

## Развитие схемы метода LBM для неизотермических течений с произвольно большим числом Маха

Е. В. ЗИПУНОВА<sup>1,\*</sup>, А. Ю. ПЕРЕПЁЛКИНА<sup>1</sup>, А. В. ЗАКИРОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 125047, Россия

<sup>2</sup>ООО “Кинтех Лаб”, Москва, 123298, Россия

\*Контактный автор: Зипунова Елизавета Вячеславовна, e-mail: e.zipunova@gmail.com

Поступила 20 декабря 2019 г., доработана 22 сентября 2020 г., принята в печать 5 ноября 2020 г.

При решении задач динамики жидкостей и газов в области малых скоростей потока и при изотермических условиях с успехом применяется метод решеточных уравнений Больцмана (LBM). Для решения дискретного уравнения Больцмана может быть использован новый метод Particles-on-Demand (PonD), в котором в каждой точке сетки дискретизация функции распределения в пространстве скоростей центрирована относительно текущей скорости потока. В отличие от классического LBM, метод PonD применим не только для задач с малыми скоростями потока и при изотермических условиях. В данной работе реализован метод PonD D1Q5 с итерационным расчетом скорости переноса и явным расчетом первых трех моментов, включая скорости переноса. Показано, что рассмотренная модификация метода PonD хоть и накладывает ограничения на параметры, позволяет проводить расчеты в большем диапазоне допустимых скоростей.

*Ключевые слова:* метод решеточных уравнений Больцмана, дискретное уравнение Больцмана, консервативность численных схем.

*Цитирование:* Зипунова Е.В., Перепёлкина А.Ю., Закиров А.В. Развитие схемы метода LBM для неизотермических течений с произвольно большим числом Маха. Вычислительные технологии. 2021; 26(1):62–71. DOI:10.25743/ICT.2021.26.1.005.

### Введение

Вычислительная гидрогазодинамика широко используется при разработке новых технологий, прогнозе погоды, влияния природных и техногенных чрезвычайных ситуаций. При решении задач моделирования гидро- и газодинамики, в том числе задач по моделированию многофазных сред, капиллярных течений, поровых пространств, с успехом применяется метод решеточных уравнений Больцмана (LBM) [1, 2]. Основными достоинствами данного метода по сравнению с классическим подходом решения уравнений Навье – Стокса являются простота вычислений и малая взаимозависимость вычислений между ячейками сетки, позволяющая неограниченно масштабировать область моделирования и эффективно распараллеливать вычисления [3–5].

LBM вводится путем дискретизации кинетического уравнения Больцмана по скорости. Функция распределения по скоростям представляется небольшим числом дискретных значений в пространстве скоростей — дискретными функциями распределения (ДФР). Для ДФР определены правила переноса, т. е. копирования значения из

соответствующей точки, и столкновения, т.е. релаксации к локальному равновесию в узлах сетки.

Однако применимость классического метода решеточных уравнений Больцмана ограничена задачами с малыми скоростями потока и при изотермических условиях. В статье [6] предложен метод решения дискретного уравнения Больцмана PonD, альтернативный LBM и свободный от указанных ограничений. Это получено за счет введения перекалибровки ДФР из условия инвариантности гидродинамических моментов относительно выбора переменной интегрирования. В вычислительном аспекте, по сравнению со стандартным подходом LBM, шаг столкновений упрощается, но для выполнения переноса требуется применять неявную схему, вычислительно сложную и неконсервативную в общем случае. При переносе в каждой точке пространственной сетки требуется проведение итераций, в процессе которых для  $Q$  дискретных функций распределения ( $Q$  — число узлов квадратуры) происходит перекалибровка на шаблоне из некоторого множества точек. При перекалибровке для каждой точки шаблона необходимо обращение матрицы  $Q \times Q$ . Таким образом, схема требует большого числа вычислений. В [7] предложен вариант метода PonD, обеспечивающий консервативность и использующий явную схему переноса, что уменьшает количество требуемых вычислений. В настоящем исследовании были разработаны и протестированы новые подходы к операции переноса схемы PonD, позволяющие ускорить расчеты без потери точности.

## 1. Дискретизация пространства скоростей

В случае, когда внешними силами можно пренебречь, кинетическое уравнение Больцмана записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \Omega(f),$$

где  $f$  — функция распределения плотности;  $\mathbf{r}$  — координата;  $t$  — время;  $\mathbf{v}$  — скорость;  $\Omega(f)$  — оператор столкновений Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК). В данной работе рассматривается дискретизация на равномерной сетке с шагом сетки по пространству  $\Delta_{x0}$  и по времени  $\Delta_{t0}$ . Все переменные обезразмерены на значения  $\Delta_{x0}$ ,  $\Delta_{t0}$  и  $\rho_0$ . Поэтому далее шаг сетки по пространству  $\Delta_x = 1$  и по времени  $\Delta_t = 1$ .

Оператор БГК записывается как

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\tau}(f - f^{\text{eq}}),$$

где  $\tau$  — время релаксации.

Моменты функции распределения плотности вычисляются с помощью квадратуры Гаусса–Эрмита:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(n)}(\mathbf{r}, t) &= \int f^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v}^n d\mathbf{v} = \int \omega(\mathbf{v}) \frac{f^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\omega(\mathbf{v})} \mathbf{v}^n d\mathbf{v} = \\ &= \sum_{i=1}^Q \left( w_i \frac{f^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)}{\omega(\mathbf{c}_i)} \right) \mathbf{c}_i^n = \sum_{i=1}^Q f_i \mathbf{c}_i^n, \end{aligned}$$

где  $f^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — приближение функции распределения плотности в виде разложения по многочленам Эрмита до порядка  $N$ ;  $\mathbf{c}_i$  — абсциссы  $n$ -узловой квадратуры Гаусса–Эрмита;  $Q$  — число узлов квадратуры. В одномерном случае интеграл вычисляется

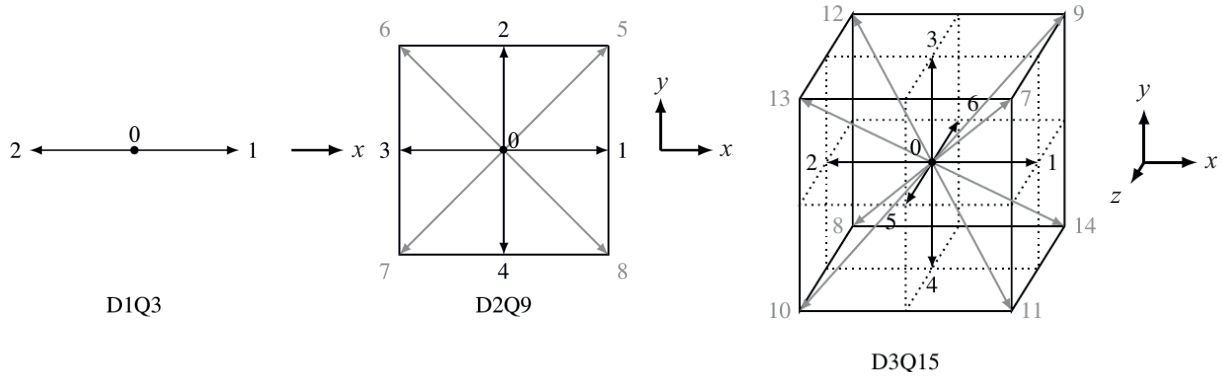


Рис. 1. Направления скоростей, соответствующих квадратурам Гаусса – Эрмита  
Fig. 1. Directions of velocities corresponding to Gauss – Hermite quadratures

точно при  $N + n < 2Q - 1$ . В LBM переменными, заданными на сетке, являются  $f_i$  — дискретные функции распределения:

$$f_i = w_i \frac{f^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)}{\omega(\mathbf{c}_i)},$$

$$\omega(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \exp(-|\mathbf{v}|^2/2),$$

где  $w_i$  — веса выбранной квадратуры, функция  $\omega(\mathbf{v})$  — весовая функция многочленов Эрмита. Также  $\omega(\mathbf{v})$  соответствует распределению Максвелла при температуре  $T = 1$  и скорости течения  $\mathbf{u} = 0$ .

В одномерном случае набор состоит из трех скоростей (D1Q3):  $c_0 = 0$ ,  $c_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ . Интегралы от многочленов до пятого порядка считаются точно. Обычно дискретные скорости  $\mathbf{c}_i$  шкалируют так, чтобы векторы  $\mathbf{c}_i \Delta_t$  были равны смещениям между узлами сетки. Это можно сделать, изменив переменную интегрирования так, что  $\omega(\mathbf{v}/\sqrt{T_0})$  будет соответствовать распределению Максвелла с “температурой решетки”  $T_0$ . В D1Q3  $T_0 = 1/3$ , тогда  $c_0 = 0$ ,  $c_{1,2} = \pm 1$ . Для методов большей размерности в случае, когда квадратура строится на точках, полученных из набора точек одномерной квадратуры декартовым произведением, температура решетки останется такой же. Например, D2Q9 (рис. 1):

$$\mathbf{c}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{c}_{1,3} = (\pm\sqrt{3}, 0), \quad \mathbf{c}_{2,4} = (0, \pm\sqrt{3}), \quad \mathbf{c}_{5,6,7,8} = (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}).$$

Макроскопические переменные плотности, скорости и температуры жидкости вычисляются из первых трех моментов функций распределения для каждой ячейки:

$$\rho = \sum_{i=0}^{i=Q-1} f_i, \quad \rho u_\beta = \sum_{i=0}^{i=Q-1} f_i c_{i\beta}, \quad \rho \mathbf{u}^2 + \rho DT = \sum_{i=0}^{i=Q-1} f_i \mathbf{c}_i^2.$$

## 2. Метод решеточных уравнений Больцмана

Решается система кинетических уравнений Больцмана, записанных для дискретных функций распределения:

$$f_i(\mathbf{x}_j + \mathbf{c}_i \Delta_t, t + \Delta_t) - f_i(\mathbf{x}_j, t) = -\frac{\Delta_t}{\tau} (f_i(\mathbf{x}_j, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}_j, t)), \quad i = \overline{0, Q-1},$$

Обновление ДФР в ячейке разделяется на две стадии: столкновение и перенос. Столкновение состоит в локальном изменении набора  $f_i$ :

$$f_i^*(\mathbf{x}_j, t) = f_i(\mathbf{x}_j, t) \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) + f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}_j, t) \frac{\Delta t}{\tau}.$$

На этапе переноса значение ДФР копируется из  $j$ -го узла в другой узел сетки по направлению соответствующей скорости  $\mathbf{c}_i$ :

$$f_i(\mathbf{x}_j + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}_j, t).$$

Данный метод применим только при малом числе Маха (несжимаемая жидкость) и в изотермическом случае.

### 3. Метод Particles on Demand

В методе PoD переменная интегрирования шкалируется с помощью калибровочной пары  $\lambda = \{T, \mathbf{u}\}$  и дискретные значения скорости, для которых определены ДФР, принимают вид

$$\mathbf{e}_i = \sqrt{T/T_0} \mathbf{c}_i + \mathbf{u},$$

где  $\mathbf{e}_i$  — скорость переноса,  $T = T(\mathbf{x}, t)$  — температура,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — скорость потока в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ . Каждой точке пространственной сетки соответствует своя калибровочная пара  $\lambda$ . Для того чтобы установить связь между ДФР в разных точках сетки, которые определены в разных калибровках, использован тот факт, что при переходе  $f_i$  из калибровки  $\lambda(\mathbf{u}, T)$  в калибровку  $\lambda'(\mathbf{u}, T)$  моменты функции распределения плотности не изменяются:

$$M_\lambda f_i^\lambda = M_{\lambda'} f_i^{\lambda'}$$

( $M$  — оператор вычисления моментов). В одномерном случае матрица этого оператора может быть записана как

$$M_{i,j} = e_j^i,$$

а в двумерном случае

$$M_{i,j} = e_{xj}^m e_{yj}^n.$$

Здесь  $i = mm_{\max} + n$ , где  $m$  и  $n$  принимают значения от 0 до  $(m_{\max} - 1)$ , а  $j$  — значения от 0 до  $Q$ . Так как для вычисления  $f_i^{\lambda'}$  матрица  $M_{\lambda'}$  должна быть обратима, это квадратная матрица. Соответственно,  $m_{\max}$  такое, что  $m_{\max} x^2 = Q$ . Например, для D2Q9  $m_{\max} = 3$ .

Так как в данном методе скорость  $\mathbf{e}_i$  в общем случае не равна смещению между узлами пространственной сетки, на стадии переноса значения функции распределения  $f_i$  переходят из точек, не совпадающих с узлами сетки. Помимо этого, при переносе используется неявная схема

$$f_i^*(\mathbf{x}_j, t + \Delta t) = f_i^\lambda(\mathbf{x}_j - \mathbf{e}_i \Delta t, t),$$

где скорость переноса  $\mathbf{e}_i = \sqrt{T(\mathbf{x}_j, t + \Delta t)/T_0} \mathbf{c}_i + \mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t + \Delta t)$  и калибровка  $\lambda = \{T(\mathbf{x}_j, t + \Delta t), \mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t + \Delta t)\}$  берутся с нового временного слоя.

Значение  $f_i$  в точке  $\mathbf{x}_j - \mathbf{e}_i \Delta_t$  получается интерполяцией с использованием многочленов Лагранжа. В одномерном случае

$$f_i^\lambda(\mathbf{x}_j - \mathbf{e}_i \Delta_t, t) = \sum_{n=0}^{L-1} a_n f_i^\lambda(\mathbf{x}_n, t), \quad a_n = \prod_{k=0, k \neq n}^{L-1} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{e}_i \Delta_t - \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k}.$$

Шаблон может быть фиксированным и нефиксированным (рис. 2). Фиксированный шаблон не зависит от скорости  $\mathbf{e}_i$ , а зафиксирован за точкой  $\mathbf{x}_j$ . В одномерном случае при интерполяции по трем точкам шаблон состоит из точек  $x_{j-1}$ ,  $x_j$ ,  $x_{j+1}$ . Нефиксированный шаблон зависит от точки  $\mathbf{x}_j - \mathbf{e}_i \Delta_t$ . В одномерном случае нефиксированный при интерполяции по трем точкам шаблон будет состоять из точек  $[x_j - e_i \Delta_t] - 1$ ,  $[x_j - e_i \Delta_t]$ ,  $[x_j - e_i \Delta_t] + 1$ .

Нефиксированный шаблон приводит к неконсервативности: перенос массы в точку  $\mathbf{x}_j$  никак не согласуется с количеством массы, которое ушло из других точек сетки. Фиксированный шаблон обеспечивает консервативность. Однако для устойчивой интерполяции с фиксированным шаблоном требуется, чтобы скорость переноса удовлетворяла неравенству  $\max |\mathbf{e}_i| < \Delta_x$ , т. е. точка  $\mathbf{x}_j - \mathbf{e}_i \Delta_t$  лежит внутри шаблона. Данное условие накладывает ограничения на значения скорости и температуры.

Так как каждой точке сетки соответствует своя калибровка, перед интерполяцией функции распределения в точках шаблона переводятся в одну калибровку. Схема неявная, и калибровка определяется моментами, посчитанными из  $f_i^*(\mathbf{x}_j, t + \Delta_t)$ . Для расчета применяется метод простых итераций:

- *Определение калибровки.* Если  $k = 0$ , в качестве первого приближения калибровки используются скорость и температура на текущий момент времени  $t$ :

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad T^0 = T(\mathbf{x}, t),$$

иначе вычисляются из моментов с предыдущей итерации:

$$\mathbf{u}^k = \frac{\sum_i f_i^{k-1} \mathbf{e}_i^{k-1}}{\sum_i f_i^{k-1}}, \quad T^k = \frac{\sum_i f_i^{k-1} (\mathbf{e}_i^{k-1})^2}{\sum_i f_i^{k-1}} - (\mathbf{u}^k)^2.$$

- *Перенос с новым приближением скорости и в новой калибровке:*

$$\lambda^k = \{\mathbf{u}^k, T^k\}, \quad \mathbf{e}_i^k = \sqrt{T^k/T_0} \mathbf{c}_i + \mathbf{u}^k,$$

$$f_i^k = f_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{e}_i^k \Delta_t, t) = \sum a_n^k f_i^{\lambda^k}(\mathbf{x}_n, t).$$

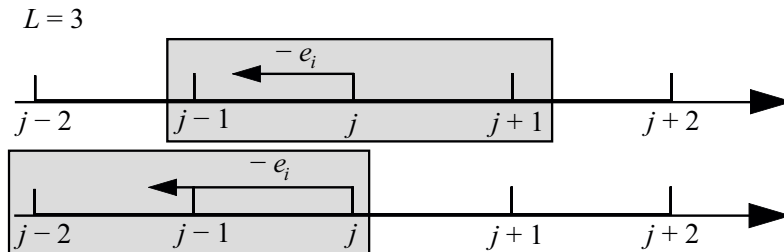


Рис. 2. Фиксированный и нефиксированный шаблоны интерполяции в одномерном случае. В серый прямоугольник выделены узлы, вошедшие в шаблон интерполяции

Fig. 2. Fixed and non-fixed interpolation template in the one-dimensional case. The whole gray rectangle marks the nodes included in the interpolation template

#### 4. Перенос для D1Q5 PoND

В варианте D1Q5 размерность  $D = 1$  и использовано  $Q = 5$  скоростей:

$$c_0 = 0, \quad c_{1,2} = \pm\sqrt{5 - \sqrt{10}}, \quad c_{3,4} = \pm\sqrt{5 + \sqrt{10}}.$$

Пусть  $c_A = \sqrt{5 - \sqrt{10}}$ ,  $c_B = \sqrt{5 + \sqrt{10}}$ . Для перекалибровки  $f_i$  из  $\lambda(\mathbf{u}, T)$  в  $\lambda'(\mathbf{u}', T')$  требуется определить матрицу  $G$ :

$$f_j^{\lambda'} = G_{ij} f_i^{\lambda} \quad G = M_{\lambda'}^{-1} M_{\lambda}.$$

Элемент матрицы  $G$  можно определить в следующей форме:

$$G_{ij} = w_{ij} g_{ij},$$

где

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{T_0^2}{T'^2 c_A^2 c_B^2} & \text{при } c'_j = 0, \\ \frac{T_0^2}{2T'^2 c_A^2 (c_A^2 - c_B^2)} & \text{при } |c'_j| = c_A, \\ \frac{T_0^2}{2T'^2 c_B^2 (c_B^2 - c_A^2)} & \text{при } |c'_j| = c_B, \end{cases} \quad (1)$$

$$g_{ij} = \prod_{k=0, k \neq j}^4 (\Delta u - \sqrt{T'/T_0} c_k + \sqrt{T'/T_0} c_i), \quad \Delta u = u - u'. \quad (2)$$

В общем случае коэффициенты интерполяционного шаблона, состоящего из  $L$  точек, можно представить в виде многочлена по степеням скорости  $e_i$ :

$$a_n = \prod_{k=0, k \neq n}^{L-1} \frac{x_j - e_i \Delta t - x_k}{x_n - x_k} = \sum_{l=0}^L A_{nl} e_i^l,$$

где  $A_{nl}$  определяется выбранным способом интерполяции. После переноса моменты в точке  $\mathbf{x}_j$  выражаются как

$$m_{\alpha}(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^{Q-1} e_i^{\alpha} \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} A_{nl} e_i^l f_i(x_n) = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} A_{nl} m_{\alpha+l}(t).$$

Таким образом, для фиксированного шаблона, учитывая, что моменты не зависят от калибровки, значения моментов на следующем временном слое можно определить из значений моментов более высокого порядка в соседних точках. В этом случае не требуется проведение итераций, что значительно ускоряет расчеты без потери точности. Для D1Q5 и лагранжевой интерполяции по трем ближайшим точкам с фиксированным шаблоном интерполяции с  $L = 3$  запишем

$$m_{\alpha}^0(t + \Delta t) = m_{\alpha}^0(t) - \Delta t \frac{1}{2} (m_{\alpha+1}^+(t) - m_{\alpha+1}^-(t)) + \\ + \Delta t^2 \frac{1}{2} (m_{\alpha+2}^+(t) + m_{\alpha+2}^-(t) - 2m_{\alpha+2}^0(t)), \quad \alpha = \overline{0, 2}.$$

Здесь индексы “0”, “+”, “−” означают центральную, правую и левую точки интерполяционного шаблона соответственно.

Для интерполяции с фиксированным шаблоном требуется, чтобы скорость переноса удовлетворяла неравенству  $\max |\mathbf{e}_i| < \Delta_x$ . При минимальном вкладе скорости потока  $u$  в длину вектора дискретной скорости  $|u| = 0$  и неравенство превращается в условие на температуру

$$T < \frac{1}{5 + \sqrt{10}} T_0.$$

## 5. Сравнение результатов моделирования методами LBM и PonD

Как было показано в [7], метод PonD с фиксированным шаблоном является консервативным. Но в то же время интерполяция с фиксированным шаблоном накладывает ограничения на значения  $u$  и  $T$ . Тем не менее метод PonD с фиксированным шаблоном применим при более высоком значении числа Маха, чем классический LBM.

Для показательного сравнения классического метода решеточных уравнений Больцмана и метода PonD с фиксированным шаблоном рассматривалось движение контактного разрыва в одномерной постановке. Для расчетов использовалась схема D1Q5. В методе LBM параметр  $T_0$  фиксирован и определен как [8]

$$T_0 = 1 - \sqrt{2/5}.$$

Время релаксации для обоих методов выбрано равным  $\tau = 0.7$ , шаг по времени и шаг пространственной сетки  $\Delta_t = 1$ ,  $\Delta_x = 1$ . Моделировалась область с периодическими граничными условиями. Размер области составляет 600 ячеек. Начальные условия заданы в виде выражений

$$\begin{aligned} \rho|_{x<0} &= 1.1, & \rho|_{x\geq 0} &= 1, \\ u|_{x<0} &= u_0, & u|_{x\geq 0} &= u_0, \\ P|_{x<0} &= P|_{x\geq 0} = 1, & P &= \rho T. \end{aligned}$$

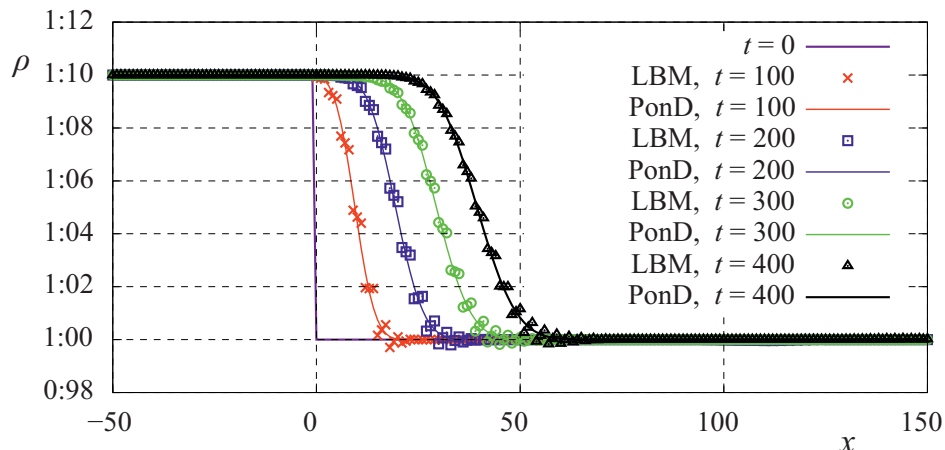


Рис. 3. Распределение плотности для движущегося контактного разрыва при  $u_0 = 0.1$ ,  $M \sim 0.17$  в моменты времени  $t = 0, 100, 200, 300, 400$ , рассчитанные LBM и методом PonD

Fig. 3. Density distribution for a moving contact discontinuity for  $u_0 = 0.1$ ,  $M \sim 0.17$  at time  $t = 0, 100, 200, 300, 400$ , calculated with LBM and PonD

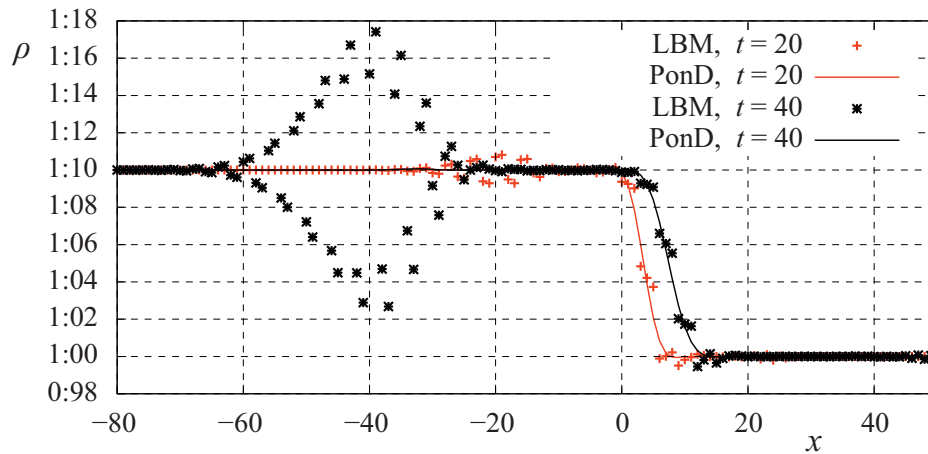


Рис. 4. Распределение плотности для движущегося контактного разрыва при  $u_0 = 0.2$ ,  $M \sim 0.34$  в моменты времени  $t = 20$  и  $40$ , посчитанные LBM и методом PonD

Fig. 4. Density distribution for a moving contact discontinuity for  $u_0 = 0.2$ ,  $M \sim 0.34$  at time  $t = 20$  and  $40$ , calculated using LBM and PonD

Варьировалось значение скорости  $u_0$ . При  $u_0 = 0.1$ , что соответствует числу Маха  $M \sim 0.17$ , оба метода устойчивы (рис. 3). Перепад плотности согласно ожиданиям стабилен и продвигается со скоростью  $u_0$  в направлении потока. Размытие обусловлено выбором параметра  $\tau$ , который контролирует вязкость. Но уже при  $u_0 = 0.2$ , что соответствует числу Маха  $M \sim 0.34$ , классический метод LBM расходится (рис. 4).

Таким образом, показано, что рассмотренная модификация метода PonD хоть и накладывает ограничения на параметры, позволяет проводить расчеты в большем диапазоне допустимых скоростей, чем метод решеточных уравнений Больцмана.

## Заключение

Метод PonD является важным шагом в развитии моделирования процессов гидродинамики. Главным отличием этого метода от классического LBM является возможность калибровки параметров схемы в зависимости от температуры и скорости в точке. Схема PonD позволяет проводить расчеты для неизотермических постановок и больших скоростей. Выбор набора скоростей  $\mathbf{c}_i$  не определяется попаданием в точки сетки, поэтому становится доступен больший выбор квадратур Гаусса–Эрмита. В случае, если шаблон интерполяции фиксируется относительно ячейки, в которой происходит текущее обновление ДФР, шаг переноса может быть записан в явном виде и схема получается консервативной. С другой стороны, это накладывает новые ограничения на температуру и скорость течения. В данной работе было показано, что даже при ограничении схемы PonD фиксированным интерполяционным шаблоном возможен расчет при больших значениях числа Маха, чем в случае использования классического метода решеточных уравнений Больцмана.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 18-71-10004).



## Список литературы

- [1] **Succi S.** The lattice Boltzmann equation: For fluid dynamics and beyond. Oxford University Press; 2001: 308.
- [2] **Shan X., Yuan X., Chen H.** Kinetic theory representation of hydrodynamics: A way beyond the Navier–Stokes equation. *Journal of Fluid Mechanics*. 2006; (550):413–441.
- [3] **Levchenko V.D., Perepelkina A.Y.** Locally recursive non-locally asynchronous algorithms for stencil computation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018; 39(4):552–561.
- [4] **Perepelkina A., Levchenko V.** LRnLA algorithm ConeFold with non-local vectorization for LBM implementation. In: Voevodin V., Sobolev S. (Eds). *Supercomputing. Russian Supercomputing Days*. 2018. Part of the *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham; 2019; (965):101–113. DOI:10.1007/978-3-030-05807-4\_9.
- [5] **Levchenko V., Zakirov A., Perepelkina A.** GPU implementation of ConeTorre algorithm for fluid dynamics simulation. *Malyshkin V. (Ed). International Conference on Parallel Computing Technologies. Parallel Computing Technologies. Lecture Notes in Computer Science*. 2019; (11657):199–213. DOI:10.1007/978-3-030-25636-4\_16.
- [6] **Dorschner B., Bosch F., Karlin I.V.** Particles on demand for kinetic theory. *Physical Review Letters*. 2019; 12(13):130602.
- [7] **Zakirov A.V., Korneev B.A., Levchenko V.D., Perepelkina A.Yu.** On the conservativity of the Particles-on-Demand method for the solution of the discrete Boltzmann equation. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics. Keldysh Institute Preprints*; 2019: (035):19. DOI:10.20948/prepr-2019-35-e.
- [8] **Chikatamarla S.S., Karlin I.V.** Entropy and Galilean invariance of lattice Boltzmann theories. *Physical Review Letters*. 2006; 97(19):190601.

### Development of the LBM non-isothermal flows with arbitrarily large Mach number

ZIPUNOVA ELIZAVETA V.<sup>1,\*</sup>, PEREPELKINA ANASTASIA YU.<sup>1</sup>, ZAKIROV ANDREY V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 125047, Russia

<sup>2</sup>Kintech Lab, Moscow, 123298, Russia

\*Corresponding author: Zipunova Elizaveta V., e-mail: e.zipunova@gmail.com

Received December 20, 2019, revised September 22, 2020, accepted November 5, 2020

#### Abstract

*The purpose* of the paper is to demonstrate applicability of the Particle on Demand (PonD) D1Q5 method with the explicit calculation of the first three moments to problem with high speed of the flow. The standard LBM is applicable for small flow velocities. Thus to overcome this limitation we use PonD. In this work, we use conservative version of PonD — the D1Q5 method with the explicit calculation of the first three moments.

*Methodology.* The Pond over LBM was applied to the Riemann problem in order to demonstrate the advantage of the method. In this work, we choose the case when contact discontinuities could propagate at variable speed.

*Findings.* If the interpolation pattern is fixed relative to the point at which there is a current update of the discrete distribution function, then the transfer step can be written explicitly, thus the scheme is conservative. On the other hand, this imposes additional restrictions on the temperature and the flow rate. But even if the PonD scheme is limited to a fixed interpolation pattern, it is possible to simulate flows with larger values of the Mach number than in the case when the classical method of lattice Boltzmann equations is used.

*Originality/value.* In the described particular case of the PonD method, it is possible to avoid iterations by calculating the temperature and velocity values directly at a new time layer. In this work, we have investigated the properties and the range of applicability (admissible values of temperature and velocity) of such modification of PonD.

*Keywords:* lattice Boltzmann method, discrete Boltzmann equation, conservative numerical scheme.

*Citation:* Zipunova E.V., Perepelkina A.Yu., Zakirov A.V. Development of the LBM non-isothermal flows with arbitrarily large Mach number. Computational Technologies. 2021; 26(1):62–71.DOI:10.25743/ICT.2021.26.1.005. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The work is supported by Russian Science Foundation, grant No. 18-71-10004.

## References

1. **Succi S.** The lattice Boltzmann equation: For fluid dynamics and beyond. Oxford University Press; 2001: 308.
2. **Shan X., Yuan X., Chen H.** Kinetic theory representation of hydrodynamics: A way beyond the Navier–Stokes equation. Journal of Fluid Mechanics. 2006; (550):413–441.
3. **Levchenko V.D., Perepelkina A.Y.** Locally recursive non-locally asynchronous algorithms for stencil computation. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018; 39(4):552–561.
4. **Perepelkina A., Levchenko V.** LRnLA algorithm ConeFold with non-local vectorization for LBM implementation. Voevodin V., Sobolev S. (Eds). Supercomputing. Russian Supercomputing Days. 2018. Part of the Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham; 2019; (965):101–113. DOI:10.1007/978-3-030-05807-4\_9.
5. **Levchenko V., Zakirov A., Perepelkina A.** GPU implementation of ConeTorre algorithm for fluid dynamics simulation. In: Malyshkin V. (Ed). International Conference on Parallel Computing Technologies. Parallel Computing Technologies. Lecture Notes in Computer Science. 2019; (11657):199–213. DOI:10.1007/978-3-030-25636-4\_16.
6. **Dorschner B., Bosch F., Karlin I.V.** Particles on demand for kinetic theory. Physical Review Letters. 2019; 12(13):130602.
7. **Zakirov A.V., Korneev B.A., Levchenko V.D., Perepelkina A.Yu.** On the conservativity of the Particles-on-Demand method for the solution of the discrete Boltzmann equation. Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics. Keldysh Institute Preprints; 2019: (035):19. DOI:10.20948/prepr-2019-35-e.
8. **Chikatamarla S.S., Karlin I.V.** Entropy and Galilean invariance of lattice Boltzmann theories. Physical Review Letters. 2006; 97(19):190601.