

МЕТОД НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНО СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. В. КОСТЮЧЕНКО

*Кибернетический центр Томского политехнического университета
Россия*

e-mail: meko@cc.tpu.edu.ru

A method of nonorthogonal functions is developed to solve a class of nonideally conjugate elliptic problems. The notation of nonideal conjugation conditions is modified. It allowed us to improve the method and develop the universal algorithm using the principle of the calculated domain decomposition into nonoverlapping subdomains. Sewing of solutions in the subdomains is carried out without iterations. Mathematical support is developed to solve problems with concentrated sources. Test problems are solved.

Краевые задачи для эллиптического оператора с разрывными коэффициентами описывают физические поля различной физической природы. К ним относятся поля температур в задачах теплопроводности, напоров и давлений в задачах стационарной фильтрации жидкости в пористой среде и т. д. Известно, что эти и многие другие прикладные задачи являются сопряженными и их решение, особенно для областей сложных конфигураций и различных условий сопряжения, представляет существенные, порой принципиальные, трудности. В постановках таких задач присутствуют не только условия идеального (условия четвертого рода), но и неидеального сопряжения решений вдоль границ разрыва коэффициентов оператора уравнений. О последних идет речь, когда в объектах математического моделирования присутствуют внутренние тонкие слои с аномальными свойствами или когда внутри исследуемых объектов имеются поверхности (границы) — источники или стоки поля.

Такие условия, например, необходимо учитывать при расчетах полей температур в объектах, элементы которых имеют различные теплофизические свойства с неидеальным тепловым контактом — термическим сопротивлением — между ними. Условия неидеального сопряжения необходимы также в случае, когда внутри исследуемого объекта происходят фазовые переходы: кипение, отвердевание, плавление, конденсация и другие процессы, связанные с поглощением или выделением тепла. Аналогичные проблемы имеют место при решении задач прикладной теории фильтрации жидкости в пористых средах. Так, неидеальное сопряжение имеет место в случае природных (например, тектонических) или

техногенных нарушений строения или фильтрационных свойств водо- и нефтеносных пластов, при наличии межпластовых перетоков по трещинам или “линзам” и т. д. “Неидеально” сопрягать решения краевых задач в подобластях необходимо в случаях формирования геологических карт при имеющихся нарушениях в строении недр. В этом случае строение и изменчивость параметров, характеризующих земную толщу, интерпретируются как некоторые потенциальные поля и описываются краевыми задачами для эллиптического уравнения.

Ниже будет показано, что и при решении “классических”, идеально сопряженных, краевых задач методом разделения по подобластям может возникнуть необходимость перехода к неидеально сопряженным задачам.

Проблемам развития методов, создания математического и программного обеспечения для решения неидеально сопряженных эллиптических задач, на наш взгляд, уделено недостаточное внимание [3, 6, 8, 9]. Поэтому разработка и развитие численных и численно-аналитических методов для решения таких задач остаются актуальными.

Одним из эффективных методов решения краевых задач показал себя метод разложения по неортогональным функциям [1, 7] — неортогональных рядов [4]. Метод имеет теоретическое обоснование, но для решения задач в кусочно-однородных областях даже с идеальным сопряжением практически не применялся.

В данной статье этот метод развит для решения класса неидеально сопряженных эллиптических задач. Применение модифицированной записи условий неидеального сопряжения позволило усовершенствовать метод и разработать достаточно универсальный алгоритм, использующий принцип разделения расчетной области на совокупность непересекающихся подобластей со сшивкой решений без каких-либо итераций.

1. Математическая постановка задачи

Пусть в пространстве R_n , $n = 2, 3$ некоторая многосвязная расчетная область Ω с границей $\partial\Omega$ определена совокупностью непересекающихся подобластей Ω_ν , таких, что $\Omega = \cup\Omega_\nu$ с границами $\partial\Omega_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$. И пусть в каждой из них поставлена краевая задача с уравнением

$$L_\nu [U_\nu(X)] = -G_\nu \operatorname{div}[\operatorname{grad}U_\nu(X)] = F_\nu(x), \quad X \in \Omega_\nu. \quad (1)$$

Искомое решение $U_\nu(X)$ в каждой из подобластей и во всей расчетной области должно находиться с учетом условий, заданных как на внешней границе $\partial\Omega_{\nu 0}$ расчетной области Ω , так и на внутренних границах $\partial\Omega_{\nu\mu}$, разделяющих смежные подобласти Ω_ν и Ω_μ с номерами ν, μ соответственно. Коэффициенты G_ν принимают в подобластях Ω_ν постоянные значения и претерпевают разрывы на границах $\Omega_{\nu\mu}$ раздела подобластей. Здесь $\partial\Omega_{\nu 0} = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_\nu$ — покрытие границы Ω , $F_\nu(X)$ — заданная функция.

На искомую функцию $U_\nu(X)$ на внешней границе $\partial\Omega_{\nu 0}$, в общем случае, накладываются условия I – III родов и смешанные. Они могут быть записаны единой формулой:

$$l_\nu U_\nu|_{\partial\Omega_{\nu 0}} = \left\{ A_\nu(Y) \frac{\partial U_\nu}{\partial n_\nu} + B_\nu(Y) U_\nu(X) \right\} \Big|_{\partial\Omega_{\nu 0}} = \Phi_\nu(Y), \quad Y \in \partial\Omega_{\nu 0}. \quad (2)$$

Здесь $A_\nu(Y)$, $B_\nu(Y)$ и $\Phi_\nu(Y)$ — известные кусочно-гладкие функции, n_ν — вектор внешней нормали к границе Ω_ν , l_ν — дифференциальный оператор краевых условий.

На границах $\partial\Omega_{\nu\mu} = \partial\Omega_\mu \cup \partial\Omega_\nu$ смежных подобластей Ω_ν и Ω_μ ($\nu, \mu = 1, m; \nu \neq \mu$) условия сопряжения могут быть записаны в общем виде:

$$\begin{aligned}
U_\nu(X)|_{\partial\Omega_{\nu\mu}} &= \left[U_\mu(X) + R(Y)G_\mu \frac{\partial U_\mu}{\partial n_\mu} \right] \Big|_{\partial\Omega_{\nu\mu}}, \\
G_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial n_\nu} \Big|_{\partial\Omega_{\nu\mu}} &= - G_\mu \frac{\partial U_\mu}{\partial n_\mu} \Big|_{\partial\Omega_{\nu\mu}} + Q(Y), \quad Y \in \partial\Omega_{\nu\mu}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Условия (3) определяют условия неидеального сопряжения решений U_ν и U_μ вдоль границ $\partial\Omega_{\nu\mu}$ подобластей Ω_ν и Ω_μ , являются обобщением известных условий четвертого рода, весьма распространенных в постановках задач для эллиптических уравнений, и задаются функциями $R(Y)$ и $Q(Y)$. В частности:

— при $R = 0$, $Q = 0$ это условия “идеального” сопряжения, они обеспечивают непрерывность решения U и его функции $G \frac{\partial U}{\partial n}$ вдоль границы $\partial\Omega_{\nu\mu}$;

— при $R \neq 0$, $Q = 0$ для решения U условия (3) определяют разрыв первого рода вдоль границы $\partial\Omega_{\nu\mu}$ и имеют физический смысл тонкого слоя — сопротивления;

— при $R = 0$, $Q \neq 0$ для производной $\frac{\partial U}{\partial n}$ условия (3) определяют разрыв второго рода вдоль границы $\Omega_{\nu\mu}$ и имеют смысл тонкого слоя — источника.

Известно, что решение U , удовлетворяющее уравнению (1) и краевым условиям (2)–(3), существует и оно единственно.

2. Модифицированные условия неидеального сопряжения и краевые условия для подобластей

Условия сопряжения в форме (3) не всегда удобны для построения универсальных алгоритмов. Поэтому запишем их в модифицированном “симметричном” виде, определяемом следующей леммой [5].

Лемма. Условия (3) и условия

$$\begin{aligned}
U_\nu + G_\nu \left(\frac{R}{2} + C \right) \frac{\partial U_\nu}{\partial n_\nu} - \frac{Q}{2} &= U_\mu + G_\mu \left(\frac{R}{2} - C \right) \frac{\partial U_\mu}{\partial n_\mu} + \frac{Q}{2}, \\
U_\nu + G_\nu \left(\frac{R}{2} - C \right) \frac{\partial U_\nu}{\partial n_\nu} + \frac{Q}{2} &= U_\mu + G_\mu \left(\frac{R}{2} + C \right) \frac{\partial U_\mu}{\partial n_\mu} - \frac{Q}{2}
\end{aligned} \tag{4}$$

для $Y \in \partial\Omega_{\nu\mu}$ эквивалентны, если $R(Y) \neq 0$ и $Q(Y) \neq 0$ одновременно, а a — константа, $a \neq 0$, $C \neq \pm \frac{R}{2}$.

Доказательство этого утверждения производится почленным сложением, вычитанием и последующим упрощением получаемых выражений.

Проведем необходимые для дальнейшего изложения преобразования. Известно, что решение U_ν задачи (1)–(3), линейной относительно входящих в нее переменных, может быть представлено в виде суперпозиции $U_\nu = V_\nu + W_\nu$, где $V_\nu(X)$, $W_\nu(X)$ — непрерывные дважды дифференцируемые в Ω_ν функции. Пусть $W_\nu(X)$ — одно из известных частных решений уравнения задачи, для которого по определению $L_\nu(W_\nu) \equiv F_\nu$. Отметим, что для рассматриваемого оператора L_ν и правых частей F_ν некоторых специальных видов частные решения W_ν могут быть записаны явно [1, ?].

В результате очевидных преобразований переходим к постановке задачи для новой искомой функции $V_\nu(X)$:

$$L_\nu V_\nu(X) = 0,$$

$$l_\nu V_\nu(X)|_{\partial\Omega_\nu} = \varphi_\nu(Y), \quad (5)$$

где

$$\varphi_\nu(Y) = \Phi_\nu(Y) - l_\nu W_\nu(X)|_{\partial\Omega_\nu}. \quad (6)$$

Для задачи (5) получим такой дифференциальный оператор l_ν и запишем такую функцию $\varphi_\nu(Y)$, которые, задавая краевые условия для решений $V_\nu(X)$ задач в подобластях по отдельности, априори обеспечивали бы выполнение условий (2)–(3) для решения $U(X)$ и решений $U_\nu(X)$ в составной расчетной области Ω . Предположим, что некоторая подобласть Ω_ν такова, что ее граница

$$\partial\Omega_\nu = \partial\Omega_{\nu 01} \cup \partial\Omega_{\nu 02} \cup \partial\Omega_{\nu 03} \cup \partial\Omega_{\nu\mu}.$$

На участках $\partial\Omega_{\nu 0i}$, $i = 1, 2, 3$ границы $\partial\Omega_\nu$ в результате преобразования (6) запишем условия первого, второго и третьего родов соответственно:

$$\begin{aligned} V_\nu(X)|_{\partial\Omega_{\nu 01}} &= \Phi_{\nu 01}(Y) - W_\nu|_{\partial\Omega_{\nu 01}} = \varphi_{\nu 01}(Y), \\ \left. \frac{\partial V_\nu(X)}{\partial n_\nu} \right|_{\partial\Omega_{\nu 02}} &= \Phi_{\nu 02}(Y) - \left. \frac{\partial W_\nu}{\partial n_\nu} \right|_{\partial\Omega_{\nu 02}} = \varphi_{\nu 02}(Y), \\ \left. \left\{ \frac{\partial V_\nu}{\partial n_\nu} + h_\nu V_\nu \right\} \right|_{\partial\Omega_{\nu 03}} &= \Phi_{\nu 03}(Y) - \left. \left\{ \frac{\partial W_\nu}{\partial n_\nu} + h_\nu W_\nu \right\} \right|_{\partial\Omega_{\nu 03}} = \varphi_{\nu 03}(Y). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\Phi_{\nu 0i}(Y)$ – заданные функции, $i = 1, 2, 3$.

На участке $\partial\Omega_{\nu\mu}$ границы $\partial\Omega_\nu$ аналогично запишем условия сопряжения в форме, определяемой Леммой (4), что обеспечит выполнение условий сопряжения (3):

$$\left. \left\{ \frac{\partial U_\nu}{\partial n_\nu} + \frac{U_\nu}{G_\nu \left(\frac{R}{2} + C \right)} \right\} \right|_{\partial\Omega_{\nu\mu}} = \left. \left\{ \frac{U_\mu + G_\mu \left(\frac{R}{2} - C \right) \frac{\partial U_\mu}{\partial n_\mu} + CQ}{G_\nu \left(\frac{R}{2} + C \right)} \right\} \right|_{\partial\Omega_{\nu\mu}} = \varphi_{\nu\mu}(Y)$$

или

$$\left. \left\{ \frac{\partial V_\nu}{\partial n_\nu} + \frac{V_\nu}{P_\nu} \right\} \right|_{\partial\Omega_{\nu\mu}} = \left. \left\{ \frac{V_\mu + G_\mu \left(\frac{R}{2} - C \right) \frac{\partial V_\mu}{\partial n_\mu} + CQ}{P_\nu} + S_\nu \right\} \right|_{\partial\Omega_{\nu\mu}}, \quad (8)$$

где

$$S_\nu = \frac{W_\mu + G_\mu \left(\frac{R}{2} - C \right) \frac{\partial W_\mu}{\partial n_\mu} - W_\nu}{P_\nu}, \quad P_\nu = G_\nu \left(\frac{R}{2} + C \right).$$

Очевидно, для задач в подобластях возможен произвольный набор из названных краевых условий.

Таким образом, из (7)–(8) следует, что дифференциальный оператор l_ν задачи (5) может быть записан в общем виде в форме условий (2), где кусочно-гладкие функции $A_\nu(Y)$ и $B_\nu(Y)$ принимают значения, соответствующие заданному типу условий (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Компоненты краевых условий для задач в подобластях

Тип условий	$A_\nu(Y) \frac{\partial V_\nu}{\partial n_\nu} + B_\nu(Y) V_\nu$		$\varphi_\nu(Y)$
	$A_\nu(Y)$	$B_\nu(Y)$	
I	0	1	$\varphi_{\nu 01}(Y)$
II	1	0	$\varphi_{\nu 02}(Y)$
III	1	h_ν	$\varphi_{\nu 03}(Y)$
IV	1	$\frac{1}{G_\nu \left(\frac{R}{2} + C \right)}$	$\varphi_{\nu \mu}(Y)$

Отметим, что переход от $\Phi_\nu(Y)$ к $\varphi_\nu(Y)$ по формуле (6) приводит, в общем случае, к $V_\nu(Y) \neq V_\mu(Y)$ и $G_\nu \frac{\partial V_\nu}{\partial n_\nu} \neq -G_\mu \frac{\partial V_\mu}{\partial n_\mu}$ даже при $R = 0$ и $Q = 0$, т. е. в результате перехода к однородным уравнениям задач (5) в подобластях получаем также некоторые неидеальные условия сопряжения.

3. Метод неортогональных рядов для задач с разрывными коэффициентами

Эффективность метода решения задачи (5)–(8) в кусочно-однородных расчетных областях сложной конфигурации определяется эффективностью метода решения задач в каждой из подобластей. Исходя из условий (8), метод решения, прежде всего, должен обеспечивать получение искомых функций $V_\mu(Y)$ и $\frac{\partial V_\mu}{\partial n_\mu}$ в аналитическом виде для точек $Y \in \partial\Omega_{\nu\mu}$, а также нахождения функции $V_\nu(X)$, $X \in \partial\Omega_\nu \cup \Omega_\nu$ с условиями (7)–(8). Переход от $V_\nu(X)$ к искомому решению $U_\nu(X)$, $X \in \partial\Omega_\nu \cup \Omega_\nu$ будем считать тривиальным. Поэтому целесообразно, чтобы метод позволял понижать размерность решаемой задачи при переходе от подобластей к их границам, при этом упрощая и обработку геометрической компоненты постановки краевой задачи. К таким методам относятся методы граничных интегральных уравнений, граничных элементов, метод Трефтца [10] и их модификации, одним из которых является метод неортогональных рядов [1].

3.1. Метод неортогональных рядов для задач в подобластях

Основная идея метода неортогональных рядов состоит в построении некоторой вспомогательной поверхности $\partial\Omega_{\nu*}$, описывающей $\partial\Omega_\nu \cup \Omega_\nu$ и не имеющей с ней общих точек, введении системы функций $\Psi_\nu = \Psi_\nu(Z_j, X)$ — фундаментальных решений оператора L_ν и поиске решения $V_\nu(X)$ задачи (5) в виде разложения:

$$V_\nu(X) = \sum_{j=1}^{p\nu} C_{j\nu} \Psi_\nu(Z_{j\nu}, X). \quad (9)$$

Здесь $\Psi_\nu(Z_j, X)$ — фундаментальные решения оператора L_ν , $Z_k \in \partial\Omega_{\nu*}$, $\{Z_k\} \notin \Omega_\nu \cup \partial\Omega_\nu$, $k = \overline{1, \infty}$ — всюду плотное на $\partial\Omega_{\nu*}$ множество точек, $C_{j\nu}$ — неизвестные коэффициенты, $p\nu$ — число аппроксимирующих функций. Для многосвязных областей Ω_ν необходимо построение нескольких поверхностей $\partial\Omega_{\nu*}$.

Известно [1, 7], что система функций Ψ_ν полна в классе функций ${}_2(\Omega_\nu)$ и линейно независима, т. е. при достаточно большом $p\nu$ разложение (9) может со сколь угодно высокой точностью аппроксимировать решение задачи в подобласти Ω_ν .

По определению, каждая функция Ψ_ν удовлетворяет однородному уравнению задачи (5). Разложение (9) также удовлетворяют уравнению $L(V_\nu) = 0$ при любом выборе постоянных $C_{j\nu}$. Их поиск производится исходя из условия наилучшего удовлетворения граничным условиям и минимизации функционала (10) для системы из m подобластей:

$$I = \left\| \sum_{\nu=1}^m \left\{ \varphi_\nu(Y) - \sum_{j=1}^{p\nu} [C_{j\nu} l_\nu(\Psi_\nu(Z_{j\nu}, Y))] \right\} \right\|_{\partial\Omega_\nu}^2, \quad (10)$$

Метод неортогональных рядов, использующий системы базисных функций Ψ_ν — фундаментальных решений, которые по определению удовлетворяют уравнению задачи, можно рассматривать как одну из модификаций метода Трэфтца.

Переход от функционала (10) к соответствующей системе линейных алгебраических уравнений $[A_{ij}] \cdot \{C_j\} = \{B_i\}$ может быть произведен, например, по методу наименьших квадратов или методу коллокаций. В результате решения системы уравнений находится вектор коэффициентов $\{C_j\}$. После их подстановки в (9) и перехода к искомой функции U_ν задача считается решенной.

3.2. Апостериорные оценки погрешностей численных решений

Возможность получения достоверных и объективных оценок точности решения краевых задач важна при использовании любого численного или численно-аналитического метода. В условиях, когда получение реальной априорной оценки погрешности численного решения получить чрезвычайно трудно, не меньшее значение приобретают апостериорные оценки, если, конечно, их получение возможно.

В методе неортогональных рядов основным источником погрешности решения задачи является погрешность аппроксимации краевых условий, что позволяет получать эффективную апостериорную оценку погрешности полученного численного решения задачи. В самом деле, для задачи в подобласти Ω_ν и краевых условий на внешней границе расчетной области $\partial\Omega = \cup\partial\Omega_{\nu 0}$ такую оценку дает невязка E_ν , вычисляемая для узлов $Y' \in \partial\Omega_\nu$, не совпадающих, в общем случае, с узлами Y :

$$E_\nu = \left\| \varphi_\nu(Y') - \sum_{j=1}^{p\nu} (C_{j\nu} \Psi_\nu(Z_{j\nu}, Y')) \right\|_{\partial\Omega_\nu}^2.$$

В соответствии с известным принципом максимума для гармонических функций [10] погрешность решения задачи в точках $X \in \Omega_\nu$ не может быть больше E_ν : $\leq E_\nu$.

Для условий сопряжения (8), а следовательно, и условий (3), аналогичную оценку дает невязка $T_{\nu\mu}$, вычисляемая для узлов $Y'' \in \partial\Omega_{\nu\mu}$, также не совпадающих с узлами Y :

$$T_{\nu\mu} = \left\| \varphi_{\nu\mu}(Y'') - \sum_{j=1}^{p\nu} \left\{ C_{j\nu} \left[\frac{\partial \Psi_\nu(Z_{j\nu}, Y'')}{\partial n_\nu} + \frac{\Psi_\nu(Z_{j\nu}, Y'')}{P_\nu} \right] \right\} \right\|_{\partial\Omega_{\nu\mu}}^2.$$

Все используемые здесь обозначения описаны выше.

Таким образом, невязки E_ν и $T_{\nu\mu}$, вычисленные для всех подобластей с номерами, $\nu, \mu = 1, m$; $\nu \neq \mu$ в совокупности дают эффективную апостериорную оценку погрешности решения задачи (1)–(3).

3.3. Обработка геометрической информации и аналитические компоненты метода

Основными аналитическими компонентами, применяемыми в данной реализации метода неортогональных функций, являются частные решения $W_\nu(X)$, фундаментальные решения $\Psi_\nu(Z_{j\nu}, X)$ и производные от них по нормали к границе $\partial\Omega_\nu$: $\frac{W_\nu(X)}{\partial n_\nu}$, $\frac{\Psi_\nu(Z_{j\nu}, X)}{\partial n_\nu}$ в точках $Y \in \partial\Omega_\nu$, а также кусочно-гладкие функции $A(Y)$, $B(Y)$, $R(Y)$, $Q(Y)$, $h_\nu(Y)$, $\varphi_{\nu 0i}(Y)$, где $i = 1, 2, 3$.

Формирование и использование этих компонент при численной реализации метода связано с общей проблемой обработки геометрической информации о форме расчетных областей и их границ при решении краевых задач математической физики. Вероятно, с наиболее общих позиций эту проблему удастся решить при применении конструктивных средств теории R -функций [11].

Эти средства позволяют построить такие аналитические описания $\omega_\nu(X)$ подобластей Ω_ν , что $\Omega_\nu = [\omega_\nu(X) \geq 0]$, $\omega_\nu \in C_m(\Omega)$ и $\omega_\nu(X) = 0$ — уравнение $\partial\Omega_\nu$. Отдельные фрагменты границ $\partial\Omega_{\nu k}$, имеющие аналитическое описание, используются здесь в качестве элементарных функций. Из этих фрагментов нетрудно сконструировать также и такие аналитические функции — описания элементов границ $\partial\Omega_{\nu i}$, вдоль которых функции $A(Y)$, $B(Y)$, $R(Y)$, $Q(Y)$, $h_\nu(Y)$, $\varphi_{\nu 0i}(Y)$ сохраняют значения в классе ${}_1(\Omega_\nu)$. Тогда “склейка” значений этих функций, заданных на участках $\partial\Omega_{\nu i}$ границы $\partial\Omega_\nu = \cup \partial\Omega_{\nu i}$, $i = \overline{1, l}$, и продолжение их внутрь расчетной области Ω_ν могут быть произведены, например, по формуле

$$\Phi = \frac{\sum_{i=1}^l f_i \tau_i}{\sum_{i=1}^l \tau_i}, \quad (11)$$

где $\tau_i = 1/\omega_{\nu i}$, $\omega_{\nu i}(X) = 0$ — уравнения элементов границ, на которых заданы значения функции f_i .

Имея уравнение подобласти Ω_ν , нетрудно вычислить производную от некоторой аналитической функции по внешней нормали к границе $\partial\Omega_\nu$:

$$\frac{\partial f}{\partial n_\nu} = -\text{grad}(f)\text{grad}(w_\nu).$$

В качестве функции f здесь могут использоваться $\Psi(X, Y_j)$ — фундаментальное решение или их суперпозиция и $W_\nu(X, Y)$ — одно из частных решений оператора L_ν .

Для двухмерной расчетной области и L_ν — оператора Лапласа известное фундаментальное решение $\Psi(X, Y_j) = L_n(R)/(2 * \pi)$, где $R = \sum((x_i - z_{ji}) \cdot (x_i - z_{ji}))$, суммирование по $i = 1, 2$, а

$$\text{grad}\Psi((X, Y_j)) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} i + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} j = -[(x_1 - y_{1j})/Ri + (x_2 - y_{2j})/Rj].$$

Для решения класса прикладных задач нам потребуется частное решение $W_\nu(X)$ для F_ν — суперпозиции δ -функций — точечных источников поля $U(X)$, каждый из которых имеет удельную мощность Q_i , $i = \overline{1, t}$:

$$F_\nu = - \sum_{i=1}^t Q_i \delta(X - X_i).$$

По определению, фундаментальное решение $\Psi_\nu(X, Y)$ дифференциального оператора L_ν — это функция, для которой $L_\nu \Psi_\nu(X, Y) = \delta(X - Y)$. Поэтому, если правая часть F_ν уравнения (1) представлена дельта-функцией, т. е. является точечным источником поля U , то фундаментальное решение само является одним из частных решений оператора L_ν :

$$W_\nu(X, Y) = \Psi_\nu(X - Y).$$

Очевидно, суперпозиция фундаментальных решений также является частным решением для правой части, представимой в виде суперпозиции дельта-функций:

$$L_\nu[W_\nu(X, Y)] = \sum_{j=1}^t Q_j \delta(X - Y_j), \text{ где } W_\nu(X, Y) = \sum_{j=1}^t Q_j \Psi(X - Y_j).$$

Эти частные решения будут использованы при решении сингулярно возмущенной краевой задачи с сосредоточенными источниками.

4. Результаты вычислительных экспериментов

4.1. Результаты решения тестовой задачи

В качестве тестовой рассматривалась задача для уравнения Лапласа в сечении бесконечной двухслойной трубы с заданными условиями Дирихле (первого рода) на внутренней и внешней поверхностях. Радиусы внутренней трубы: $r_1 = 1.0$ и $r_2 = 1.5$; внешней — $r_2 = 1.5$ и $r_3 = 2.0$. Краевые условия: $U(r_1) = -\ln 2.0/2 = -0.3466$, $U(r_3) = 0.0$. Параметры G_1 , G_2 , R , Q — см. (1)–(3) — считались известными. Для случая $R = 0$, $Q = 0$ известно аналитическое решение задачи. Решения задачи для различных значений параметров G_1 , G_2 , R , Q приведены в табл. 2.

Результаты получены при следующих параметрах: $\nu = 1$, число аппроксимирующих функций для каждой из подобластей $n_\nu = 20$, $\nu = 1, 2$, число узлов коллокации на каждой из границ 10. Вспомогательные границы $\partial\Omega_\nu^*$ — для каждой из подобластей по две окружности радиусов $r_{1^*} = 0,3$ и $r_{2^*} = 10,0$. Узлы коллокации и узлы на вспомогательных границах $\partial\Omega_\nu^*$ размещались равномерно. Поиск коэффициентов $C_{j\nu}$ разложения (9) при минимизации функционала (10) производился методом наименьших квадратов. Результаты вычислительных экспериментов подтвердили корректность разработанного математического обеспечения и работоспособность алгоритмов. В частности, относительная ошибка решения тестовой задачи в сравнении с аналитическим решением (см. табл. 2), $N = 1 - 8$ — менее 0,0001 %, что подтверждает хорошие аппроксимационные свойства систем фундаментальных решений и эффективность получаемых апостериорных оценок. Эти оценки использованы при анализе погрешностей решения задачи при неидеальном сопряжении решений в подобластях $N = 9 - 16$.

4.2. Расчет поля давлений в нефтяном пласте с системой скважин

Разработанное и описанное выше математическое и программное обеспечение было апробировано при решении задач расчета поля пластовых давлений в кусочно-однородном нефтяном пласте с системой нагнетательных и нефтяных скважин. Поле пластовых давлений описывается уравнением Пуассона с правой частью в виде суперпозиции дельта-функций — точечных источников процесса фильтрации. Расчетная область составлена из двух подобластей Ω_1 и Ω_2 с гидропроводностями G_1 и G_2 соответственно. Подобласти

Т а б л и ц а 2

Результаты решения тестовой задачи при различных параметрах

N	R	Q	G ₁	G ₂	Ω _ν	r	Численное решение				Точное решение	
							E _ν / U _ν	T _{νμ} / U _ν	U _ν	∂U _ν /∂n _ν	U	∂U _ν /∂n _ν
1	0.0	0.0	1.0	1.0	1	1.0	10 ⁻⁶	—	-0.3466	-0.500	-0.3466	-0.500
2						1.5	—	10 ⁻⁹	-0.1438	0.333	-0.1438	0.333
3					2	1.5	—	10 ⁻⁹	-0.1438	-0,333	-0,1438	-0,333
4						2.0	10 ⁻⁴	—	0.0000	0.250	0.0000	0.250
5	0.0	0.0	1.0	10.0	1	1.0	10 ⁻⁴	—	-0.3466	-0.798	-0.3466	-0.798
6						1.5	—	10 ⁻⁵	-0.0230	0.532	-0.0230	0.532
7					2	1.5	—	10 ⁻⁶	-0.0230	-0.0532	-0.0230	-0.0532
8						2.0	10 ⁻⁷	—	0.0000	0.0399	0.0000	0.0399
9	1.0	0.0	1.0	10.0	1	1.0	10 ⁻⁵	—	-0.3466	-0.315	—	—
10						1.5	—	10 ⁻⁵	-0.2189	0.210	—	—
11					2	1.5	—	10 ⁻⁶	-0.0091	-0.0211	—	—
12						2.0	10 ⁻⁸	—	0.0000	0.0157	—	—
13	0.0	1.0	1.0	10.0	1	1.0	10 ⁻⁴	—	-0.3466	-0.898	—	—
14						1.5	—	10 ⁻⁴	0.0173	0.598	—	—
15					2	1.5	—	10 ⁻⁵	0.0173	0.0402	—	—
16						2.0	10 ⁻⁷	—	0.0000	-0.0301	—	—

имеют общую границу $\partial\Omega_{12}$. Конфигурация расчетной области и схема расположения 17 нагнетательных и 18 нефтяных скважин приведены на рис. 1. Все расстояния и размеры указаны в километрах. На внешних границах $\partial\Omega_{01}$ и $\partial\Omega_{02}$ заданы условия первого рода $U = 15$ МПа. Среднесуточные дебиты нагнетательных скважин $+0.008$ м³/с, нефтяных -0.003 м³/с. Условия сопряжения решений U_1 и U_2 в подобластях Ω_1 и Ω_2 вдоль границы $\partial\Omega_{12}$ имеют вид (3). Параметры R и Q определяют “идеальность” и “неидеальность” сопряжения решений.

Вариантные расчеты проводились при различных значениях параметров G_1 , G_2 , R и Q . Результаты некоторых вычислительных экспериментов приведены на рис. 2–4. На рис. 2 показано расчетное поле давлений в однородном нефтяном пласте с идеальными условиями сопряжения вдоль границы $\partial\Omega_{12}$ ($R = 0, Q = 0$). Здесь гидропроводности подобластей $G_1 = G_2 = 0.001$ км³/МПа/с. Такие значения гидропроводностей соответствуют проницаемости пласта 0.5 мкм², вязкости нефти 5 МПа·с, толщине пласта 10 м. На рис. 3 показано расчетное поле для вариантов $R = 10, Q = 0$ и $R = 0, Q = 10$, на рис. 4 — расчетное поле для составных условий сшивки на границе $\partial\Omega_{12}$ и кусочно-однородной расчетной области с соотношением $G_1/G_2 = 2$. На всех рисунках идеальные и неидеальные условия сопряжения прослеживаются по характеру прохождения и разрывам линий равных значений пластовых давлений при согласовании с физическим смыслом этих условий.

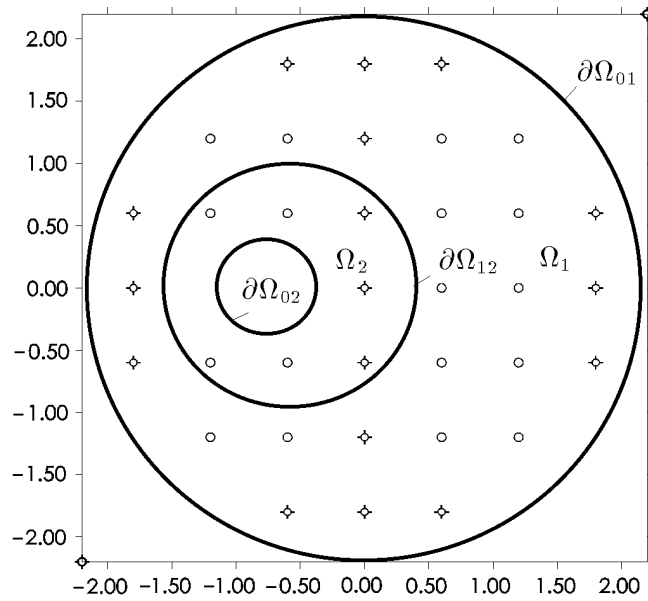


Рис. 1. Конфигурация расчетной области для задачи расчета поля пластовых давлений в кусочно-однородном нефтяном пласте с системой нефтяных (○) и нагнетательных (×) скважин.

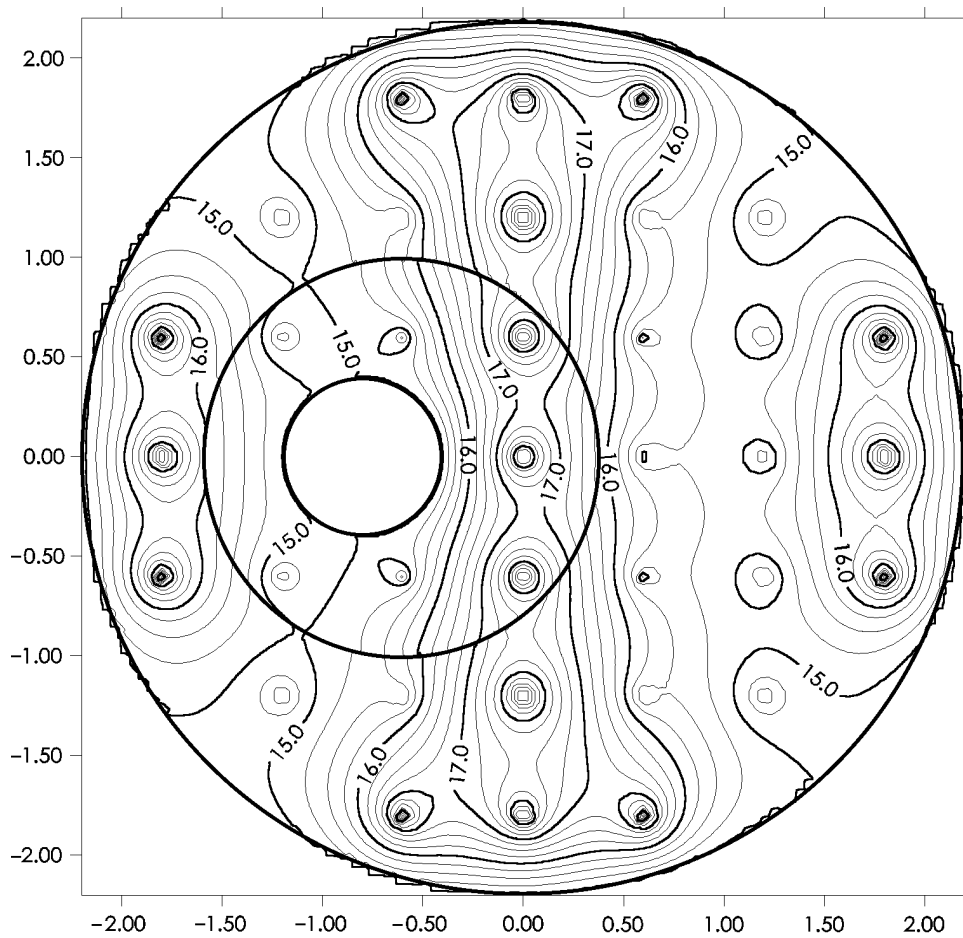


Рис. 2. Поле пластовых давлений в однородном нефтяном пласте с системой скважин. На внутренней границе заданы условия идеального сопряжения: $R = 0$, $Q = 0$.

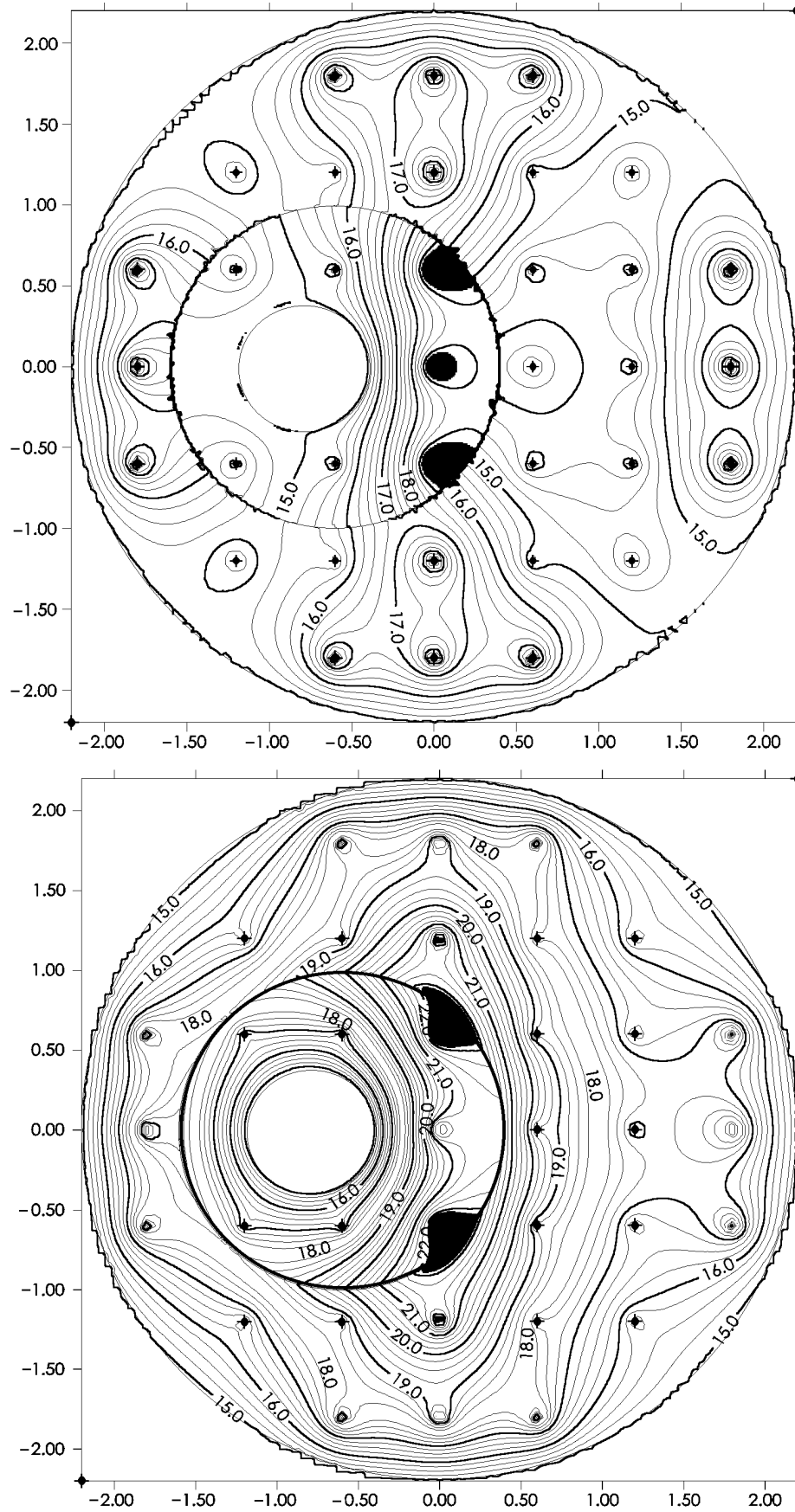


Рис. 3. Поле пластовых давлений в однородном нефтяном пласте с системой скважин. На внутренней границе заданы условия неидеального сопряжения: $R = 10.0$, $Q = 0$ (вверху); $Q = 10.0$, $R = 0$ (внизу).

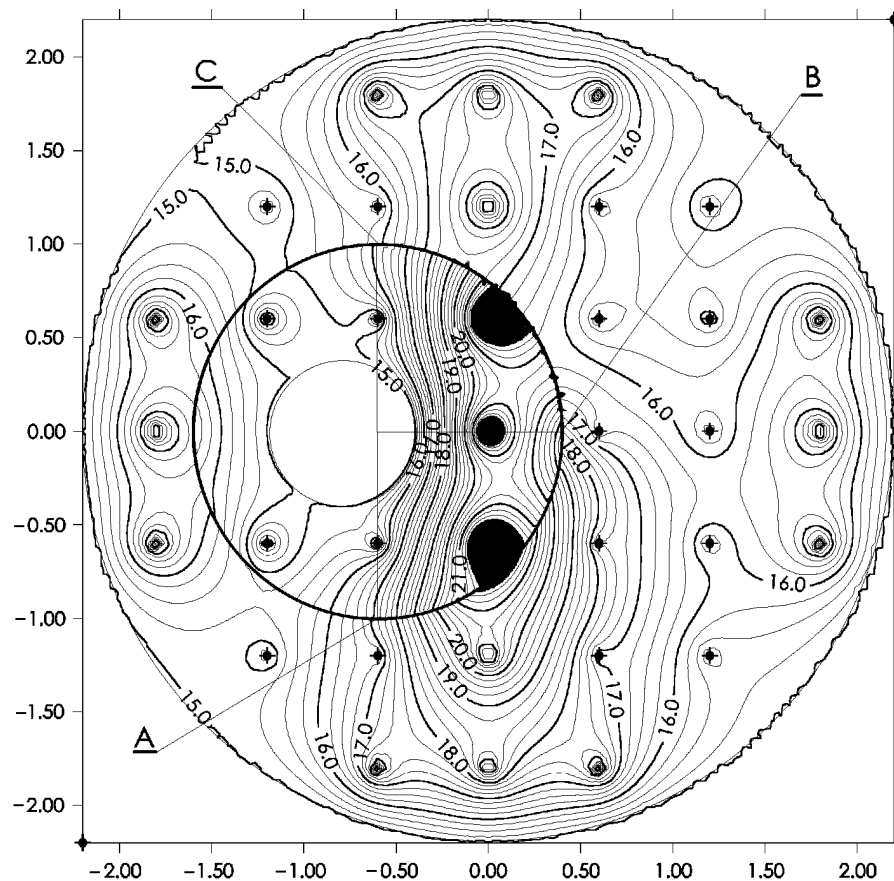


Рис. 4. Поле пластовых давлений в кусочно-однородном нефтяном пласте с 17 нагнетательными и 18 нефтяными скважинами.

Соотношение гидропроводностей подобластей $G_1/G_2 = 2$. На внутренней границе ABCD заданы смешанные условия сопряжения: на дуге AC — идеальное сопряжение подобластей: $R = 0$, $Q = 0$; на AB — неидеальное сопряжение: $R = 0$, $Q = -20 \cos(f) \sin(f)$, $270^\circ < f < 360^\circ$; на BC — неидеальное сопряжение: $Q = 0$, $R = 20 \cos(f) \sin(f)$, $0^\circ < f < 90^\circ$.

Все результаты получены при разложении решений в подобластях по 60 базисным функциям для каждой из подобластей. В качестве базисных функций использовались фундаментальные решения оператора Лапласа — $\ln 1/R$. Полюса фундаментальных решений размещались на окружностях: для Ω_1 — $R_1 = 0.45$ и $R_2 = 3.5$ с центрами в точках $(-0.6, 0.0)$ и $(0.0, 0.0)$; для Ω_2 — $R_1 = 0.25$ и $R_2 = 1.3$ с центрами $(-0.8, 0.0)$ и $(-0.6, 0.0)$ соответственно. Такой выбор базисных функций обеспечил приемлемые значения невязок $E_\nu, T_{\nu\mu}$.

5. Заключение

В данной работе метод неортогональных функций развит для решения класса неидеально сопряженных эллиптических задач в кусочно-однородных расчетных областях. Существенное развитие метода удалось произвести при использовании модифицированной записи условий неидеального сопряжения решений в подобластях. Разработанный универсальный алгоритм использует принцип декомпозиции расчетной области на непересекающиеся подобласти. Сшивка решений в подобластях производится без каких-либо итераций. Разработано также математическое обеспечение для решения задач с сосредоточенными

источниками в правой части уравнений. Решены тестовые задачи.

За рамками статьи остались некоторые проблемы, свойственные методу неортогональных рядов: трудности обработки плотно заполненных плохо обусловленных матриц, неоднозначность размещения полюсов фундаментальных решений — базисных функций и другие. Однако, как показала практика, многие из этих проблем успешно преодолеваются в результате проведения эффективных апостериорных оценок получаемых численных решений и минимизации соответствующих невязок.

Список литературы

- [1] АЛЕКСИДЗЕ М. А. *Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям*. Наука, М., 1978.
- [2] БУТКОВСКИЙ А. Г. *Характеристики систем с распределенными параметрами: Справ. пособие*. Наука, М., 1979.
- [3] КАРТАШОВ Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. Высш. шк., М., 1985.
- [4] КОБЫЛЯНСКИЙ Ю. В., ПОПКОВА Т. Л., СЛЕПЯН Г. Я. О методе неортогональных рядов для численного решения задач математической физики. *ЖВМиМФ*, **28**, №2, 1988, 237–246.
- [5] КОСТЮЧЕНКО С. В. *Математическое и программное обеспечение для решения задач пространственно-распределенной стационарной диффузии и теплообмена методом композиции*. Дис. ... канд. техн. наук. Томск, 1987.
- [6] КУЗНЕЦОВ С. Б. Алгоритм решения квазилинейных эллиптических уравнений в областях с источниками на внутренних границах. Новосибирск, Изд. ВЦ СО АН СССР, *Препринт №476*, 1983, 21 с.
- [7] КУПРАДЗЕ В. Д. О приближенном решении задач математической физики. *Усп. матем. наук*, 1967, **22**, №2 (134), 59–107.
- [8] ЛАРДЖЕР Т. И. Приближенные решения задач переноса тепла при наличии фазовых превращений. *Ракетная техника и космонавтика*, 1967, №11.
- [9] МАКАРОВ А. М., РОМАНОВСКИЙ В. Р. О неидеально сопряженной задаче теплопроводности. *Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт*, 1981, №5, 130–137.
- [10] МИХЛИН С. Г. *Вариационные методы в математической физике*. Наука, М., 1970.
- [11] РВАЧЕВ В. Л. *Теория R-функций и некоторые ее приложения*. Наук. думка, Киев, 1982.

Поступила в редакцию 20 декабря 1998 г.