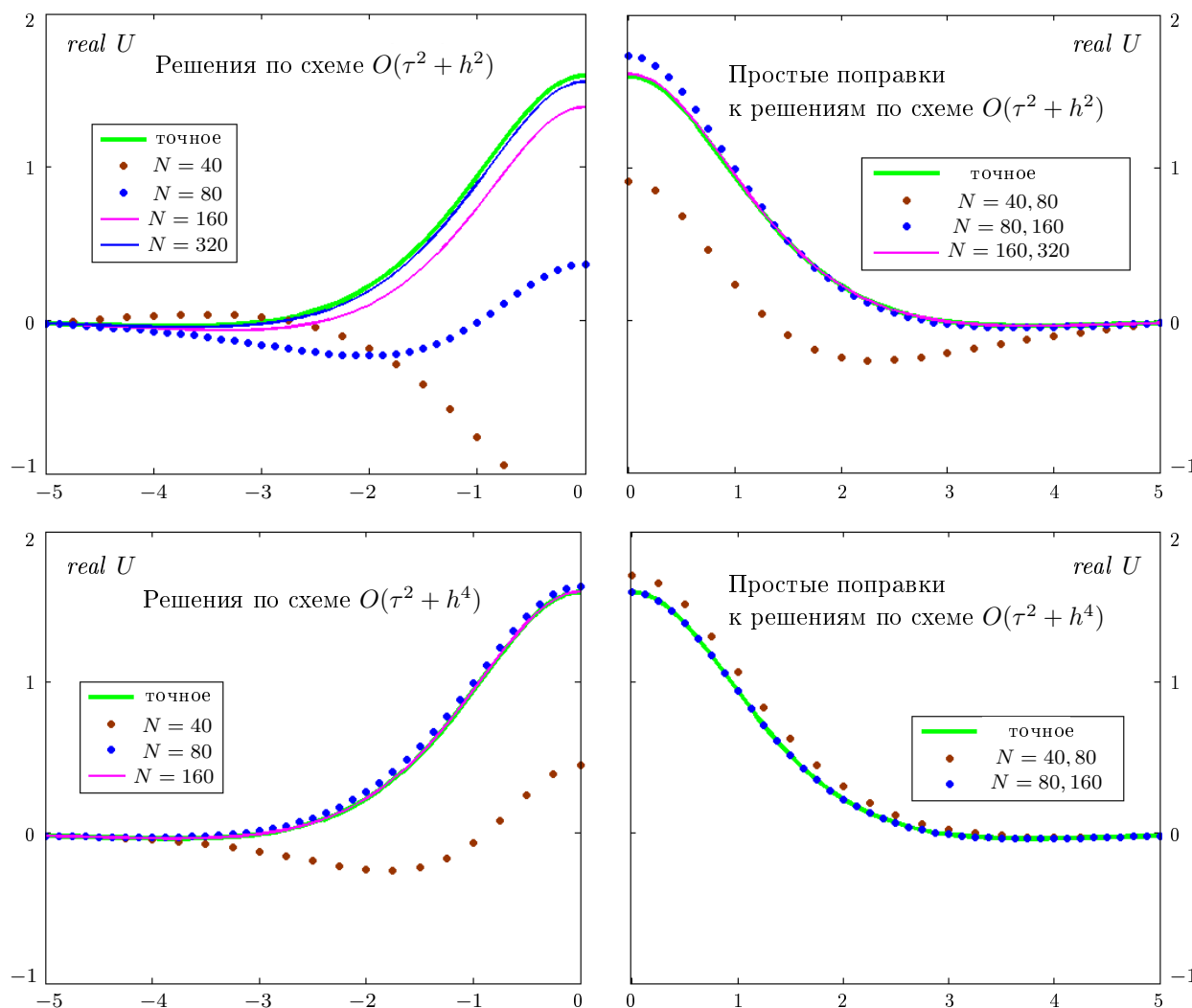


Рис. 3. Численные решения задачи 2, полученные на различных сетках по схеме  $O(\tau^2 + h^2)$  (вверху) и схеме  $O(\tau^2 + h^4)$  (внизу); слева решения без коррекции, справа — простые поправки  
 Fig. 3. Numerical solutions of the problem 2 obtained on various grids according to the  $O(\tau^2 + h^2)$  scheme (above) and the  $O(\tau^2 + h^4)$  scheme (below); solutions without correction are shown on the left, while simple corrections are on the right

сформирована из решений на сетках с текущим  $N$  и предыдущим. Из таблицы видно, что при детализации сетки порядки исходных решений и поправок стремятся к теоретически ожидаемым значениям, величины ошибок и их порядки коррелируют с порядком точности схем.

Т а б л и ц а 2. Результаты расчетов задачи 2 на сгущающихся сетках  
 Table 2. Results of calculations for the problem 2 on condensed grids

$N$	Схема $O(\tau^2 + h^2)$		Простая поправка		Схема $O(\tau^2 + h^4)$		Простая поправка	
	$d_0$	$p_0$	$d_1$	$p_1$	$d_0$	$p_0$	$d_1$	$p_1$
40	3.0	-1.6	—	—	1.8	-0.8	—	—
80	1.7e+00	0.8	2.0e+00	1.0	2.3e-01	2.9	3.6e-01	2.4
160	5.2e-01	1.7	2.8e-01	2.9	1.4e-02	4.1	1.2e-03	8.2
320	1.4e-01	1.9	2.3e-02	3.6	8.7e-04	4.0	4.2e-06	8.1
640	3.4e-02	2.0	1.5e-03	3.9	5.5e-05	4.0	1.5e-08	8.1

**Задача 3.** Точное решение задачи задается формулой (5), но здесь

$$\delta = 0, \quad \omega = -d \frac{1 + 4\beta^2}{2\beta} B,$$

а параметры  $d$ ,  $\beta$  и  $\varepsilon$  удовлетворяют соотношениям (7), при этом коэффициенты  $\nu$  и  $\mu$  не равны нулю (т. е. в правой части присутствует нелинейность пятой степени), они связаны соотношением

$$\frac{2\nu}{8\beta d - d^2 + 3} = \frac{\mu}{3\beta - 2d - \beta d^2}.$$

При сформулированных условиях функция  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha(x) = \sqrt{\frac{3d(1 + 4\beta^2)B}{2\beta - \varepsilon + C \cosh(2\sqrt{B}x)}}, \quad C = \sqrt{(2\beta - \varepsilon)^2 + \frac{18d^2\nu(1 + 4\beta^2)^2 B}{8\beta d - d^2 + 3}},$$

где  $B$  — свободный параметр.

Задача решалась в области  $(-10 \leq x \leq 10) \times (0 < t \leq 40)$  при значениях параметров:

$$D = 1, \quad \beta = 0.1, \quad \nu = 0.5, \quad B = 1.$$

Начальная сетка имела размер  $40 \times 80$ . Рисунок 4 иллюстрирует качество расчетов, полученных на момент  $t = 40$  по схемам второго и четвертого порядков точности без коррекции, а также простые и двойные поправки. Соответствующие  $C$ -нормы ошибок и оценки порядков точности представлены в табл. 3. Простая поправка сформирована из решений на сетках с текущим  $N$  и предыдущим, двойная — с текущим  $N$  и двумя предыдущими. Сравнение результатов расчетов задачи 3 подтверждает огромное преимущество компактной схемы перед схемой Кранка — Николсон и полезность для любых схем коррекции результатов по методу Ричардсона. Так, например, на сетке с  $N = 320$  решения по схеме Кранка — Николсон и компактной схеме имеют соответственно ошибки порядка  $10^{-3}$  и  $10^{-5}$ , простые поправки, использующие сетки с  $N = 160$  и  $320$  — ошибки порядка  $10^{-5}$  и  $10^{-8}$  соответственно, а двойные поправки на сетках с  $N = 80, 160, 320$  достигают точности  $10^{-6}$  и  $10^{-9}$ .

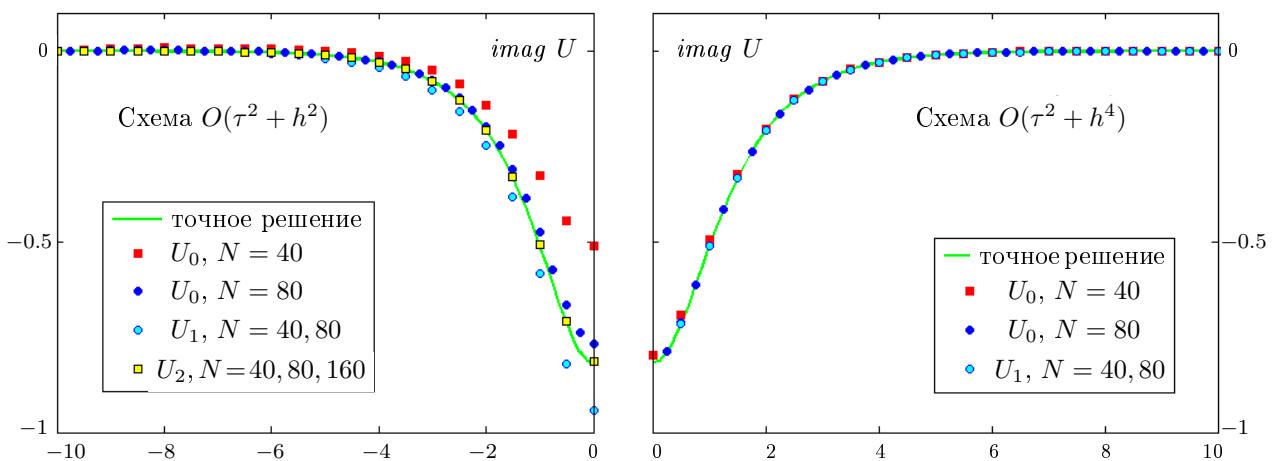


Рис. 4. Результаты расчета задачи 3 по схеме Кранка — Николсон (слева) и компактной схеме (справа):  $U_0$  — решение по схеме без коррекции,  $U_1$  — простая поправка,  $U_2$  — двойная поправка  
 Fig. 4. Results of calculating for the problem 3 using the Crank — Nicholson scheme (left) and the compact scheme (right):  $U_0$  — solution according to the scheme without correction,  $U_1$  — simple correction,  $U_2$  — double correction

Т а б л и ц а 3. Результаты расчетов задачи 3 на сгущающихся сетках

Table 3. Results of calculations for the problem 3 on condensed grids

$N$	Схема $O(\tau^2 + h^2)$		Простая поправка		Двойная поправка	
	$d_0$	$p_0$	$d_1$	$p_1$	$d_2$	$p_2$
40	4.4e-01	1.2	—	—	—	—
80	8.9e-02	2.3	5.0e-02	3.5	—	—
160	2.1e-02	2.1	1.6e-03	4.9	1.7e-03	5.6
320	5.3e-03	2.0	9.6e-05	4.1	8.6e-06	7.7
640	1.3e-03	2.0	5.9e-06	4.0	1.2e-07	6.1

$N$	Схема $O(\tau^2 + h^4)$		Простая поправка		Двойная поправка	
	$d_0$	$p_0$	$d_1$	$p_1$	$d_2$	$p_2$
40	5.0e-02	4.3	—	—	—	—
80	2.6e-03	4.3	6.0e-04	6.5	—	—
160	1.6e-04	4.0	2.0e-06	8.2	7.5e-06	7.6
320	1.0e-05	4.0	2.4e-08	6.4	8.5e-09	9.8
640	6.3e-07	4.0	3.4e-10	6.2	4.5e-11	7.6

## Заключение

Таким образом, в сериях численных экспериментов на тестовых задачах для нелинейного уравнения Гинзбурга — Ландау исследована эффективность простых и двойных поправок, сформированных на основе метода экстраполяции Ричардсона в отношении разностных решений, полученных по трехслойным версиям схемы Кранка — Николсон и компактной схемы. Расчетами подтверждено, что простая поправка повышает точность по конфигурационной переменной на два порядка, а двойная поправка — приблизительно на четыре порядка с соответствующим повышением порядка также и по эволюционной переменной. Из приведенных табличных данных следует, что синтез высокоточной компактной схемы и коррекции Ричардсона позволяет получить колоссальную точность расчетов.

Применение поправок Ричардсона к решениям, полученным с помощью высокоточных компактных схем, представляет собой превосходную альтернативу громоздким схемам на сложных шаблонах с большим числом узлов по конфигурационной переменной и (или) с многослойностью по эволюционной переменной. Преимущество предлагаемого подхода заключается в точности и простоте метода, опирающегося на наилучшие разностные схемы и элементарные способы повышения порядка точности, и в отсутствии каких бы то ни было затруднений в постановке и реализации граничных условий. Не исключено, что синтез компактной схемы и коррекции Ричардсона в будущем может представлять интерес для решения проблемы расшифровки сигналов в режиме реального времени.

Кроме того, простота и традиционность структуры разностных схем и элементарность способа формирования поправок обеспечивают простоту воспроизводимости соответствующих алгоритмов и программ широким кругом лиц, в том числе не являющихся специалистами в области высокоточных методов, но заинтересованных в качественных вычислениях такого рода задач.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-11-20040).

## Список литературы

- [1] **Akhmediev N.N., Afanasiev V.V.** Singularities and special soliton solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg — Landau equation. *Physical Review E*. 1996; 53(1):1190–1201.
- [2] **Agrawal G.P.** *Nonlinear fiber optics*. N.Y.: Academic Press; 2001: 446.
- [3] **Микеладзе Ш.Е.** О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1941; 5(1):57–74.
- [4] **Xie S.-S., Li G.-X., Yi S.** Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation b,2. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2009; 198:1052–1061.
- [5] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. 2011; 16(6):68–73.
- [6] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная безытерационная схема с искусственной диссипацией для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. 2012; 17(3):83–90.
- [7] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Трехслойная безытерационная схема повышенного порядка точности для уравнения Гинзбурга — Ландау. *Вычислительные технологии*. 2015; 20(3):46–57.
- [8] **Wang T.** Convergence of an eighth-order compact difference schemes for the nonlinear Schrödinger equation. *Advances in Numerical Analysis*. 2012; Article ID 913429.
- [9] **Паасонен В.И.** Классификация разностных схем максимально возможной точности на расширенных симметричных шаблонах для уравнения Шрёдингера и уравнения теплопроводности. *Сиб. журн. вычисл. математики*. 2020; 23(1):99–114.
- [10] **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** *Повышение точности решения разностных схем*. М.: Наука; 1979: 319.

## Improving the accuracy for numerical solutions of the Ginzburg — Landau equation

PAASONEN VIKTOR I.<sup>1,2,\*</sup>, FEDORUK MIKHAIL P.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center for Information and Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Paasonen Viktor I., e-mail: viki48@mail.ru

*Received July 1, 2020, revised July 10, 2020, accepted July 17, 2020*

### Abstract

Increasing the order of accuracy for difference methods is an actual problem in nonlinear fiber optics. Computations, which use higher than the fourth order of accuracy by the direct construction of complex circuits on extended templates pose the complication of the system matrix and difficulties in setting additional boundary conditions. In addition, with this approach, there is no simultaneous increase in accuracy for the evolutionary variable. In this paper, we consider an alternative way, namely, application of the Richardson extrapolation, which reduces to construction of suitable linear combinations for solutions on various grids. This method allows improving the order of accuracy for both variables, while avoiding problems associated with the complication of templates, implementation of algorithms and setting additional boundary conditions. Double corrections are also considered to further improve accuracy. The technique was tested on exact solutions of the Ginzburg — Landau equation.

*Keywords:* order of accuracy, Schrödinger equation, Ginzburg — Landau equation, Richardson extrapolation, Runge correction.

*Citation:* Paasonen V.I., Fedoruk M.P. Improving the accuracy for numerical solutions of the Ginzburg — Landau equation. Computational Technologies. 2020; 25(4):45–57. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.005. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant No. 20-11-20040).

### References

1. Akhmediev N.N., Afanasiev V.V. Singularities and special soliton solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg — Landau equation. Physical Review E. 1996; 53(1):1190–1201.
2. Agrawal G.P. Nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic Press; 2001: 446.
3. Mikeladze Sh.E. On the numerical integration of the equations of elliptic and parabolic types. Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika. 1941; 5(1):57–74. (In Russ.)
4. Xie S.-S., Li G.-X., Yi S. Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2009; (198):1052–1061.
5. Paasonen V.I., Fedoruk M.P. A compact dissipative scheme for nonlinear Schrödinger equation. Computational Technologies. 2011; 16(6):68–73. (In Russ.)
6. Paasonen V.I., Fedoruk M.P. A compact noniterative scheme with artificial dissipation for nonlinear Schrödinger equation. Computational Technologies. 2012; 17(3):83–90. (In Russ.)
7. Paasonen V.I., Fedoruk M.P. Three-level non-iterative high accuracy scheme for Ginzburg — Landau equation. Computational Technologies. 2015; 20(3):46–57. (In Russ.)
8. Wang T. Convergence of an eighth-order compact difference schemes for the nonlinear Schrödinger equation. Advances in Numerical Analysis. 2012; Article ID 913429.
9. Paasonen V.I. Classification of difference schemes of maximum possible accuracy on extended symmetric stencils for the Schrödinger equation and the heat transfer equation. Numerical Analysis and Applications. 2020; 13(1):82–94. DOI:10.1134/S1995423920010073.
10. Marchuk G.I., Shaydurov V.V. Povyshenie tochnosti resheniya raznostnykh skhem [Improving the accuracy of solutions of difference schemes]. Moscow: Nauka; 1979: 319. (In Russ.)