

Математическое моделирование глубинного селективного водозаборного процесса в непризматическом непрерывно стратифицированном водоеме

И. Д. МУЗАЕВ^{1,2,*}, К. С. ХАРЕБОВ¹, Н. И. МУЗАЕВ¹

¹Геофизический институт Владикавказского научного центра РАН, 362002, Владикавказ, Северная Осетия — Алания

²Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, 362002, Республика Северная Осетия — Алания

*Контактный автор: Музаев Илларион Давидович, e-mail: illarion.muzaev@yandex.ru

Поступила 3 марта 2021 г., доработана 9 августа 2021 г., принята в печать 13 августа 2021 г.

Разработана математическая модель селективного водозаборного процесса в узко-глубоком непризматическом водоеме при наличии в нем прямой непрерывной плотностной стратификации. Модель представляет контактную краевую задачу потенциального движения воды в указанном водоеме. Движение воды обусловлено забором воды через два окна, устроенных одно над другим на напорной грани водоема. Учтена непризматическая конфигурация водоема в плане и по вертикали. Непризматические конфигурации описаны экспоненциальными функциями. В результате аналитического решения поставленной контактной краевой задачи получена совокупность расчетных формул, которая с привлечением конечно-разностного метода Рунге – Кутты и компьютерных вычислительных систем позволила построить линии тока, приходящие к верхней кромке нижнего водозаборного окна. Вычислительные эксперименты показали, что по мере увеличения скорости потока воды через верхнее окно указанные линии тока опускаются вниз. При этом становится возможным управлять водозаборным процессом через нижнее окно с тем расчетом, чтобы в нижнее окно вода поступала из нижних холодных слоев водоема, что часто бывает необходимо для нужд теплоотвода от тепловыделяющих устройств предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций.

Ключевые слова: селективный водозабор, стратифицированный водоем, плотностное число Фруда, потенциал скорости, линии тока, критические положения поверхности раздела слоев воды, краевая задача, ряд Фурье.

Цитирование: Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Математическое моделирование глубинного селективного водозаборного процесса в непризматическом непрерывно стратифицированном водоеме. Вычислительные технологии. 2021; 26(5):15–29. DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.003.

Введение

Для обеспечения интенсивного отвода тепла от тепловыделяющих элементов различных промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций, в летнее время необходимо подавать воду из глубинных (холодных) слоев температурно-стратифицированного водоема — источника водоснабжения. Однако даже при весьма низких скоростях забора воды донное водозаборное окно захватывает воду либо из большей части его толщи, либо из всей толщины водоема, а к водоохлаждающим устройствам поступает вода с завышенной температурой. Это в свою очередь ведет к снижению интенсивности теплоотвода от устройств, что может вызвать их перегрев и аварийную ситуацию. В настоящее время проблема обеспечения селективного водозабора из температурно-стратифицированного водоема является весьма актуальной как в теоретическом аспекте, так и в прикладном, особенно при водоснабжении тепловых и атомных электростанций.

В процессе расчета и проектирования селективных водозаборных устройств в основном руководствуются эмпирическими формулами, полученными по результатам экспериментальных исследований [1–4]. Эти весьма упрощенные формулы составлены при условии, что в источнике водоснабжения имеет место двухслойная плотностная стратификация и они могут быть использованы только для вычисления критического положения поверхности раздела двух слоев воды. Критическим положением поверхности раздела слоев называют тот уровень поверхности, при котором он поднимается или опускается до кромки водозаборного окна и в водозаборное окно начинает поступать вода из двух слоев.

При проектировании и гидравлических расчетах глубинных водозаборных устройств в справочных литературных источниках [1, 2, 4], а также в приложении к строительным нормам и правилам [3] рекомендуется использовать следующие эмпирические расчетные формулы для вычисления критического положения поверхности раздела слоев и тем самым обеспечения селективного водозаборного процесса из глубинных холодных слоев воды в двухслойном стратифицированном водоеме (рис. 1).

Формула Д. Харлемана [1–5]

$$\eta = 0.87h_0(\text{Fr})^{0.51}$$

с пределами применимости $0.08 \leq \text{Fr} \leq 13$, $0.2 \leq \frac{\eta}{h_0} \leq 5$.

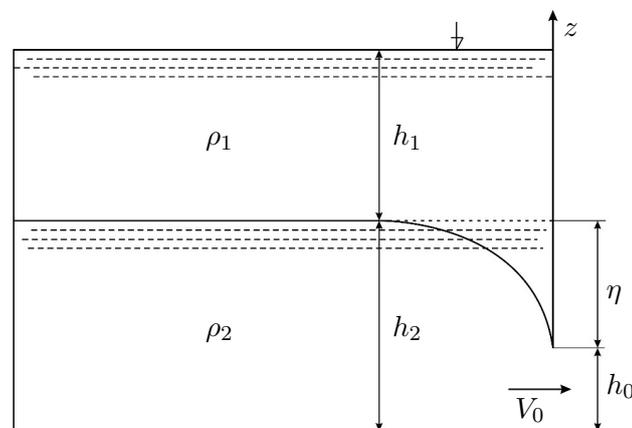


Рис. 1. Расчетная схема для формул Д. Харлемана и И. Макарова

Fig. 1. Calculation scheme for the formulas by D. Harleman and I. Makarov

Формула И. Макарова [1–5]

$$\eta = 1.3h_0(\text{Fr})^{0.5}$$

с пределами применимости $0.2 \leq \text{Fr} \leq 2.5$. Здесь $\text{Fr} = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}}}$ — плотностное число Фруда; V_0 — средняя скорость забора воды через окно; h_0 — высота окна; ρ_1 и ρ_2 — плотность воды в верхнем и нижнем слоях водоема; g — ускорение силы тяжести. Эти эмпирические формулы установлены при соблюдении вертикального двумерного движения жидкости, т. е. когда ширина прямоугольного водозаборного окна равна ширине экспериментального лотка.

С целью тестирования вышеприведенных формул рассмотрим двухслойно-стратифицированный водоем, где плотности воды в верхнем и нижнем слоях равны $\rho_1 = 998 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$. Высота водозаборного окна $h_0 = 0.5 \text{ м}$. Расстояние от поверхности раздела слоев до верхней кромки $\eta = 1 \text{ м}$.

Вычислим по этим двум формулам скорости забора воды через окно при условии, что поверхность раздела слоев опустилась до верхней кромки окна, т. е. имеет место критическое положение поверхности раздела слоев.

Согласно формуле Д. Харлемана

$$V_0 = \sqrt{gh_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}} \left(\frac{\eta}{0.87h_0} \right)^{1.96}.$$

Согласно формуле И. Макарова

$$V_0 = \left(\frac{\eta}{1.3h_0} \right)^2 \sqrt{gh_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}}.$$

Подставив значения входных параметров, получим следующие числовые значения для критической скорости забора воды: по формуле Д. Харлемана $V_0 \approx 0.5 \text{ м/с}$, по формуле И. Макарова $V_0 \approx 0.23 \text{ м/с}$. Следовательно, при одних и тех же числовых значениях входных параметров стратифицированного водоема и одинаковом заглублении водозаборного окна значения критической скорости забора воды, вычисленные по формуле Д. Харлемана и формуле И. Макарова, существенно разнятся. В связи с этим можно сделать вывод о том, что проблема забора воды из глубинных слоев слоисто-стратифицированного водоема нуждается в существенной доработке как в теоретическом, так и в экспериментальном аспекте.

Когда в водоеме — источнике водоснабжения имеет место прямая непрерывная стратификация, для обеспечения селективного водозаборного процесса из такого водоема рекомендовано [1–4] в расчетах и при проектировании использовать график зависимости относительной толщины активного слоя воды в водоеме от плотностного числа Фруда (рис. 2). Из представленного графика следует, что критическое значение плотностного числа Фруда составляет 0.28. При таком значении числа Фруда в водозаборное окно захватывается вода из всей толщи водоема.

В статье [6] описан способ управления глубинным водозаборным процессом с тем расчетом, чтобы в основное донное водозаборное окно вода поступала из придонных холодных слоев стратифицированного водоема. Управление осуществляется путем вариации скорости забора воды через вспомогательное окно, устроенное над основным окном. Исходя из проведенного математического и компьютерного моделирования в

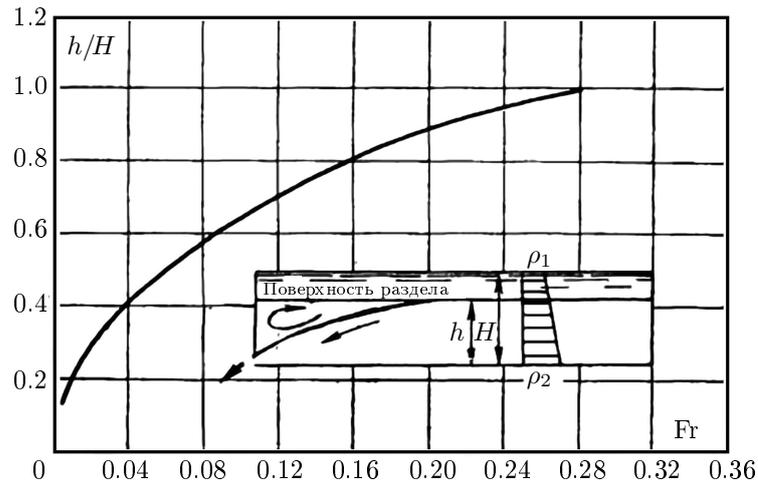


Рис. 2. График зависимости относительной толщины активного слоя от плотностного числа Фруда

Fig. 2. Graph of the dependence for the relative thickness of the active layer versus the Froude density number

статье доказано утверждение о том, что по мере увеличения скорости забора воды через верхнее дополнительное окно толщина активного слоя воды, из которого вода поступает в основное окно, уменьшается и тем самым становится возможным снизить температуру забираемой воды до необходимого значения. Математическое моделирование и компьютерные расчеты проведены для случая, когда водоем схематизируется в виде прямоугольного параллелепипеда.

В настоящей статье вышеуказанные разработки обобщены для непрямоугольного стратифицированного водоема, когда его ширина изменяется как в продольном направлении, так и в вертикальном (рис. 3, 4).

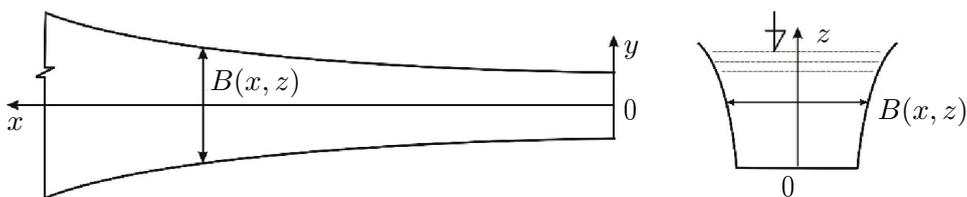


Рис. 3. Непрямоугольная конфигурация водоема

Fig. 3. Non-prismatic configuration of the reservoir

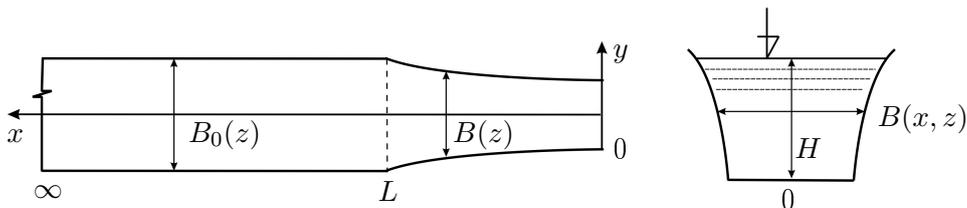


Рис. 4. Расчетная схема непрямоугольного водоема

Fig. 4. The design scheme of a non-prismatic reservoir

1. Математическое моделирование управления глубинным селективным водозабором в непризматическом водоеме

Предположим, что в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 \leq x \leq \infty$, $-0.5B(x, z) \leq y \leq 0.5B(x, z)$, $0 \leq z \leq H$ и заполненная идеальной малосжимаемой жидкостью, имитирует узко-глубокое непризматическое вертикально стратифицированное по плотности горное водохранилище. Водоем используется в качестве источника водоснабжения различных промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций. Селективно забираемая холодная вода из водоема предназначена для охлаждения и теплоотвода от тепловыделяющих элементов предприятий, в результате чего можно предотвратить перегрев элементов и в итоге исключить возникновение аварийной ситуации.

В расчетной схеме на рис. 3 ось Ox направлена вдоль водоема, ось Oy — поперек, а ось Oz — вертикально вверх. Плоскость $z = 0$ совмещена с дном водоема, $z = H$ — уравнение свободной поверхности водоема, $y = \pm 0.5B(x, z)$ — уравнение боковых граней водоема. Плоскость $x = 0$ совмещена с вертикальной гранью, на которой расположены два водозаборных окна, одно над другим по вертикали.

По аналогии с работой [6] можно доказать утверждение о том, что в схематизированном узко-глубоком непризматическом стратифицированном водоеме стационарное потенциальное движение малосжимаемой жидкости в рамках гидродинамики и гидравлики можно смоделировать дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(x, z)$ — потенциал средней по ширине узко-глубокого водоема скорости движения воды; $B = B(x, z)$ — ширина водоема, зависящая от продольной координаты x (продольная непризматичность водоема) и вертикальной координаты z (вертикальная непризматичность водоема); $\rho = \rho(z)$ — плотность воды с вертикальной температурной стратификацией.

В дифференциальном уравнении (1) искомой величиной является потенциал φ . Ширина водоема $B(x, z)$ считается заданной функцией. На вертикальной грани $x = 0$, где расположены водозаборные окна, ставится граничное условие

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = -V(z). \quad (2)$$

На бесконечности ($x = \infty$) ставится граничное условие

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=\infty} = -U_0, \quad (3)$$

$$V(z) = \begin{cases} V_1 & \text{при } z \in \left[z_{1,0} - \frac{h_1}{2}; z_{1,0} + \frac{h_1}{2} \right], \\ V_2 & \text{при } z \in \left[z_{2,0} - \frac{h_2}{2}; z_{2,0} + \frac{h_2}{2} \right], \\ 0 & \text{при } z \in \left(0; z_{1,0} - \frac{h_1}{2} \right) \cup \left(z_{1,0} + \frac{h_1}{2}; z_{2,0} - \frac{h_2}{2} \right) \cup \left(z_{2,0} + \frac{h_2}{2}; H \right). \end{cases}$$

Здесь $z_{1,0}$ и $z_{2,0}$ — отметки центров соответственно нижнего и верхнего водозаборных окон относительно дна водоема $z = 0$; h_1 и h_2 — высота нижнего и верхнего окна соответственно; V_1 и V_2 — скорость забора воды через нижнее и верхнее окно соответственно; U_0 — скорость поступления воды в водоем из бесконечно удаленной от окон местности.

Известно, что устойчивый селективный водозаборный процесс в стратифицированном водоеме может иметь место при малых значениях скоростей [1–11]. Это обусловлено, тем что окна при высоких скоростях забора захватывают всю толщу воды, происходит перемешивание теплых и холодных слоев по всему объему водоема и тем самым нарушается селективный водозаборный процесс.

На дне и неподвижной свободной поверхности водоема ставятся следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (4)$$

Надо отметить, что второе граничное условие из (4) может удовлетворяться только при соблюдении балансового соотношения, т. е. расход забираемой из водоема воды должен равняться расходу поступающей в него воды:

$$U_0 \int_0^H B(\infty, z) dz = (V_1 h_1 + V_2 h_2) b_0, \quad (5)$$

где b_0 — ширина окна.

Дифференциальное уравнение (1), граничные условия (2)–(4) совместно с балансовым условием (5) в совокупности представляют математическую модель селективного водозаборного процесса в непризматическом стратифицированном узко-глубоком водоеме, когда вода из него забирается через два окна.

2. Решение поставленной краевой задачи в частном случае

Коэффициенты дифференциального уравнения (1) являются переменными, зависящими от координат x и z . В связи с этим решение общей краевой задачи (1)–(5) при произвольной функции $B(x, z)$ аналитическими методами связано с большими математическими трудностями. В частном случае, когда плотность воды $\rho(z)$ и ширина водоема $B(x, z)$ аппроксимируются экспоненциальными функциями, коэффициенты дифференциального уравнения (1) становятся постоянными величинами и указанная краевая задача решается аналитически.

В качестве примера рассмотрим водоем, состоящий из двух участков, как это показано на рис. 4. Оба участка имеют одинаковую вертикальную конфигурацию. Первый участок расположен в пределах $0 \leq x \leq L$ и имеет также непризматическую конфигурацию в продольном направлении. Второй участок расположен в пределах $L \leq x \leq \infty$ и имеет призматическую конфигурацию в продольном направлении. Второй участок является продолжением до бесконечности первого участка.

Упрощающим предположением является то, что плотность $\rho(z)$ и значения ширины водоема $B(x, z)$ и $B_0(z)$ аппроксимируются экспоненциальными функциями вида

$$\rho(z) = \rho_0 e^{S_0 z}, \quad B(x, z) = \begin{cases} B_0 e^{S_1 x + S_2 z} & \text{при } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq H, \\ B_0 e^{S_1 L + S_2 z} & \text{при } L \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq z \leq H, \end{cases} \quad (6)$$

$$S_0 = \frac{1}{H} \ln \frac{\rho(H)}{\rho(0)}, \quad S_1 = \frac{1}{L} \ln \frac{B(L, 0)}{B(0, 0)}, \quad S_2 = \frac{1}{H} \ln \frac{B(0, H)}{B(0, 0)}.$$

Здесь $\rho(H)$ и $\rho(0)$ — плотность воды в водоеме на ее свободной поверхности и на дне соответственно; $B(0, 0) = B_0$ — ширина водоема на дне в начале первого участка; $B(L, 0)$ — ширина водоема на дне в конце первого участка.

Очевидно, что вертикальный температурный градиент в водоеме может быть достаточно большим. Например, если температура на поверхности и дне водоема $T_H = 21$ °C и $T_0 = 4$ °C соответственно, глубина водоема $H = 10$ м, то градиент температуры равен 1.7 град./м. Однако градиент относительной плотности по глубине при таких температурах будет ничтожно малой величиной [1–4, 6–8]:

$$\frac{\rho_0 - \rho_H}{\rho_0 H} = \frac{1000 - 998.02}{1000 \cdot 10} \approx 0.000198 \text{ м}^{-1}.$$

Исходя из этого принимается предположение о том, что влияние сжимаемости воды, обусловленное вертикальным градиентом температуры на поле вектора скоростей движения воды, можно не учитывать при $4 \leq T \leq 21$ °C в связи с его ничтожно малым значением. Что касается обратного влияния движения жидкости на поле температуры воды и в итоге на температуру забираемой через нижнее окно воды, то им нельзя пренебрегать в связи с его существенным влиянием на температуру забираемой воды.

При вышеприведенных упрощающих предположениях краевая задача (1)–(5) приводится к следующей контактной краевой задаче математической физики:

$$\Delta \varphi_1(x, z) + S_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + S_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L, \quad (7)$$

$$\Delta \varphi_2(x, z) + S_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } L \leq x \leq \infty, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -V(z), \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=L}, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=\infty} = -U_0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right|_{z=H} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$U_0 = \frac{(V_1 h_1 + V_2 h_2) b_0 S_2}{(e^{S_2 H} - 1) B_0} e^{-S_1 L}, \quad (11)$$

где Δ — двумерный дифференциальный оператор Лапласа.

Путем последовательного применения двух подстановок

$$\varphi_i(x, z) = e^{-\frac{S_2}{2} z} \phi_i(x, z), \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \frac{S_2}{2} \phi_i = \psi_i(x, z), \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

краевая задача (7)–(10) приводится к следующей контактной краевой задаче относительно новых искомых функций ψ_1 и ψ_2 :

$$\Delta \psi_1(x, z) + S_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{S_2^2}{4} \psi_1 = 0, \quad (14)$$

$$\Delta \psi_2(x, z) - \frac{S_2^2}{4} \psi_2 = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{d}{dz} \left(V(z) e^{\frac{S_2}{2} z} \right) + \frac{S_2}{2} V(z) e^{\frac{S_2}{2} z}, \quad (16)$$

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad \text{при } x = L, \quad \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0, \quad (17)$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = H. \quad (18)$$

Граничные условия (18) позволяют искать решения дифференциальных уравнений (14) и (15) в виде следующих тригонометрических рядов по синусам [10, 12]:

$$\psi_1(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,n}(x) \sin a_n z, \quad \psi_2(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2,n}(x) \sin a_n z, \quad a_n = \frac{n\pi}{H}. \quad (19)$$

В результате подстановки рядов (19) в дифференциальные уравнения (14) и (15), а также в граничные условия (16) и (17) для вычисления неизвестных функций $\psi_{1,n}(x)$ и $\psi_{2,n}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, получается следующая контактная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 \psi_{1,n}}{dx^2} + S_1 \frac{d\psi_{1,n}}{dx} - \left(a_n^2 + \frac{S_2^2}{4} \right) \psi_{1,n} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \psi_{2,n}}{dx^2} - \left(a_n^2 + \frac{S_2^2}{4} \right) \psi_{2,n} = 0, \quad (21)$$

$$\left. \frac{d\psi_{1,n}}{dx} \right|_{x=0} = \alpha_n, \quad \psi_{1,n} = \psi_{2,n}, \quad \frac{d\psi_{1,n}}{dx} = \frac{d\psi_{2,n}}{dx} \quad \text{при } x = L, \quad (22)$$

$$\left. \frac{d\psi_{2,n}}{dx} \right|_{x=\infty} = 0, \quad (23)$$

где коэффициенты в разложении в ряд Фурье по синусам правой части выражения (16) равны

$$\alpha_n = \frac{2}{H} \int_0^H \left[\frac{d}{dz} \left(-V(z) e^{\frac{S_2}{2} z} \right) + \frac{S_2}{2} V(z) e^{\frac{S_2}{2} z} \right] \sin a_n z dz. \quad (24)$$

Решения дифференциальных уравнений (20) и (21), удовлетворяющих граничным условиям (22) и (23), имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{1,n} &= \frac{\alpha_n}{\Delta^*} \left[\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{S_1}{2} \right) + e^{-[2\lambda_1 L - (\lambda_1 - \frac{S_1}{2})x]} - \left(\lambda_2 + \lambda_1 - \frac{S_1}{2} \right) e^{-(\lambda_1 + \frac{S_1}{2})x} \right], \\ \psi_{2,n} &= -\frac{2\alpha_n \lambda_1}{\Delta^*} e^{-[(\lambda_1 + \frac{S_1}{2})L + \lambda_2(x-L)]}, \\ \Delta^* &= \left(\lambda_1 - \frac{S_1}{2} \right) \left(\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{S_1}{2} \right) e^{-2\lambda_1 L} + \left(\lambda_1 + \frac{S_1}{2} \right) \left(\lambda_2 + \lambda_1 - \frac{S_1}{2} \right), \\ \lambda_1 &= \sqrt{a_n^2 + \frac{S_2^2}{4} + \frac{S_1^2}{4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{a_n^2 + \frac{S_2^2}{4}}, \quad a_n = \frac{n\pi}{H}. \end{aligned} \quad (25)$$

Затем обратным ходом из подстановок (12) и (13) определяются функции ϕ_i и φ_i , $i = 1, 2$. Окончательно потенциалы φ_1 и φ_2 получаются как

$$\varphi_1(x, z) = \varphi_{1,0}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,n}(x) I_n(z), \quad \varphi_2(x, z) = \varphi_{2,0}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2,n}(x) I_n(z),$$

где

$$\varphi_{1,0}(x) = U_0 \frac{e^{S_1(L-x)} - e^{S_1L}}{S_1}, \quad \varphi_{2,0}(x) = -U_0x, \quad (26)$$

$$I_n(z) = \frac{\frac{S_2}{2} \sin a_n z + a_n \cos a_n z}{a_n^2 + \frac{S_2^2}{4}} e^{-\frac{S_2}{2}z}. \quad (27)$$

Для составляющих векторов поля скоростей соответственно на первом и втором участках водоема получаются расчетные формулы

$$\mathbf{V}_{1,x} = -U_0 e^{S_1(L-x)} - \sum_{n=1}^{\infty} \psi'_{1,n}(x) I_n(z), \quad (28)$$

$$\mathbf{V}_{1,z} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,n}(x) e^{-\frac{S_2}{2}z} \sin a_n z, \quad (29)$$

$$\mathbf{V}_{2,x} = -U_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \psi'_{2,n}(x) I_n(z), \quad (30)$$

$$\mathbf{V}_{2,z} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2,n}(x) e^{-\frac{S_2}{2}z} \sin a_n z, \quad (31)$$

где $\psi'_{i,n}(x)$, $i = 1, 2$, — производные от $\psi_{i,n}(x)$, $i = 1, 2$,

$$\alpha_n = \frac{2}{H} \left[\mathbf{V}_1 \left(e^{\frac{S_1}{2}(z_{1,0} + \frac{h_1}{2})} \sin a_n \left(z_{1,0} + \frac{h_1}{2} \right) - e^{\frac{S_1}{2}(z_{1,0} - \frac{h_1}{2})} \sin a_n \left(z_{1,0} - \frac{h_1}{2} \right) \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{V}_2 \left(e^{\frac{S_2}{2}(z_{2,0} + \frac{h_2}{2})} \sin a_n \left(z_{2,0} + \frac{h_2}{2} \right) - e^{\frac{S_2}{2}(z_{2,0} - \frac{h_2}{2})} \sin a_n \left(z_{2,0} - \frac{h_2}{2} \right) \right) \right].$$

Вертикальная грань $x = 0$, на которой расположены водозаборные окна, обтекается вертикальным потоком воды со средней скоростью

$$\bar{U}(x) = \frac{1}{H - h_1} \int_{h_1}^H \mathbf{V}_{1,z}(x, z) dz.$$

На указанной грани образуется ламинарный пограничный слой воды, где происходит перераспределение вертикальной составляющей вектора скорости $\mathbf{V}_{1,z}(x, z)$. Толщина слоя вычислена методом последовательного приближения, изложенным в монографии [14]. Перераспределение скорости $\mathbf{V}_{1,z}(x, z)$ в слое вычислено методом, разработанным в аналогичной статье [6].

3. Постановка и решение контактной краевой задачи для вычисления толщины активного слоя воды в схематизированном водоеме, состоящем из двух участков

Известно [1–3], что активным слоем называется часть слоя воды в водоеме, из которого через нижнее окно селективно забирается вода. Ее толщина вычисляется путем постановки и решения нелинейной контактной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \frac{\mathbf{V}_{1,z}(x, z)}{\mathbf{V}_{1,x}(x, z)} \quad \text{при } 0 \leq x \leq L, \\ \frac{dz_2}{dx} &= \frac{\mathbf{V}_{2,z}(x, z)}{\mathbf{V}_{2,x}(x, z)} \quad \text{при } L < x < \infty, \end{aligned} \quad (32)$$

$$z_1|_{x=0} = z_{1,0} + \frac{h_1}{2}, \quad z_1 = z_2 \quad \text{при } x = L. \quad (33)$$

Нелинейные дифференциальные уравнения (32) с учетом граничных условий (33) решены конечно-разностным методом Рунге–Кутты [13]. Согласно указанному методу дифференциальные уравнения (32) заменяются на их конечно-разностные аналоги

$$\begin{aligned} z_{j,i+1} &= z_{j,i} + \frac{1}{6} (K_{0,i}^j + 2K_{1,i}^j + 2K_{2,i}^j + K_{3,i}^j), \\ K_{0,i}^j &= \frac{\mathbf{V}_{j,z}(x_{j,i}, z_{j,i})}{\mathbf{V}_{j,x}(x_{j,i}, z_{j,i})} \Delta, \\ K_{1,i}^j &= \frac{\mathbf{V}_{j,z}(x_{j,i} + 0.5\Delta, z_{j,i} + 0.5K_{0,i}^j)}{\mathbf{V}_{j,x}(x_{j,i} + 0.5\Delta, z_{j,i} + 0.5K_{0,i}^j)} \Delta, \\ K_{2,i}^j &= \frac{\mathbf{V}_{j,z}(x_{j,i} + 0.5\Delta, z_{j,i} + 0.5K_{1,i}^j)}{\mathbf{V}_{j,x}(x_{j,i} + 0.5\Delta, z_{j,i} + 0.5K_{1,i}^j)} \Delta, \\ K_{3,i}^j &= \frac{\mathbf{V}_{j,z}(x_{j,i} + \Delta, z_{j,i} + K_{2,i}^j)}{\mathbf{V}_{j,x}(x_{j,i} + \Delta, z_{j,i} + K_{2,i}^j)} \Delta, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \quad x_{i+1} = x_i + \Delta, \quad x_n = L, \\ z_{1,1} &= z_{1,0} + \frac{h_1}{2}, \quad z_{1,n} = z_{2,1} \quad \text{при } x = L, \quad \Delta — \text{ шаг разностной схемы.} \end{aligned} \quad (34)$$

Расчетные формулы для составляющих вектора скоростей в обоих участках получены в виде бесконечных тригонометрических рядов. В каждом слагаемом рядов в качестве множителей содержатся экспоненциальные функции с отрицательными степенями. Все показатели степени резко возрастают по мере увеличения натурального порядкового номера. В связи с этим скорости сходимости тригонометрических рядов довольно высокие. Вычислительные эксперименты показывают, что во всех рядах достаточно суммировать 10 000 членов. Дальнейшее увеличение числа членов в рядах на результаты вычислений практически не влияет. Шаг разностной схемы в методе Рунге–Кутты подбирался вычислительными экспериментами на быстродействующем компьютере. Экспериментами установлено, что во всех расчетах шаг Δ можно взять равным 0.001 м.

4. Основные результаты

Проведены вычислительные эксперименты на компьютере по конечно-разностной схеме Рунге–Кутты, расписанной в выражениях (32)–(34) и вычисленной по формулам (27)–(31). Целью экспериментов являлось:

1. Установление степени влияния параметров непризматичности S_1 и S_2 на толщину активного слоя воды в непризматическом водоеме, из которого селективно отбирается вода через нижнее водозаборное окно.

2. Адаптация способа забора воды из призматического стратифицированного водоема, обеспечивающего водоотбор исключительно из глубинных — холодных слоев [6], для непризматического водоема. В основу этого способа положен гидродинамический эффект, согласно которому по мере увеличения скорости забора воды из верхнего (вспомогательного) окна толщина активного слоя, откуда отбирается вода, резко уменьшается. В этом случае становится возможным забирать воду через нижнее окно исключительно из нижних (холодных) слоев стратифицированного водоема.

Зависимости результатов вычислительных экспериментов от числовых значений параметров S_1 и S_2 представлены на рис. 5. Для задания числовых значений входных параметров, а также для компьютерных расчетов использовалась международная система SI.

На рис. 5, а представлены графики линии тока, приходящие к верхней кромке нижнего водозаборного окна. Управляющему параметру V_2 последовательно присваивались числовые значения из промежутка $V_2 \in [0; 0.2]$ с шагом $\Delta V_2 = 0.04$ м/с. Осталь-

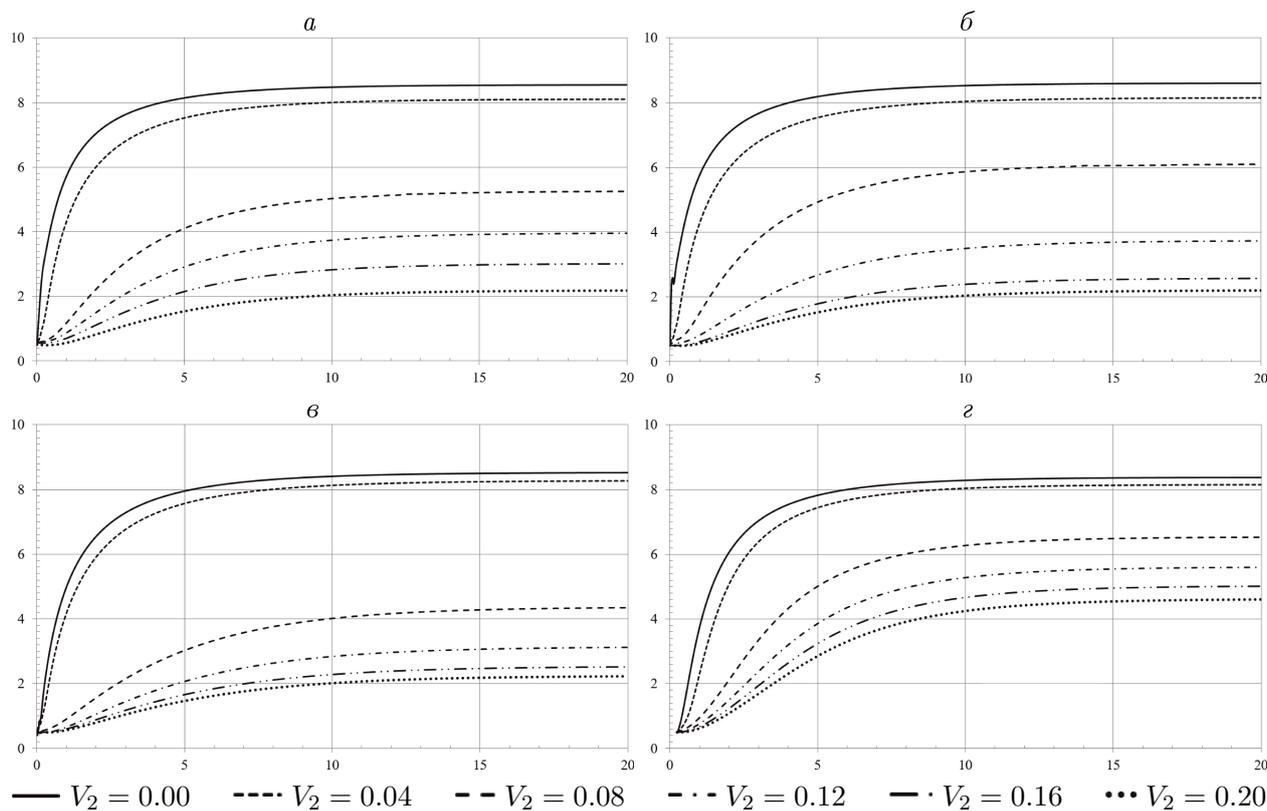


Рис. 5. Графики линии тока при вариации управляющего параметра V_2 в промежутке $V_2 \in [0; 0.2]$ с шагом $\Delta V_2 = 0.04$ м/с: а — $S_1 = 0$; $S_2 = 0.0001$; б — $S_1 = \frac{1}{L} \ln 10$; $S_2 = 0.0001$; в — $S_1 = \frac{1}{25} \ln 10$; $S_2 = 0.0001$; г — $S_1 = 0$; $S_2 = \frac{1}{H} \ln 5$

Fig. 5. Graphs of the current line with a variation of the control parameter V_2 in the interval $V_2 \in [0; 0.2]$ with the step $\Delta V_2 = 0.04$ m/s: а — $S_1 = 0$; $S_2 = 0.0001$; б — $S_1 = \frac{1}{L} \ln 10$; $S_2 = 0.0001$; в — $S_1 = \frac{1}{25} \ln 10$; $S_2 = 0.0001$; г — $S_1 = 0$; $S_2 = \frac{1}{H} \ln 5$

ным входным параметрам присваивались следующие числовые значения: $H = 10$ м; $L = 100$ м; $V_1 = 0.06$ м/с; $\rho_1 = 998.02$ кг/м³; $\rho_2 = 1000$ кг/м³; $S_1 = 0$; $S_2 = 0.0001$. Эти значения параметров S_1 и S_2 соответствуют водоему с призматической конфигурацией как в продольном, так и в вертикальном направлении. Из указанного рисунка следует, что по мере увеличения скорости водозабора через верхнее окно указанная линия тока опускается вниз. Тем самым толщина активного слоя, из которого забирается вода через нижнее окно, уменьшается. Если при $V_2 = 0$ толщина активного слоя составляет $z = 8.3$ м, то по мере увеличения параметра V_2 толщина z уменьшается и при $V_2 = 0.2$ м/с величина z уменьшилась до $z = 2.4$ м. Если температура воды по глубине изменяется от $T_H = 21$ °С до $T_0 = 4$ °С по линейному закону, то при вышеотмеченных условиях температура забираемой воды падает от 11 до 6 °С.

На рис. 5, б представлены аналогичные графики для линии тока с той разницей, что параметрам непризматичности присвоены числовые значения $S_1 = \frac{1}{L} \ln 10$ и $S_2 = 0.0001$. Геометрически этим значениям соответствует водоем, у которого начиная от водозаборных окон ширина по длине увеличивается в десять раз на расстоянии $L = 100$ м, а ширина в вертикальном направлении не изменяется.

Сопоставление графиков, представленных на рис. 5, а и б, показывает, что при таких видах конфигурации водоемов значения толщины активных слоев при $V_2 = 0.08$ м/с равны $z = 5.3$ м и $z = 6.1$ м соответственно. Расхождение между ними при всех значениях V_2 составляет не более 15 %.

Для случая когда $S_1 = \frac{1}{25} \ln 10$, $S_2 = 0.0001$, соответствующие графики для линии тока представлены на рис. 5, в. Значения параметров S_1 и S_2 соответствуют случаю, когда водоем на расстоянии $L = 25$ м от водозаборных окон расширяется в десять раз, а по глубине ширина остается постоянной величиной. Сопоставление этих графиков при $V_2 = 0.08$ м/с показывает, что $z = 5.3$ м для призматического водоема и $z = 4.2$ м для непризматического. Расхождение между ними составляет около 26 %.

На рис. 5, г представлены аналогичные графики для рассматриваемой линии тока, когда учитывается вертикальная (глубинная) непризматичность водоема. При $S_2 = \frac{1}{10} \ln 5 \approx 0.16$, $S_1 = 0$ ширина водоема на поверхности в пять раз больше, чем на дне, а в продольном направлении ширина водоема не изменяется.

Сопоставление графиков, представленных на рис. 5, г, с аналогичными графиками на рис. 5, а показывает, что вертикальная (глубинная) непризматичность водоема существенно влияет на толщину активного слоя. В данном случае $z = 4.3$ м, тогда как $z = 2.4$ м в случае, когда $S_2 = 0.0001$.

Заключение

Проведено математическое моделирование селективного водозаборного процесса в узкоглубоком непризматическом водоеме с вертикальной плотностной (температурной) стратификацией, когда из него вода забирается через два глубинных окна, устроенных одно над другим по вертикали. Составленная модель представляет контактную краевую задачу для потенциала скорости безвихревого движения стратифицированной воды.

В результате аналитического решения поставленной задачи получена совокупность расчетных формул для составляющих вектора скорости движения воды. На основе этих формул поставлена нелинейная краевая задача для вычисления линии тока, приходя-

щей к верхней кромке нижнего водозаборного окна. Задача решена конечно-разностным методом Рунге – Кутты.

Проведены вычислительные эксперименты на компьютере по определению линии тока и толщины активного слоя, из которого вода забирается через нижнее водозаборное окно. На основе результатов вычислительных экспериментов доказано, что продольная и вертикальная непризматические конфигурации стратифицированного водоема существенно влияют на селективный водозаборный процесс. В связи с этим при проектировании и расчете селективных водозаборных устройств необходимо учитывать непризматическую конфигурацию водоема.

Доказано утверждение о том, что по мере увеличения скорости забора воды через верхнее окно толщина активного слоя, из которого забирается вода через нижнее окно, уменьшается до определенного минимального значения. В свою очередь, этот гидродинамический эффект позволяет забирать воду из глубинных холодных слоев водоема, что часто бывает необходимо для теплоотвода от тепловыделяющих элементов различных промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций.

Список литературы

- [1] **Аверкиев А.Г., Макаров И.И., Синотин В.И.** Бесплотинные водозаборные сооружения. М.; Л.: Энергия; 1969: 164.
 - [2] **Большаков В.А.** Справочник по гидравлике. Киев: Вища школа; 1977: 223–225.
 - [3] **Соколов А.С., Макаров И.И., Кравец В.И., Филиппова З.Р.** Методические указания по технологическим расчетам водоемов-охладителей. СПб.: ВНИИГ; 2003: 116.
 - [4] **Craya A.** Recherchestheorigines sur l'ecoulement de couches superposees de fluides de densites defferents. La Houille Blanche. 1949; (4):44–55.
 - [5] **Harleman D.R.F., Stolzenbach K.D.** Fluid mechanics of heat disposal from power generation. Annual Review of Fluid Mechanics. 1972; 4(1):7–32. DOI:10.1146/annurev.fl.04.010172.000255.
 - [6] **Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И.** Математическое моделирование способа управления селективным водозаборным процессом в стратифицированном водоеме. Вычислительные технологии. 2020; 25(5):4–16. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.002.
 - [7] **Музаев И.Д., Созанов В.Г.** К теории поверхностных гравитационных волн Коши – Пуассона в узких непризматических водоемах. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1995; (3):40–43.
 - [8] **Штеренлихт Д.В.** Гидравлика. М.: Колос; 2004: 655.
 - [9] **Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И.** Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука; 1991: 176.
 - [10] **Сретенский Л.Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука; 1977: 815.
 - [11] **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит.; 1947: 929.
 - [12] **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа; 1970: 710.
 - [13] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука; 1977: 830.
 - [14] **Гинзбург И.П.** Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та; 1970: 378.
-

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.003

Mathematical modelling of the selective deep water intake process in a non-prismatic continuously stratified reservoirMUZAEV ILLARION D.^{1,2,*}, KHAREBOV CONSTANTIN S.¹, MUZAEV NUGZAR I.¹¹Geophysical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 262002, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia — Alania²Vladikavkaz Department of Financial University under the Government of the Russian Federation, 362002, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia — Alania*Corresponding author: Muzaev Illarion D., e-mail: illarion.muzaev@yandex.ru

Received March 3, 2021, revised August 9, 2021, accepted August 13, 2021.

Abstract

Purpose. Mathematical simulation of the selective water intake process in a non-prismatic reservoir in the presence of continuous density stratification.

Methodology. Water intake is carried out through two windows arranged one above the other on the pressure face of the reservoir. The non-prismatic configuration of the reservoir both in vertical and horizontal planes is taken into account. The contact initial-boundary value problem of the theory for surface and internal gravitational waves in an ideal incompressible fluid is used.

Findings. As a result of the analytical solution of the mathematical model, a set of calculation formulas was obtained, which allows calculating the current lines coming to the upper edge of the lower water intake window.

Originality/value. Authors obtain a set of formulas for the components of the water velocity vector. Using the set, a nonlinear boundary value problem is posed and solved for calculation of the current line coming to the upper edge of the lower water intake window by the finite-difference Runge–Kutta method. Based on the results of computational experiments, authors proved that the longitudinal and vertical non-prismatic configuration of a stratified reservoir significantly affects the process of selective water intake. It is proved that as the rate of water intake through the upper window increases, the thickness of the active layer from which water is taken through the lower window decreases to a certain minimum value. This hydrodynamic effect allows taking water from the deep cold layers of the reservoir.

Keywords: selective water intake, stratified reservoir, Froude density number, velocity potential, current lines, critical positions of the interface of water layers, boundary value problem, Fourier series.

Citation: Muzaev I.D., Kharebov C.S., Muzaev N.I. Mathematical modelling of the selective deep water intake process in a non-prismatic continuously stratified reservoir. Computational Technologies. 2021; 26(5):15–29. DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.003. (In Russ.)

References

1. **Averkiev A.G., Makarov I.I., Sinotin V.I.** Besplotinnye vodozabornye sooruzheniya [Damless water intake structures]. Moscow; Leningrad: Energiya; 1969: 164. (In Russ.)
2. **Bolshakov V.A.** Spravochnik po gidravlike [Reference book on hydraulics]. Kiev: Vyshcha Shkola; 1977: 223–225. (In Russ.)
3. **Sokolov A.S., Makarov I.I., Kravets V.I., Filippova Z.R.** Metodicheskie ukazaniya po tekhnologicheskim raschetam vodoemov-okhladiteley [Guidance on technological calculations of water coolers]. Saints-Petersburg: VNIIG; 2003: 116. (In Russ.)

4. **Craya A.** Recherchestheorignes sur l'ecoulement de couches superposees de fluides de densites defferents. *La Houille Blanche*. 1949; (4):44–55.
5. **Harleman D.R.F., Stolzenbach K.D.** Fluid mechanics of heat disposal from power generation. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1972; 4(1):7–32. DOI:10.1146/annurev.fl.04.010172.000255.
6. **Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I.** Mathematical modelling of the method for controlling selective water intake process in a stratified reservoir. *Computational Technologies*. 2020; 25(5):4–16. (In Russ.)
7. **Muzaev I.D., Sozanov V.G.** On the theory of surface gravity waves Cauchy–Poisson in narrow non-prismatic reservoirs *Bulletin Of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 1995; (3):40–43. (In Russ.)
8. **Shterenlikht D.V.** *Gidravlika [Hydraulics]*. Moscow: Kolos; 2004: 655. (In Russ.)
9. **Belolipetskiy V.M., Kostyuk V.Yu., Shokin Yu.I.** *Matematicheskoe modelirovanie techeniy stratifitsirovannoy zhidkosti [Mathematical modelling of stratified fluid flows]*. Novosibirsk: Nauka; 1991: 176. (In Russ.)
10. **Sretenskiy L.N.** *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [Theory of wave motions of a fluid]*. Moscow: Nauka; 1977: 815. (In Russ.)
11. **Lamb H.** *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*. Moscow; Leningrad: Gos. Izd-vo Tekhn.-Teor. Lit.; 1947: 929. (In Russ.)
12. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Uraveniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Partial differential equation in mathematical physics]*. Moscow: Vysshaya Shkola; 1970: 710. (In Russ.)
13. **Korn G., Korn T.** *Mathematical handbook for scientists and engineers*. McGraw-Hill Book Company; 1968: 818.
14. **Ginzburg I.P.** *Teoriya soprotivleniya i teploperedachi [The theory of resistance and heat transfer]*. Leningrad: Izd-vo Leningradskogo universiteta; 1970: 378. (In Russ.)