

---

## ЮБИЛЕЙ

---

# К 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко\*

Ю. И. Шокин

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,  
630090, Новосибирск, Россия

Контактный автор: Шокин Юрий Иванович, e-mail: shokin@ict.nsc.ru

*Поступила 20 января 2021 г.*



Николай Николаевич Яненко был ученым с очень широким диапазоном интересов. Начав свою научную деятельность в области геометрии, где были получены значительные результаты, он внес большой вклад в развитие новых направлений математики, связанных с вычислительными системами и приложениями. Среди специалистов по прикладной математике, механике и главных конструкторов он имел высочайший авторитет. Результаты его исследований получили высокую оценку и у зарубежных коллег.

Николай Николаевич родился 22 мая 1921 года в городе Каинске (ныне г. Куйбышев Новосибирской области) в семье Николая Павловича Яненко и Натальи Борисовны Черненькой. В 1923 году семья переехала в Новосибирск (в те годы его еще по старинке именовали Новониколаевском). В 1927 году Николая Павловича Яненко советская власть направила на работу по коллективизации в г. Семипалатинск, там он вскоре умер от тифа.

---

\*Настоящий материал является переработанной версией статьи “К 85-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко”. Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, специальный выпуск, часть 1.

В 1939 году Николай Николаевич поступил учиться в Томский государственный университет, который окончил летом 1942 года с отличием, получив специальность “учитель математики”. По распределению он поехал работать в село Северное, но его учительская работа продолжалась только два дня: он был призван в армию и после недолгого обучения уже в ноябре оказался на Ленинградском фронте.

Демобилизовался Николай Николаевич в 1946 году, став первым послевоенным аспирантом профессора П.К. Рашевского, с которым познакомился еще в Томске и с которым активно переписывался в конце войны, задумываясь о мирной жизни и о возвращении в математику.

## Исследования в геометрии

Путь Н.Н. Яненко-математика начался в одном из самых абстрактных разделов науки — в дифференциальной топологии. Как ученый Николай Николаевич сформировался под влиянием своего учителя — профессора Рашевского. Темой исследований Н.Н. Яненко стала классическая проблема дифференциальной геометрии — проблема изгибаемости поверхностей. Ее основные положения — признаки изгибаемости поверхностей в  $n$ -мерном евклидовом пространстве — сформулированы Э. Картаном. Его метод, сложный и труднодоступный, в деталях был знаком немногим специалистам-геометрам. Николай Николаевич овладел им в совершенстве.

В 1939 году Аллендорфер, исследуя общие вопросы вложения римановых метрик в многомерные евклидовы пространства, ввел в рассмотрение некоторый арифметический инвариант поверхности, называемый типом, играющий большую роль при исследовании вопросов об изгибании поверхностей. Определение Аллендорфера было чисто аналитическим, и геометрическая структура поверхностей малого типа оставалось неяс-



Группа студентов Томского университета.  
Н.Н. Яненко — второй слева в верхнем ряду (1939 год)

ной. Н.Н. Яненко удалось установить геометрические характеристики таких поверхностей. Им было сформулировано понятие бесконечно малого изгиба как бесконечно малой деформации многомерной поверхности (аналогично трехмерному случаю). Но в многомерном пространстве не всякая поверхность допускает бесконечно малое изгибание. Н.Н. Яненко показал, что наличие бесконечно малого изгиба является проективно инвариантной характеристикой непрерывно изгибаемых поверхностей, составляя естественную грань, отделяющую проективные признаки изгиба от непроективных. Тем самым между бесконечно малыми и конечными изгибаниями была установлена определенная связь.

Результаты исследований Николая Николаевича, изложенные в его кандидатской (1949) и докторской (1954) диссертациях, позволили дать законченную теорию признаков изгиба, что после основополагающих работ Картана, Томаса и Аллендорфера, по сути, завершило развитие этого направления дифференциальной геометрии.

Геометрию Н.Н. Яненко любил всегда, но представляется, что он сознательно прекратил ею заниматься. Вместе с тем в последующих работах Николая Николаевича всегда можно увидеть влияние геометрии, будь это исследования по дифференциальным уравнениям в частных производных или работы по теории разностных схем. Он часто стремился “геометрически” пояснить те или иные рассуждения. В курсе лекций для ФМШ и в курсе численного анализа также много внимания уделено геометрической трактовке и пояснениям соответствующих определений и теорем.

## Прикладная математика

В 1948 году в научной биографии Николая Николаевича произошло событие, отразившееся на всей его дальнейшей жизни. В группе академика А.Н. Тихонова он начал работать над новыми прикладными задачами. Это была эпоха решения ядерных и ракетных проблем страны — легендарные времена становления нашей современной прикладной и вычислительной математики. Все области науки прямо или косвенно получили новые идеи, методы, пути развития. В это время сформировались крупнейшие ученые, создавшие в итоге свои школы и определившие судьбу нескольких поколений своих учеников и последователей. Требовалось решить сложнейшие научно-технические задачи в сжатые сроки. Это могли сделать только специалисты высокого класса.

Ряд идей и методов из геометрии пригодился и в приложениях. Как я отмечал, исследования Николая Николаевича по геометрии были связаны с изучением систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих свойства геометрических объектов. Изучением нелинейных дифференциальных уравнений и их решений Николай Николаевич продолжал заниматься и далее, однако новой областью приложений стали механика, физика. Это один из редких случаев, когда абстрактный математик, геометр смог быстро и высокопрофессионально войти в неизвестные ему разделы науки и добиться значительных результатов.

## Дифференциальные уравнения

Уравнения в частных производных являются одними из самых распространенных и эффективных средств описания сложных физических процессов. Каждому индивидуальному решению системы дифференциальных уравнений соответствует конкретное физическое состояние или процесс. Идеальным явилось бы единое аналитическое пред-

ставление всех решений системы дифференциальных уравнений. Однако это возможно лишь в частных случаях. Общее решение, как правило, выражается через частные решения, методы нахождения которых поэтому представляют большой интерес. Кроме того, частные решения являются хорошими тестами для проверки вычислительных алгоритмов. Один из общих методов выделения частных решений систем дифференциальных уравнений — это метод дифференциальных связей, идея которого была высказана Н.Н. Яненко на IV Всесоюзном математическом съезде. Из предшествующих работ идейно близки к этому методу исследования Гурса.

В методе дифференциальных связей выделение частных решений осуществляется путем присоединения к основной системе дополнительных дифференциальных соотношений (связей). Полученная таким образом переопределенная система уравнений исследуется на совместность. В ходе анализа система дополняется новыми дифференциальными соотношениями до приведения ее либо к инволюции, либо к противоречию. Как правило, искать решения расширенной системы легче, чем исходной.

С помощью метода дифференциальных связей удалось решить ряд одномерных и многомерных задач механики сплошной среды. Здесь следует отметить, в первую очередь, результаты А.Ф. Сидорова, В.А. Сучкова, Ю.Я. Погодина, В.Е. Распопова, В.П. Шапеева, В.М. Фомина, С.В. Мелешко, А.Е. Жижина и их учеников. Основные результаты по применению метода обобщены в совместной монографии Николая Николаевича с А.Ф. Сидоровым и В.П. Шапеевым. В области дифференциальных уравнений Николаем Николаевичем опубликовано свыше 50 работ, в том числе четыре монографии.

Особо стоит остановиться на двух монографиях, написанных совместно с Б.Л. Рождественским, под названием “Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике”, опубликованных в 1968 и 1978 годах. Я не рассматриваю вторую книгу как просто повторное издание. Монография 1968 года была существенно переработана и дополнена. В этих книгах подытожены многолетние исследования советских



Н.Н. Яненко (третий слева в верхнем ряду) среди аспирантов математического факультета Московского государственного университета (1947–1948 гг.)

и иностранных ученых в теории систем квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа, приведены результаты изучения как классических (непрерывных), так и обобщенных (разрывных) решений систем дифференциальных уравнений, в том числе газовой динамики. Эти монографии получили мировое признание, они являются настольными книгами у специалистов в области прикладной математики и механики.

Теория дифференциальных уравнений всегда была под особым вниманием Николая Николаевича как сама по себе, так и в связи с проблемами, вытекающими из потребностей вычислительной и прикладной математики и, прежде всего, в связи с вопросами реализации математических моделей численными методами. Так, при решении задач гидродинамики несжимаемой жидкости, описываемых с помощью уравнений Навье – Стокса, не являющихся системой типа Коши – Ковалевской, возникают серьезные проблемы с построением удобного численного алгоритма. В 1965 году Яненко высказал идею аппроксимации этих уравнений системой уравнений с малым параметром  $\varepsilon$ , описывающей движение слабосжимаемой жидкости. Полученная система дифференциальных уравнений является уже эволюционной, и к ней можно применять хорошо зарекомендовавшие себя численные алгоритмы (год спустя Н.Н. Яненко и Б.Г. Кузнецов разработали и опубликовали один из экономичных алгоритмов, основанный на методе дробных шагов). Идея слабой сжимаемости оказалась весьма плодотворной и инициировала новое направление исследований как у нас в стране, так и за рубежом (в частности, во Франции в школе профессора Ж. Лионса). Среди учеников Н.Н. Яненко в этом направлении успешно работали Ю.Я. Белов, З.Г. Гегечкори, Г.В. Демидов, С.А. Кантор, Ш. Смагулов, В.А. Новиков и др.

## Метод дробных шагов

Центральное место в научной деятельности Н.Н. Яненко занимали исследования по численным методам математической физики, начатые им в 1949 году. В этой области им опубликовано свыше 150 работ.

Главным достижением Н.Н. Яненко в вычислительной математике является создание метода дробных шагов. Это метод построения экономичных (в смысле числа операций) конечно-разностных схем для решения дифференциальных уравнений. В конце 1950-х годов возникла острая необходимость в создании таких методов для решения сложных многомерных систем уравнений в частных производных.

При увеличении размерности задачи число операций для получения численного решения растет вследствие увеличения как числа точек, так и логических трудностей составления программ расчета. Для системы дифференциальных уравнений в многомерном случае обычные разностные схемы становятся неэффективными. Они требуют либо слишком мелкого шага по времени, либо очень большого числа операций для перехода с одного слоя на другой. Решение проблемы найдено в различных способах редукции сложной задачи к набору более простых, а на первом этапе исследования используется замена многомерной дифференциальной задачи последовательностью одномерных задач. В работах по развитию и обоснованию методов расщепления участвовали многие ныне хорошо известные математики-вычислители Сибирского отделения АН СССР: Н.Н. Яненко, Г.И. Марчук, С.К. Годунов, В.П. Ильин, А.Н. Коновалов, Б.Г. Кузнецов, Ю.Е. Бояринцев, Г.В. Демидов, В.М. Ковеня, В.В. Пененко и их ученики.

Первая схема расщепления описана в статье К.А. Багриновского и С.К. Годунова (1957). Эта разностная схема аппроксимирует явным образом гиперболическую систему уравнений. Неявная схема расщепления по пространственным переменным для уравнения теплопроводности появилась два года спустя в работе Н.Н. Яненко. Это была первая экономичная абсолютно устойчивая разностная схема, аппроксимирующая на целом шаге многомерное уравнение, для реализации которой требовались лишь скалярные трехточечные прогонки.

Развитие методов расщепления значительно обогатило теорию разностных схем. Н.Н. Яненко ввел обобщающие понятия суммарной аппроксимации и слабой аппроксимации многомерного уравнения системой одномерных уравнений, послужившие теоретическим обоснованием метода. Это привело к пониманию и формулировке новых видов расщепления не только по независимым переменным, но и по различным физическим процессам, отдельным членам дифференциальных и разностных уравнений. Введение физического, аналитического и геометрического расщепления позволило рассмотреть с единой точки зрения различные классы разностных схем и легло в основу построения экономичных схем, оказавшихся мощным инструментом решения по-настоящему сложных, практически значимых задач гидроаэродинамики, метеорологии и других разделов математической физики.

Первые работы Н.Н. Яненко, его коллег и учеников (Н.Н. Анучиной, В.А. Сучкова, Ю.А. Погодина, Ю.Е. Бояринцева, В.Е. Неуважаева, В.Д. Фролова, Б.Г. Кузнецова, Г.В. Демидова), посвященные методу дробных шагов, инициировали шлейф исследований, связанных как с теоретическими аспектами построения разностных алгоритмов, так и с их применением к различным прикладным проблемам.

Первый десятилетний цикл работ обобщен Николаем Николаевичем в монографии «Метод дробных шагов», которая мгновенно была переведена на английский, французский и немецкий языки и также стала у нас в стране настольной книгой вычислителей, определившей многие направления исследований в последующие годы. И сейчас, по прошествии почти полувека, эта монография имеет высокий индекс цитирования. В ней содержатся не только оригинальные результаты Н.Н. Яненко, но и результаты его коллег и учеников: Г.И. Марчука, А.Н. Коновалова, Б.Г. Кузнецова, В.П. Ильина, Ю.Е. Бояринцева, Г.В. Демидова и др. В книге описаны методы расщепления для гиперболических, параболических, эллиптических, интегродифференциальных и некоторых других уравнений, а также даны приложения к задачам упругости, метеорологии, гидродинамики. В последних главах монографии приведены общие формулировки метода дробных шагов. С общей точки зрения Н.Н. Яненко проанализировал такие методы, как метод приближенной факторизации оператора, метод стационарирования, методы стабилизирующей и аппроксимационной поправок, методы типа предиктор-корректор.

Впоследствии идеи и методы расщепления для различных задач естествознания разрабатывались и применялись многими вычислителями во всем мире.

## Метод слабой аппроксимации

Следует особо отметить вклад Н.Н. Яненко в развитие теории разностных схем. Несомненно, к важнейшим достижениям следует отнести теоретическое обоснование метода расщепления, который удалось представить как слабую аппроксимацию исходного дифференциального уравнения некоторым другим, более простым. Остановимся на этом вопросе подробнее и сформулируем суть *метода слабой аппроксимации* (МСА).

Рассмотрим в банаховом пространстве задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = f(t), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (1)$$

$$L(t) = \sum_{i=1}^m L_i(t),$$

где  $L(t)$  и  $L_i(t)$  — операторы, действующие из банахова пространства  $B$  в  $B$  при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$ . Предполагается, что операторы  $L_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , имеют более простую структуру по сравнению с оператором  $L(t)$ . Наряду с задачей (1) рассмотрим задачу

$$\frac{du_\tau}{dt} + L_\tau(t)u_\tau = f(t), \quad u_\tau|_{t=0} = u_0. \quad (2)$$

Здесь

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_{i,\tau}(t)L_i(t),$$

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & \text{если } \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Коэффициенты  $\alpha_{i,\tau}(t)$  слабо аппроксимируют единицу в том смысле, что

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \alpha_{i,\tau}(\theta) d\theta = 1.$$

Говорят, что оператор  $L_i(t)$  слабо аппроксимирует оператор  $L(t)$ .

Задачу (2) естественно называть расщеплением задачи (1). При этом в правой части уравнения (2) вместо функции  $f$  можно брать функцию  $f_\tau$ , слабо аппроксимирующую  $f$ .

Согласно терминологии, введенной Н.Н. Яненко, замену задачи (1) задачей (2) и исследование вопроса о сходимости решения  $u_\tau$  задачи (2) к решению  $u$  задачи (1) будем называть *методом слабой аппроксимации*. Впервые МСА применен Н.Н. Яненко для исследования линейной системы уравнений в частных производных. При условии корректности исходной и каждой из расщепленных задач доказана сходимость решения  $u_\tau$  расщепленной задачи к исходной в некоторой норме со скоростью  $O(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ .

Н.Н. Яненко и Г.В. Демидовым исследовалась задача Коши для линейных абстрактных дифференциальных операторных уравнений в банаховом пространстве. Доказаны теоремы сходимости МСА на основе корректности расщепленных задач и их дифференциальных продолжений. Основным в указанных работах является требование устойчивости оператора решения  $S(t, t + \tau)$  однородной задачи. Это требование при некоторых дополнительных предположениях можно ослабить. Например, С.А. Кантор сделал это за счет запаса гладкости начальных данных. В наиболее полном виде метод слабой аппроксимации для линейных уравнений исследован Г.В. Демидовым и В.А. Новиковым. З.Г. Гегечкори изучал расщепление многомерных эллиптических операторов со смешанными производными на одномерные (по различным направлениям) и сходимость таких методов для параболических задач. Первые результаты о сходимости метода слабой



Н.Н. Яненко ведет семинар в ВЦ СО АН СССР по численным методам в механике сплошной среды

аппроксимации для нелинейных уравнений принадлежат Г.И. Марчуку и Г.В. Демидову, доказавшим сходимость метода расщепления для одной из задач краткосрочного прогноза погоды. Ю.Я. Беловым и Г.В. Демидовым исследована сходимость МСА для различных вариантов расщепления квазилинейной системы уравнений типа Бюргерса. Здесь расщепленные задачи могут быть некорректными на некоторых дробных шагах, и в то же время сходимость МСА имеет место.

В.А. Новиков исследовал модельную задачу газовой динамики и в случае задачи Коши доказал сходимость МСА при достаточно малых  $t$  ("в малом"). Им исследована сходимость МСА для существенно нелинейной задачи, регуляризующей задачу для одной системы переменного типа. Г.В. Демидовым и В.Ф. Рапутой метод слабой аппроксимации изучался для абстрактных нелинейных операторных уравнений, частными случаями которых являются системы типа Коши – Ковалевской. Ю.Я. Белов на основе МСА исследовал вопросы разрешимости и устойчивости стационарных решений распадающихся квазилинейных параболических систем уравнений первого порядка вида  $u_t - Lu = f(t, x, u)$ , где  $L$  — эллиптический оператор. Он же для произвольных расщеплений получил оценку скорости сходимости МСА на основании оценок решений расщепленных задач. Ю.Е. Бояринцевым доказаны достаточно общие теоремы сходимости МСА для обыкновенных дифференциальных уравнений, исследована возможность применения метода к задачам оптимального управления.

## Сетки

Решение задач гидроаэродинамики в сложных областях потребовало развития новых методов построения расчетных сеток. Дополняя исходную систему дифференциальных уравнений уравнениями для управления сеткой, Н.Н. Яненко рассматривал задачу построения разностной сетки как задачу построения дифференциального отображения, соответствующего состоянию всего потока в целом, что позволило сформулировать по-

нятие информационной среды как совокупности исходных дифференциальных уравнений, описывающих исследуемый процесс, и уравнений для управления сеткой, автоматически адаптирующейся к потоку. Это позволило в конечном счете на порядок повысить точность расчетов. Исследования в этом направлении продолжены В.Д. Лисейкиным, В.Е. Петренко, Н. Данаевым, В.М. Ковеней, А.И. Урусовым, Ю.П. Мещеряковым, В.П. Шапеевым, Г.С. Хакимзяновым и др.

В теорию сплайнов Н.Н. Яненко ввел новое определение сплайна как решения специальных классов вырождающихся дифференциальных уравнений. На этой основе разработаны алгоритмы интерполирования и сглаживания сплайнами с применением метода мелких шагов.

## Методы решения задач гидроаэродинамики

Под руководством Н.Н. Яненко были начаты систематические исследования по моделированию задач аэродинамики в приближении уравнений газовой динамики, полных и упрощенных уравнений Навье – Стокса сжимаемого теплопроводного газа. Результаты были обобщены в совместной монографии Н.Н. Яненко и В.М. Ковени и развиты в работах их учеников.

При решении задач газовой динамики Н.Н. Яненко предложил новые способы построения разностных схем, основанные на методе предиктор-корректор, когда на этапе предиктора исходные уравнения аппроксимируются в недивергентном виде, а свойства консервативности достигаются использованием корректора.

Н.Н. Яненко был активным сторонником применения неявных разностных схем в различных задачах математической физики, поддерживал и развивал исследования в области построения экономичных схем в задачах теории упругости и фильтрации, для которых на основе метода расщепления построены эффективные численные алгоритмы решения практически важных задач. В работах Г.И. Марчука и Н.Н. Яненко предложен класс схем расщепления для численного решения многомерного кинетического интегродифференциального уравнения в односкоростном приближении.

## Метод дифференциального приближения

Н.Н. Яненко считал, что надо стремиться к получению алгоритмов с заданными свойствами, для чего необходимы методы качественного исследования разностных схем. Им высказана идея использования дифференциального приближения разностных схем для количественного и качественного анализа их свойств. Эта идея затем реализовалась в методе дифференциального приближения (МДП), суть которого состоит в замене исследования свойств разностных схем исследованием некоторых дифференциальных уравнений (называемых дифференциальным приближением), получаемых специальным образом из разностной схемы и занимающих промежуточное положение между исходными дифференциальными и разностными уравнениями. Метод дифференциального приближения позволяет изучать свойства устойчивости, дисперсии, диссипации, консервативности и инвариантности разностных схем, а также строить схемы с заранее заданными свойствами. Исследования в этом направлении продолженные Ю.И. Шокиным, А.И. Урусовым, З.И. Федотовой, Л.А. Компаниец и другими, обобщены в совместной монографии Н.Н. Яненко и Ю.И. Шокина.

## Дифференциальные анализаторы

Проблему разработки экономичных численных методов решения нелинейных уравнений механики сплошной среды Н.Н. Яненко рассматривал в комплексе с проблемой эффективного использования получаемых на ЭВМ численных результатов. В частности, при решении задач газовой динамики с применением конечно-разностных схем сквозного счета он предложил определять положение ударных волн в размазанных профилях с помощью специальных алгоритмов, названных им дифференциальными анализаторами. Еще в начале 1960-х годов в основу этих алгоритмов Н.Н. Яненко предлагал положить определение фронтов волн как точек, в которых величина искусственной вязкости достигает своего максимума. Он явился инициатором разработки алгоритмов дифференциальных анализаторов и алгоритмов локализации особенностей при численном решении задач гидродинамики. Эта идея реализована в работах его учеников, в частности Е.В. Ворожцова, В.М. Фомина и других, и впоследствии обобщена в монографии Н.Н. Яненко и Е.В. Ворожцова.

## Знакопеременная вязкость

Размышляя над особенностями метода типа “частиц в ячейках”, Н.Н. Яненко показал, что этот метод является специальной модификацией метода расщепления, обратил внимание на неинвариантность аппроксимационной вязкости в схеме Харлоу относительно преобразования Галилея, которая определяет процесс автоосцилляций (впервые это отмечено в совместной работе с В.Е. Петренко, Н.Н. Анучиной, Ю.И. Шокиным в 1969 г.). Отсюда исходят два новых направления:

— инвариантная (групповая) теория разностных схем (работы Ю.И. Шокина, А.И. Урусова, З.И. Федотовой и др.);

— теория уравнений со знакопеременной вязкостью.

Дискуссия по моделированию турбулентности позволила Н.Н. Яненко сформулировать новую математическую проблему: изучение свойств решений специальных уравнений со знакопеременной вязкостью.

При исследовании вязких течений наибольшую трудность представляет проблема турбулентности, с которой связаны резкая перестройка течения, потеря устойчивости, большие градиенты параметров потоков. Природа этих резких изменений до конца не ясна. Тем не менее большинство практически важных задач связано именно с турбулентностью. Необходимость решения таких задач потребовала создания надежных вычислительных алгоритмов, корректно моделирующих явление. Для того чтобы создавать такие алгоритмы, следовало разобраться в математических особенностях задачи, знать, какие неприятности, осложнения могут ожидать вычислителя. С этой целью создается математическая модель, которая воспроизводит основные особенности моделируемого явления и в то же время более проста, легче поддается анализу. Представлялось заманчивым найти достаточно простое нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого обладало бы аналогичными свойствами.

В 1973 году Н.Н. Яненко предложил с этой целью исследовать параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]. \quad (3)$$

Если производная  $\frac{d\omega}{ds}$  функции  $\omega(s)$  из уравнения (3) положительна, то это — уравнение Бюргерса, хорошо известное математикам, решение его обладает хорошими свойствами и моделирует ламинарные вязкие течения, при этом положительная производная  $\frac{d\omega}{ds}$  играет роль вязкости жидкости.

Н.Н. Яненко предложил исследовать это уравнение, когда производная  $\frac{d\omega}{ds}$  асимптотически положительна, т. е. положительна лишь для достаточно больших по модулю значений аргумента  $s$ , а для значений  $|s| \leq N$ , где  $N$  — положительная постоянная, может менять знак. В этом случае уравнение (3) уже не является классическим нелинейным параболическим уравнением. В тех точках, где производная  $\frac{d\omega}{ds}$  отрицательная, это уравнение с обратным направлением времени. Обычная задача Коши, когда начальные данные задаются при  $t = 0$ , в этом случае становится некорректной, т. е. решение для произвольных начальных данных может не существовать, а если и существует — может быть неединственным или не обладать устойчивостью по отношению к малым изменениям начальных данных. Таким образом, решение уравнения (3) со знакопеременной производной  $\frac{d\omega}{ds}$  неустойчиво.

Идея Н.Н. Яненко заключалась в том, чтобы использовать эту потерю устойчивости для моделирования турбулентности. Так как для классических параболических уравнений величина  $\frac{d\omega(u_x)}{du_x}$  играет роль вязкости, по аналогии уравнение (3) иногда называют уравнением со знакопеременным коэффициентом вязкости. Конечно, у специалистов, занимающихся вопросами вязких течений, такое название может вызвать массу упреков, поскольку с точки зрения термодинамики коэффициент вязкости должен быть положительным. Тем не менее идея Н.Н. Яненко, несмотря на свою неожиданность и непривычность, впоследствии нашла не только оппонентов, но и сторонников. Например, согласно последним результатам по исследованию горения в турбулентных потоках, процессы горения в сложных анизотропных системах должны описываться уравнениями параболического типа с меняющимся направлением времени. Исследователи Либби и Брей называют такие явления контргradientной диффузией, когда локально идет перенос массы или энергии в направлении, обратном градиенту. В.А. Сабельников выводит уравнение параболического типа с меняющимся направлением времени, которое описывает распределение вероятности концентрации в турбулентной жидкости.

Таким образом, Н.Н. Яненко привлек внимание математиков к исследованию нового математического объекта — нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Он сам активно занимался изучением качественных свойств решений, вопросами регуляризации уравнения (3), численными методами его решения. Результаты этих исследований опубликованы в монографии Н.Н. Яненко, Н.А. Ларькина, В.А. Новикова.

## Разностная схема как самостоятельный объект

Исследования разностных схем, аппроксимирующих различные классы уравнений математической физики, приводят Н.Н. Яненко к расширению понятия схемы. Впервые он начинает рассматривать разностную схему как самостоятельный объект исследования, как математическую модель, адекватную той или иной физической модели. Это

фундаментальное положение основано на глубоком понимании основ дифференциального и интегрального исчисления, базовых принципов механики сплошных сред.

Действительно, физико-математические модели, описываемые дифференциальными, интегральными или интегродифференциальными уравнениями, получают из дискретных моделей путем осреднения и предельного перехода по тем или иным параметрам. Это имеет место, например, в модели сплошной среды, где для достаточно большого числа элементов в единице объема путем осреднения и предельного перехода по объему приходят к понятию сплошной среды. При построении разностных аппроксимаций делается обратная операция — переход к дискретной среде. Следовательно, можно трактовать разностную схему как самостоятельную математическую модель, обладающую теми или иными свойствами.

## Технологическая цепочка математического моделирования

Н.Н. Яненко является одним из создателей новой научной дисциплины, названной им математической технологией. Он указывал, что развитие этого направления науки связано с тремя факторами: системами автоматизированного проектирования инженерных конструкций, большими задачами и ЭВМ параллельного действия.

Введение технологической цепочки математического моделирования позволило взглянуть на проблему по-новому. Включив в цепочку структуру ЭВМ, Яненко проанализировал ее влияние и пришел к идее создания специализированных вычислительных устройств, ориентированных на решение определенного класса задач. Архитектура ЭВМ и численные алгоритмы становятся в таком случае взаимосогласованными. Идеи эти, к сожалению, реализованы только в зарубежных проектах.

Значительное внимание Н.Н. Яненко уделял тематике пакетов прикладных программ. Со своими коллегами он разработал основные принципы модульного анализа задач математической физики и механики сплошной среды, дал первые определения модуля и пакета прикладных программ, провел их классификацию. Он показал наличие тесной взаимосвязи структуры алгоритмов решения задач механики сплошной среды и структуры вычислительной машины. Одним из первых Н.Н. Яненко понял огромную роль распараллеливания вычислений для достижения резкого увеличения производительности ЭВМ. Основные положения этих исследований опубликованы в совместных статьях с В.М. Ковеней, А.Н. Коноваловым и В.И. Карначуком.

## Интервальный анализ

Н.Н. Яненко был одним из инициаторов исследований по интервальной математике в нашей стране. Это интересная и своеобразная область теоретической и прикладной математики. Первоначально аппарат интервального анализа использовался как средство контроля ошибок округления на ЭВМ при решении ряда прикладных задач, требующих высокой точности (таких как расчет траекторий), а затем развился в самостоятельную ветвь прикладной математики. В этом направлении Николаю Николаевичу принадлежит только одна публикация, однако во многих своих лекциях, докладах, статьях он упоминал и пропагандировал интервальный анализ и своим вниманием инициировал исследования в этой области.

## Кольцо семинаров

Влияние Н.Н. Яненко на развитие исследований по математическому моделированию в различных научных центрах страны оказалось существенным благодаря “кольцу” семинаров, организованных им и притягивающих исследователей разнообразием рассматриваемых вопросов, нетрадиционностью подходов, доброжелательностью и равноправием всех участников.

В 1964 году Н.Н. Яненко провел первый семинар в НГУ. В те годы семинар носил название “Численные методы механики сплошной среды”. На заседания Николай Николаевич приглашал всех: студентов, аспирантов, сотрудников кафедры и институтов. Часто выступали приезжие. Бывало по два-три докладчика, случалось по несколько заседаний в неделю, так как не успевали прослушать всех желающих. Диапазон докладов славился широтой. Отличительной чертой этого семинара было то, что здесь давали возможность высказаться всем независимо от того, сторонником какой школы, какого направления был выступающий. Семинар продолжает работать в Федеральном исследовательском центре информационных и вычислительных технологий. Состоялось уже более 1000 его заседаний.

На основе этого семинара возник круг всесоюзных семинаров: “Численные методы механики вязкой жидкости”, “Модели механики сплошной среды” и ряд других. Следует заметить, что география мест проведения “яненковских” семинаров была чрезвычайно широка и охватывала всю страну с севера на юг и с запада на восток. Совместная работа на заседаниях, бурные дискуссии, продолжавшиеся и в неурочное время, способствовали созданию неформальных коллективов единомышленников, сплоченных одними задачами и, что немаловажно, близкими человеческими качествами, мировоззрением, мировосприятием.

Начиная с 1986 года усилиями Ю.И. Шокина, в те годы возглавлявшего Вычислительный центр Сибирского отделения в г. Красноярске, были возобновлены заседания



Юбилейное 1000-е заседание семинара “Численные методы механики сплошной среды” в Институте вычислительных технологий СО РАН (в настоящее время — Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий)

Кольца семинаров, тематика и названия которых претерпели естественные изменения, продиктованные логикой развития науки и общества. Неизменными остались доброжелательность и острота дискуссий, разнообразие обсуждаемых проблем, активность участников.

Николай Николаевич сумел создать единую школу ученых и специалистов, включающую математиков из Латвии, Литвы, Украины, Молдавии, Грузии, Узбекистана, Казахстана и других республик страны. Благодаря усилиям учеников Николая Николаевича в России, Казахстане и Узбекистане это сотрудничество удалось сохранить и преумножить, так же как и сотрудничество с математиками Германии и Швеции, начатое Н.Н. Яненко, подхваченное и развитое руководством ИВТ СО РАН (в настоящее время — ФИЦ ИВТ). Особо следует отметить создание совместного с германскими специалистами Центра высокопроизводительных вычислений на базе ФИЦ ИВТ. Чрезвычайно популярными мероприятиями этого центра стали совместные школы по высокопроизводительным вычислениям, проходящие в Новосибирске.

Особое внимание Николай Николаевич уделял обеспечению взаимодействия академической и самой передовой отраслевой науки. По его инициативе постоянно поддерживались связи сибирских ученых со специалистами государственных центров в Челябинске и Арзамасе. Математики-вычислители, механики и прикладники институтов Сибирского отделения АН СССР в Иркутске, Красноярске, на Урале и Дальнем Востоке постоянно ощущали неподдельный интерес старшего товарища, часто приезжали к нему в институт, выступали на семинарах, руководимых Н.Н. Яненко. Многим из них он помог сформулировать свои результаты, защитить кандидатские и докторские диссертации, а некоторых рекомендовал на руководящие посты в системе Академии наук.

Никогда не прерывал Н.Н. Яненко теснейшей связи с родным для него Томским университетом. При его непосредственном участии в ТГУ был создан и набрал силу Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики, создана кафедра физической механики на механико-математическом факультете. Николай Николаевич часто приезжал в Томск, проводил там конференции и семинары, всеми возможными способами помогал томичам в работе.

## Педагогическая деятельность

Особо стоит остановиться на педагогической работе Н.Н. Яненко по подготовке новых поколений исследователей. Это не только профессиональная работа в Московском, Уральском и Новосибирском государственных университетах, но и инициирование новых спецкурсов, семинаров, специальностей. Среди его прямых учеников около 20 докторов и свыше 50 кандидатов наук. Широкая эрудиция и интеллигентность позволили Николаю Николаевичу ненавязчиво вовлекать молодежь в круг своих интересов, развивая ее инициативу, и личным примером своей деятельности воспитывать новые поколения научных сотрудников.

Кафедра математического моделирования в Новосибирском государственном университете (до 1996 года кафедра вычислительных методов механики сплошной среды) была основана Н.Н. Яненко в 1964 году с целью подготовки высококвалифицированных специалистов, владеющих современными численными методами и вычислительными технологиями и способных применять их для решения задач механики сплошной среды (гидродинамики, физики плазмы, многофазных сред, твердотельной электрони-

ки и др.). С тех пор на кафедре прошли обучение свыше тысячи студентов, половина из них защитила кандидатские диссертации, около 50 человек стали профессорами, один из них — профессор Ю.И. Шокин является действительным членом Российской академии наук. Выпускники кафедры работают в академических и отраслевых институтах, в различных университетах и вузах как в России, так и за рубежом.

Система подготовки специалистов в Новосибирском научном центре Сибирского отделения Российской академии наук базируется на тесном сотрудничестве Новосибирского государственного университета и институтов СО РАН. Сибирское отделение АН СССР было основано в 1957 году, а в 1959 году открылся Новосибирский государственный университет, призванный готовить специалистов для институтов Сибирского отделения. С самого начала предполагалось, что основную часть преподавателей (ассистентов, доцентов, профессоров) составят сотрудники Сибирского отделения АН СССР, работающие в тех или иных институтах и одновременно преподающие (по совместительству) в университете. Подготовка студентов составляла три года общего университетского образования, а затем два года специализации по кафедрам, базой для которых стали соответствующие институты СО АН СССР. Курсовые и дипломные работы тем самым тесно увязывались с тематикой конкретных лабораторий и институтов.

У истоков специализации в области вычислительной и прикладной математики в Новосибирске стояли академик С.Л. Соболев (хорошо известны среди специалистов пространства Соболева, теория обобщенных функций и т. д.) и академик Л.В. Канторович (лауреат Нобелевской премии). Чуть позже, с 1962 года, в Новосибирске начали работать Г.И. Марчук, А.П. Ершов и с 1963 года — Н.Н. Яненко. С его приходом, собственно, и началась подготовка специалистов в области вычислительной гидродинамики.

До 1976 года базовым институтом для кафедры математического моделирования являлся Вычислительный центр СО АН СССР (директор академик Г.И. Марчук), хотя часть сотрудников была из Института теоретической и прикладной механики, Института горного дела, Института гидродинамики и Института математики. С 1976 по 1991 год базовым стал Институт теоретической и прикладной механики СО АН. До 1984 года заведовал кафедрой Н.Н. Яненко. В 1984–1989 годы кафедру возглавлял профессор В.Г. Дулов, а с 1989 года — профессор В.М. Ковеня — выпускник НГУ 1967 года. С 1991 года базовым институтом для кафедры стал Институт вычислительных технологий СО РАН.

В настоящее время на кафедре работают 29 человек, в том числе десять профессоров (двое из них — действительные члены РАН), 9 доцентов; в основном это сотрудники Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий, но есть также сотрудники Института гидродинамики и Института теоретической и прикладной механики.

Основными научными направлениями на кафедре математического моделирования являются:

- вычислительная математика;
- математическое моделирование медико-биологических проблем;
- вычислительная гидродинамика;
- вычислительная физика;
- информационные технологии в задачах принятия решений.

Эти направления связаны с прикладными проблемами, возникающими в аэрокосмической технике, при защите от катастрофических явлений, в теплоэнергетике (горение твердого топлива, долговечность котельного оборудования), в химической промышленности и т. д.

Цикл обязательных предметов для студентов 1–5-х курсов объединен единой программой, при этом каждый последующий предмет предполагает определенный объем знаний, полученных ранее.

Кроме обязательных предметов для студентов старших курсов ежегодно предлагается 12–15 специальных лекций и спецсеминаров, достаточно полно охватывающих проблематику современной вычислительной математики и новых информационных технологий.

За эти годы сотрудниками кафедры математического моделирования НГУ издано свыше 60 учебных пособий, посвященных различным разделам численного анализа, вычислительной гидродинамики и др.

## Вместо заключения

Николай Николаевич Яненко — автор и соавтор 363 работ, в том числе 17 монографий, подводящих итоги исследований по отдельным направлениям. Среди научных публикаций, видимо, можно выделить несколько, положивших начало развитию новых направлений. Конечно, это субъективный выбор, отражающий восприятие автором истории тех областей знаний, в которые Николай Николаевич внес существенный вклад. Возможно, каждый из читателей, выполнив отбор на основании своего восприятия, отдаст предпочтение другим работам. Но автор настоящей статьи назвал бы следующие.

1. О сходимости разностной схемы для одного интегродифференциального уравнения (1951 г., совместно с А.Н. Тихоновым).
2. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений (1956 г.).
3. Введение в теорию разностных схем математической физики (Курс лекций в УрГУ, 1958 г.).
4. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности (1959 г.).
5. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов) (1960 г.).
6. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных (1961 г.).
7. О реализации на электронно-вычислительных машинах алгебраическо-дифференциальных алгоритмов (1961 г., совместно с В.А. Шурыгиным).
8. О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений (1964 г.).
9. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости (1966 г., совместно с Н.Н. Владимировой, Б.Г. Кузнецовым).
10. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем (1968 г., совместно с Ю.И. Шокиным).
11. Об аппроксимационной вязкости разностных схем (1968 г., совместно с Ю.И. Шокиным).
12. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями (1969 г., совместно с Н.Н. Анучиной, В.Е. Петренко, Ю.И. Шокиным).

13. О структуре абсолютно аппроксимирующих и абсолютно корректных схем (1971 г., совместно с Г.В. Демидовым).
14. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды (1972 г., совместно с В.М. Ковеней).
15. Об одной модели жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости (1973 г., совместно с В.А. Новиковым).
16. Дифференциальные анализаторы ударных волн (1976 г., совместно с Е.В. Ворожцовым).
17. Метод подвижных координат в газовой динамике (1976 г., совместно с В.Д. Лисейкиным).
18. Проблемы математической технологии (1977 г., совместно с А.Н. Коноваловым, В.И. Карначуком).
19. Тенденции развития современной математики (1977 г.).
20. Об организации параллельных вычислений и распараллеливании программ (1978 г., совместно с А.Н. Коноваловым, А.Н. Бугровым, Г.В. Шустовым).

Одной из отличительных черт Николая Николаевича была незаурядная смелость брать на себя ответственность за решение вопросов, в которых он не являлся специалистом, но решать которые было необходимо. Так случилось, например, в начале его работы на Урале, так было и при переходе в Институт теоретической и прикладной механики. Каждый раз это приводило к всплеску идей, переоценке методов и методологий, взаимопроникновению методик из различных областей знаний и всегда, в конечном счете, к новым результатам в фундаментальной науке.

В статье, конечно, не сказано о многих исследованиях, на которых в сильной мере отразилось научное влияние идей Н.Н. Яненко. В первую очередь это работы И.К. Яушева, В.П. Ильина, Ю.А. Березина, А.Д. Рычкова, Б.П. Колобова, В.Н. Шепеленко, К. Джакупова, Б.Г. Гурова, В.А. Сапожникова, А.Т. Лукьянова, Г.А. Сапожникова, Л.Б. Чубарова, А.М. Гришина, А.П. Михайлова, В.Н. Игнатьева, А.Н. Валиуллина, В.И. Паасонена, Ю.Н. Григорьева, Б.И. Квасова, А.М. Франка, Ю.Н. Захарова и многих других.

Что касается влияния Н.Н. Яненко на автора, то самым главным для его профессиональной деятельности было воспитание уважительного отношения к различным областям знаний и предметам исследований, понимание того, что наука едина, и воспитание нормального вхождения в новые области приложений.