Вычислительные технологии, 2021, том 26, № 5, с. 52–64. © ФИЦ ИВТ, 2021
Computational Technologies, 2021, vol. 26, no. 5, pp. 52–64. © FRC ICT, 2021
ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.005

Использование нестационарных автомодельных переменных для решения трехмерной задачи о распаде специального разрыва

С. П. Баутин[1,*], С. Л. Дерябин[2]
[1]Снежинский физико-технический институт, 456776, Снежинск, Россия
[2]Уральский государственный университет путей сообщения, 620034, Екатеринбург, Россия
[*]Контактный автор: Баутин Сергей Петрович, e-mail: spbautin@mail.ru
Поступила 26 февраля 2021 г., доработана 19 августа 2021 г., принята в печать 25 августа 2021 г.

Построение в физическом пространстве решения задачи о распаде специального разрыва, т. е. трехмерных изэнтропических течений политропного газа, возникающих после мгновенного разрушения в начальный момент времени непроницаемой стенки, отделяющей неоднородный движущийся газ от вакуума. В задаче учитывается действие силы тяжести и силы Кориолиса.

В систему уравнений газовой динамики введена автомодельная особенность в переменную, которая выводит с поверхности раздела. Для полученной системы поставлена задача Коши с данными на звуковой характеристике. Решение задачи строилось в виде степенных рядов. Часть коэффициентов рядов определялась при решении алгебраических уравнений, а часть из решений — обыкновенных дифференциальных уравнений. Методом мажорант доказана сходимость построенных рядов.

Построенное решение позволяет задавать начальные условия для разностной схемы при численном моделировании решений данной характеристической задачи Коши.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, нестационарные автомодельные переменные, звуковая характеристика, характеристическая задача Коши, сходящиеся ряды.

Цитирование: Баутин С.П., Дерябин С.Л. Использование нестационарных автомодельных переменных для решения трехмерной задачи о распаде специального разрыва. Вычислительные технологии. 2021; 26(5):52–64. DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.005.

Введение

В работах [1–5] исследовалась задача о распаде специального разрыва. Задача состоит в следующем. Пусть поверхность Г отделяет газ от вакуума. Если плотность газа по одну сторону от непроницаемой поверхности Г строго больше нуля, а по другую — равна нулю, то говорят, что это задача о распаде специального разрыва. В начальный момент времени стенка Г мгновенно разрушается и начинается истечение газа в вакуум.

Впервые задачу о распаде специального разрыва решил Риман для плоскосимметричных течений. Введя в системе уравнений газовой динамики автомодельную переменную $y = x/t$, Риман нашел точное решение [6], которое получило название "центрированная волна Римана". В дальнейшем решение рассматриваемой задачи как в одномерном, так и многомерном случае стало возможным при перемене ролей зависимой и независимой переменных или при построении решения в пространстве годографа. Тем самым в этих функциональных пространствах были построены многомерные аналоги центрированной волны Римана. Подобная методика построения течений с особенностью, подобной особенности в центрированной волне, позволила решить и другие содержательные задачи [7, 8]. Однако в этом случае восстановление значений газодинамических параметров в пространстве физических переменных вызывает определенную трудность. С помощью введения автомодельной особенности в выводящую с поверхности Γ независимую переменную удалось решить двумерную задачу о распаде специального разрыва с учетом силы тяжести в физическом пространстве [9].

В настоящей работе с помощью введения нестационарных автомодельных переменных в физическом пространстве строится решение задачи о распаде специального разрыва для трехмерных изэнтропических течений политропного газа при учете действия сил тяжести и Кориолиса. Последнее позволяет моделировать течения в восходящих закрученных потоках, которые в природе встречаются в виде торнадо и тропических циклонов [10].

Заметим, что зарубежные исследователи практически не ведут аналитические исследования для построения решений системы уравнений газовой динамики. Но имеются работы, в которых использование системы уравнений газовой динамики для моделирования течений в восходящих закрученных потоках вызывает серьезные замечания [10], например работа Я.Х. Фуджиты [11] — одного из главных зарубежных специалистов по торнадо.

1. Постановка задачи

Рассматриваются трехмерные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука газа; $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, w\}$ — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; t, x_1, x_2, z — независимые переменные. Здесь ρ — плотность газа; $\gamma > 1$ — показатель политропы газа. Предполагается, что на газ действуют силы тяжести и Кориолиса. Предполагается также, что в начальный момент времени $t = 0$ по одну сторону от стенки Γ функция $c|_\Gamma > 0$, а по другую — $c = 0$, т. е. в момент времени $t = 0$ на стенке Γ имеет место разрыв плотности газа.

Пусть в момент $t = 0$ заданы значения газодинамических параметров:

$$
\begin{aligned}
c(0, x_1, x_2, z) &= c_{00}(x_1, x_2, z),\\
u_1(0, x_1, x_2, z) &= u_{10}(x_1, x_2, z),\\
u_2(0, x_1, x_2, z) &= u_{20}(x_1, x_2, z),\\
w(0, x_1, x_2, z) &= w_{00}(x_1, x_2, z).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Функции $c_{00}(x_1, x_2, z)$, $u_{10}(x_1, x_2, z)$, $u_{20}(x_1, x_2, z)$, $w_{00}(x_1, x_2, z)$ предполагаются аналитическими, а $c_{00}(x_1, x_2, z) > 0$ в некоторой окрестности начала координат.

В момент $t = 0$ стенка Γ мгновенно разрушается и начинается истечение газа в вакуум. В результате распада разрыва возникает волна разрежения, отделенная от области невозмущенного газа (фоновое течение) поверхностью Γ_1, являющейся звуковой характеристикой этих течений, на ней имеет место слабый разрыв газодинамических параметров. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму через свободную границу Γ_0.

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального политропного газа в форме Громека–Ламба в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, имеет вид

$$\begin{aligned} &c_t + \mathbf{U} \cdot \operatorname{grad} c + \frac{\gamma - 1}{2} c \cdot \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \\ &\mathbf{U}_t + \operatorname{rot} \mathbf{U} \times \mathbf{U} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{U}^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c \cdot \operatorname{grad} c = \mathbf{F}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{F} = \{au_2 - bw, -au_1, bu_1 - g\}$; $a = 2\Omega \cos\psi$; $b = 2\Omega \sin\psi$; g — ускорение свободного падения; Ω — модуль вектора $\boldsymbol{\Omega}$ угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ — широта точки на поверхности Земли, в которой находится начало прямоугольной системы координат, вращающейся вместе с Землей [9, 10, 12, 13].

Предполагается, что Γ — вертикальная цилиндрическая поверхность: в плоскости $z = 0$ задается линия L, которая является направляющей для цилиндрической поверхности Γ, образующие которой параллельны оси Oz.

Пусть линия L задается параметрически

$$x_1 = \phi_1(\xi), \quad x_2 = \phi_2(\xi)$$

или в векторной форме: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi)$.

Единичные касательный и нормальный векторы к линии L задаются формулами

$$\mathbf{s}(\xi) = \left\{ \frac{\phi_{1\xi}(\xi)}{|\mathbf{r}_\xi|}, \frac{\phi_{2\xi}(\xi)}{|\mathbf{r}_\xi|} \right\}, \quad \mathbf{n}(\xi) = \left\{ \frac{-\phi_{2\xi}(\xi)}{|\mathbf{r}_\xi|}, \frac{\phi_{1\xi}(\xi)}{|\mathbf{r}_\xi|} \right\}.$$

Переход от декартовых координат x_1, x_2, z к новым ортогональным криволинейным координатам ξ, η, z' делается по формулам

$$x_1 = \phi_1(\xi) + \eta n_1(\xi), \quad x_2 = \phi_2(\xi) + \eta n_2(\xi), \quad z = z'$$

или в векторной форме

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_1(\xi) + \eta n_1(\xi) \\ \phi_2(\xi) + \eta n_2(\xi) \\ z \end{array} \right\}.$$

Здесь $\mathbf{R} = \{x_1, x_2, z\}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства; ξ — параметр, с помощью которого задается линия L; η — расстояние от Γ, измеряемое вдоль единичной нормали $\mathbf{n}(\xi) = \{n_1, n_2\}$ к линии L.

При этой замене вертикальная цилиндрическая поверхность Γ задается равенством

$$\eta = 0.$$

Якобиан преобразования равен

$$J = \mathbf{R}_\eta \mathbf{R}_\xi \mathbf{R}_z = |\mathbf{r}_\xi + \eta \mathbf{n}_\xi|.$$

Поскольку $\mathbf{n}_\xi = -k\mathbf{r}_\xi$ [12], где $k(\xi)$ — значение кривизны линии L, окончательно якобиан равен
$$J = |\mathbf{r}_\xi|(1 - k\eta).$$
Если $|\mathbf{r}_\xi| \neq 0$ в точке $\xi = \xi^0$, то она не является особой точкой линии L. В дальнейшем данное условие предполагается выполненным. Тогда якобиан преобразования J будет отличен от нуля в данной точке и в ее окрестности.

Для перехода в системе (2) к ортогональным криволинейным координатам ξ, η, z' необходимо вычислить коэффициенты Ламе [12, 14]:
$$H_1 = |\mathbf{R}_\eta| = 1, \quad H_2 = |\mathbf{R}_\xi| = |\mathbf{r}_\xi|(1 - k\eta), \quad H_3 = |\mathbf{R}_{z'}| = 1.$$
Заметим, что на поверхности Γ имеет место соотношение $H_2 = |\mathbf{r}_\xi| \neq 0$. Коэффициент Ламе обращается в нуль при $\eta = \dfrac{1}{k}$, т. е. в тех точках пространства, которые удалены от Γ в направлении нормали на расстояние, равное радиусу кривизны.

Система уравнений (2) для данной криволинейной системы координат имеет вид [1] (для облегчения написания опущен штрих у переменной z'):
$$\begin{aligned}
&c_t + uc_\eta + \frac{1}{H_2}vc_\xi + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2}c\left(u_\eta + \tfrac{1}{H_2}v_\xi + w_z + \tfrac{H_{2\eta}}{H_2}u\right) = 0,\\
&u_t + uu_\eta + \frac{1}{H_2}vu_\xi + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2}v^2 + \frac{2}{\gamma - 1}cc_\eta = av - (b\cos\varphi)w,\\
&v_t + uv_\eta + \frac{1}{H_2}vv_\xi + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2}uv + \frac{2}{\gamma - 1}\frac{1}{H_2}cc_\xi = -au + (b\sin\varphi)w,\\
&w_t + uw_\eta + \frac{1}{H_2}vw_\xi + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1}cc_z = (b\cos\varphi)u - (b\sin\varphi)v - g.
\end{aligned} \tag{3}$$
Здесь u, v — проекции вектора скорости газа на координатные оси η, ξ соответственно. В этой системе координат переменная z сохраняется, и поэтому в качестве одной из неизвестных функций сохраняется третья координата вектора скорости газа — функция w. При сделанной замене независимых переменных φ является углом, который образует единичный нормальный вектор $\mathbf{n}(\xi)$ с декартовыми осями координат. Поэтому $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ вычисляются по формулам
$$\cos\varphi = n_1(\xi) = \frac{-\phi_{2\xi}(\xi)}{|\mathbf{r}_\xi|}, \quad \sin\varphi = n_2(\xi) = \frac{\phi_{1\xi}(\xi)}{|\mathbf{r}_\xi|}.$$
Заметим, что $H_{2\eta} = -k(\xi)|\mathbf{r}_\xi|$ и соответственно $\dfrac{H_{2\eta}}{H_2} = \dfrac{-k(\xi)}{1 - k(\xi)\eta}$.

В новых переменных начальные условия (1) запишутся в виде
$$\begin{aligned}
&c(0, \xi, z, \eta) = c^0(\xi, z, \eta),\\
&u(0, \xi, z, \eta) = u^0(\xi, z, \eta),\\
&v(0, \xi, z, \eta) = v^0(\xi, z, \eta),\\
&w(0, \xi, z, \eta) = w^0(\xi, z, \eta).
\end{aligned} \tag{4}$$

Фоновое течение определится из решения задачи (3), (4). Задача по теореме Ковалевской имеет единственное аналитическое решение
$$c = C_0(t, \xi, z, \eta), \quad u = U_0(t, \xi, z, \eta), \quad v = V_0(t, \xi, z, \eta), \quad w = W_0(t, \xi, z, \eta).$$

Тогда закон движения характеристики $\Gamma_1 : \eta = \eta_0(t, \xi, z)$ определяется [15] из решения следующей дифференциальной задачи:

$$\eta_{0t} = U_0 + \frac{1}{H_2^0}\eta_{0\xi}V_0 + \eta_{0z}W_0 + C_0\sqrt{1 + \frac{1}{H_2^{02}}\eta_{0\xi}^2 + \eta_{0z}^2}, \quad \eta(0, \xi, z) = 0. \tag{5}$$

Здесь $H_2^0 = |\mathbf{r}_\xi|(1 - k\eta_0)$.

Задача (5) также по теореме Ковалевской имеет единственное аналитическое решение. Для решения задачи (5) используются формулы

$$\begin{aligned}
&\eta_0|_{t=0} = \eta_{00}(\xi, z) = 0,\\
&\eta_{0t}|_{t=0} = \eta_{01}(\xi, z) = u^0(\xi, z, 0) + c^0(\xi, z, 0) = u_0^0(\xi, z) + c_0^0(\xi, z).
\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\eta_0(t, \xi, z) = t\eta_1(t, \xi, z), \tag{6}$$

где $\eta_1(t, \xi, z)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат.

По известной функции $\eta_0(t, \xi, z)$ однозначно определяются значения газодинамических параметров на характеристике Γ_1:

$$\begin{aligned}
&u|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = U_0(t, \xi, z, \eta_0(t, \xi, z)), \quad v|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = V_0(t, \xi, z, \eta_0(t, \xi, z)),\\
&w|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = W_0(t, \xi, z, \eta_0(t, \xi, z)), \quad c|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = C_0(t, \xi, z, \eta_0(t, \xi, z)).
\end{aligned} \tag{7}$$

В системе (3) делается замена переменных:

$$\tau = t, \quad \xi' = \xi, \quad \zeta = \frac{\eta}{t}, \quad z' = z.$$

С учетом вида этой замены переменные τ, ζ называют нестационарными автомодельными переменными. Далее опущены штрихи у переменных ξ', z'.

В результате такой замены вместо системы (3) запишем

$$\begin{aligned}
&(u-\zeta)c_\zeta + \frac{\gamma-1}{2}cu_\zeta + \tau\left[c_\tau + \frac{1}{H_2}vc_\xi + c_z w + \frac{\gamma-1}{2}c\left(\frac{1}{H_2}v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2}u\right)\right] = 0,\\
&(u-\zeta)u_\zeta + \frac{2}{\gamma-1}cc_\zeta + \tau\left(u_\tau + \frac{1}{H_2}vu_\xi + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2}v^2\right) = \tau[av - (b\cos\varphi)w],\\
&(u-\zeta)v_\zeta + \tau\left(v_\tau + \frac{1}{H_2}vv_\xi + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2}uv + \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{H_2}cc_\xi\right) = \tau[-au + (b\sin\varphi)w],\\
&(u-\zeta)w_\zeta + \tau\left(w_\tau + \frac{1}{H_2}vw_\xi + w_z w + \frac{2}{\gamma-1}cc_z\right) = \tau[(b\cos\varphi)u - (b\sin\varphi)v - g],
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$H_2 = |\mathbf{r}_\xi|(1 - k(\xi)\tau\zeta), \quad \frac{H_{2\eta}}{H_2} = \frac{-k(\xi)}{1 - k(\xi)\tau\zeta}.$$

В новых переменных в силу равенства (6) поверхность Γ_1 задается уравнением

$$\Gamma_1 : \quad \zeta = \eta_1(\tau, \xi, z).$$

Заметим, что

$$\eta_1|_{\tau=0} = u_0^0(\xi, z) + c_0^0(\xi, z).$$

Тогда условия (7) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} u|_{\zeta=\eta_1(\tau,\xi,z)} &= U_0(\tau, \xi, z, \tau\eta_1(\tau, \xi, z)),\\ v|_{\zeta=\eta_1(\tau,\xi,z)} &= V_0(\tau, \xi, z, \tau\eta_1(\tau, \xi, z)),\\ w|_{\zeta=\eta_1(\tau,\xi,z)} &= W_0(\tau, \xi, z, \tau\eta_1(\tau, \xi, z)),\\ c|_{\zeta=\eta_1(\tau,\xi,z)} &= C_0(\tau, \xi, z, \tau\eta_1(\tau, \xi, z)). \end{aligned} \tag{9}$$

2. Построение волны разрежения

Построим решение задачи (8), (9) в виде ряда по степеням τ

$$\mathbf{f}(\tau, \xi, z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(\xi, z, \zeta)\frac{\tau^k}{k!}, \quad \mathbf{f} = \{c, u, v, w\}. \tag{10}$$

Положив в системе (8) $\tau = 0$, получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (10)

$$\begin{aligned} &(u_0 - \zeta)c_{0\zeta} + \frac{\gamma - 1}{2}c_0 u_{0\zeta} = 0,\\ &(u_0 - \zeta)u_{0\zeta} + \frac{2}{\gamma - 1}c_0 c_{0\zeta} = 0,\\ &(u_0 - \zeta)v_{0\zeta} = 0,\\ &(u_0 - \zeta)w_{0\zeta} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (11) имеем

$$v_{0\zeta} = 0, \quad w_{0\zeta} = 0,$$

а следовательно,

$$v_0 = v_{00}(\xi, z), \quad w_0 = w_{00}(\xi, z).$$

Учитывая условия (4), (9), получим

$$v_0 = v^0(\xi, z, 0), \quad w_0 = w^0(\xi, z, 0).$$

Если в первых двух уравнениях системы (11) определитель перед производными по ζ не равен нулю, то с учетом (9) решение системы (11) задает фоновое течение.

Предполагая в дальнейшем, что определитель равен нулю, получаем

$$(u_0 - \zeta)^2 = c_0^2$$

или

$$u_0 - \zeta = \pm c_0.$$

Поскольку поверхность Γ_1 задается уравнением $\zeta = \eta_1(\tau, \xi, z)$ и $\eta_1|_{\tau=0} = u_0^0(\xi, z) + c_0^0(\xi, z)$, запишем

$$u_0 - \zeta = -c_0. \tag{12}$$

Продифференцировав соотношение (12) по ζ, будем иметь

$$u_{0\zeta} = -c_{0\zeta} + 1.$$

Используя полученные соотношения, запишем второе уравнение системы (11) в виде

$$c_{0\zeta} = \frac{1}{2\alpha}, \quad 2\alpha = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}.$$

Интегрируя, имеем

$$c_0 = \frac{1}{2\alpha}\zeta + c_{00}(\xi, z).$$

Определяя произвольную функцию $c_{00}(\xi)$ с помощью условий (4), (9), однозначно получаем нулевые коэффициенты ряда (10):

$$\begin{aligned}
&c_0(\xi,z,\zeta) = \frac{1}{2\alpha}\left[\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0(\xi,z) - u_0^0(\xi,z)\right],\\
&u_0(\xi,z,\zeta) = \frac{2}{\gamma+1}\left[\zeta - c_0^0(\xi,z) + \frac{\gamma-1}{2}u_0^0(\xi,z)\right],\\
&v_0(\xi,z,\zeta) = v^0(\xi,z,0) = v_0^0(\xi,z),\\
&w_0(\xi,z,\zeta) = w^0(\xi,z,0) = w_0^0(\xi,z).
\end{aligned} \tag{13}$$

Для дальнейшего построения коэффициентов ряда (10) потребуются формулы

$$\begin{aligned}
&c_{0\zeta} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad u_{0\zeta} = \frac{2}{\gamma+1}, \quad v_{0\zeta} = 0, \quad w_{0\zeta} = 0,\\
&H_2|_{\tau=0} = H_2^0 = |\mathbf{r}_\xi|, \quad \frac{H_{2\eta}}{H_2^0} = -k(\xi).
\end{aligned} \tag{14}$$

Для удобства дальнейшего исследования преобразуем систему (8). Второе уравнение системы умножим на $\dfrac{\gamma-1}{2}$ и прибавим к первому уравнению, после преобразований получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
&(u+c-\zeta)\left(c_\zeta + \frac{\gamma-1}{2}u_\zeta\right) + \tau\left[c_\tau + \frac{1}{H_2}vc_\xi + c_z w + \frac{\gamma-1}{2}c\left(\frac{1}{H_2}v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2}u\right) + \right.\\
&\left. + \frac{\gamma-1}{2}\left(u_\tau + \frac{1}{H_2}vu_\xi + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2}v^2\right)\right] = \frac{\gamma-1}{2}\tau[av - (b\cos\varphi)w],\\
&(u-\zeta)u_\zeta + \frac{2}{\gamma-1}cc_\zeta + \tau\left(u_\tau + \frac{1}{H_2}vu_\xi + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2}v^2\right) = \tau[av - (b\cos\varphi)w],\\
&(u-\zeta)v_\zeta + \tau\left(v_\tau + \frac{1}{H_2}vv_\xi + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2}uv + \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{H_2}cc_\xi\right) = \tau[-au + (b\sin\varphi)w],\\
&(u-\zeta)w_\zeta + \tau\left(w_\tau + \frac{1}{H_2}vw_\xi + w_z w + \frac{2}{\gamma-1}cc_z\right) = \tau[(b\cos\varphi)u - (b\sin\varphi)v - g].
\end{aligned} \tag{15}$$

Систему (15) продифференцируем n раз по τ, положим $\tau = 0$, с учетом (9), (12) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}(u_n + c_n) + nc_n + \frac{\gamma-1}{2}nu_n = F_{1n}(\xi,z,\zeta),\\
&-c_0u_{n\zeta} + \frac{2}{\gamma-1}c_0c_{n\zeta} + \frac{2}{\gamma+1}c_n + \left(n + \frac{2}{\gamma+1}\right)u_n = F_{2n}(\xi,z,\zeta),\\
&c_0v_{n\zeta} - nv_n = F_{3n}(\xi,z,\zeta),\\
&c_0w_{n\zeta} - nw_n = F_{4n}(\xi,z,\zeta).
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь функции F_{1n}, F_{2n}, F_{3n}, F_{4n} известным образом зависят от уже найденных коэффициентов ряда (10).

Подставляя значение c_0 в третье и четвертое уравнения системы (16), имеем

$$\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right) v_{n\zeta} - 2\alpha n v_n = 2\alpha F_{3n}(\xi, z, \zeta),$$
$$\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right) w_{n\zeta} - 2\alpha n w_n = 2\alpha F_{4n}(\xi, z, \zeta).$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$v_n = \left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{2\alpha n}\left[v_{n0}(\xi) + 2\alpha\int F_{3n}(\xi, z, \zeta)\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{-2\alpha n-1} d\zeta\right],$$
$$w_n = \left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{2\alpha n}\left[w_{n0}(\xi) + 2\alpha\int F_{4n}(\xi, z, \zeta)\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{-2\alpha n-1} d\zeta\right].$$

Из первого уравнения системы (16) находим u_n и $u_{n\zeta}$:

$$u_n = -\frac{(2n+4)\gamma + 2n - 4}{(n\gamma + n + 4)(\gamma - 1)}c_n + \frac{2\gamma + 2}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}F_{1n},$$
$$u_{n\zeta} = -\frac{(2n+4)\gamma + 2n - 4}{(n\gamma + n + 4)(\gamma - 1)}c_{n\zeta} + \frac{2\gamma + 2}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}F_{1n\zeta},$$
$$\frac{2}{\gamma-1}c_0\left(\frac{(n+2)\gamma + n - 2}{(n\gamma + n + 4)} + 1\right)c_{n\zeta} + \frac{2}{\gamma+1}\left(1 - \frac{(n\gamma + n + 2)((n+2)\gamma + n - 2)}{(n\gamma + n + 4)(\gamma - 1)}\right)c_n =$$
$$= F_{2n} + \frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}c_0 F_{1n\zeta} - \frac{2(n(\gamma+1) + 2)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}F_{1n}$$

или

$$\frac{4(n+1)(\gamma+1)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}c_0 c_{n\zeta} - \frac{2}{\gamma+1}\frac{n(n+1)(\gamma+1)^2}{(n\gamma + n + 4)(\gamma - 1)}c_n =$$
$$= F_{2n} + \frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}c_0 F_{1n\zeta} - \frac{2(n(\gamma+1) + 2)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}F_{1n},$$

после преобразований имеем

$$2c_0 c_{n\zeta} - n c_n = \frac{(n\gamma + n + 4)(\gamma - 1)}{2(n+1)(\gamma+1)}\times$$
$$\times\left(F_{2n} + \frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}c_0 F_{1n\zeta} - \frac{2(n(\gamma+1) + 2)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}F_{1n}\right).$$

Подставляя в это равенство значение c_0, окончательно получаем дифференциальное уравнение для коэффициента c_n:

$$\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right) c_{n\zeta} - \alpha n c_n = F_n(\xi, z, \zeta).$$

Здесь

$$F_n(\xi, z, \zeta) = \frac{(n\gamma + n + 4)}{4(n+1)}\left(F_{2n} + \frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}c_0 F_{1n\zeta} - \frac{2(n(\gamma+1) + 2)}{(\gamma-1)(n\gamma + n + 4)}F_{1n}\right).$$

Тогда решение дифференциальных уравнений (16) запишется в виде

$$c_n = \left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{\alpha n}\left[c_{n0}(\xi,z) + \int F_n(\xi,z,\zeta)\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{-\alpha n-1}d\zeta\right],$$

$$u_n = -\frac{(2n+4)\gamma+2n-4}{(n\gamma+n+4)(\gamma-1)}\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{\alpha n}\Bigg[c_{n0}(\xi,z)+$$
$$+\int F_n(\xi,z,\zeta)\left(\zeta + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{-\alpha n-1}d\zeta\Bigg] + \frac{2\gamma+2}{n\gamma+n+4}F_{1k}(\xi,z,\zeta).$$

Произвольные функции $c_{n0}(\xi,z)$, $v_{n0}(\xi,z)$, $w_{n0}(\xi,z)$ определяются из условий (9). Для этого в представлениях (10) полагается $u = u_0(\tau,\xi,z)$, $v = v_0(\tau,\xi,z)$, $w = w_0(\tau,\xi,z)$, $\zeta = \eta_1(\tau,\xi,z)$. В результате имеем

$$u_0(\tau,\xi,z) = u(\tau,\xi,z,\eta_1(\tau,\xi,z)),$$
$$v_0(\tau,\xi,z) = v(\tau,\xi,z,\eta_1(\tau,\xi,z)),$$
$$w_0(\tau,\xi,z) = w(\tau,\xi,z,\eta_1(\tau,\xi,z)).$$

Дифференцируя эти соотношения по τ, подставляя $\tau = 0$, получим алгебраические уравнения для определения $c_{n0}(\xi,z)$, $v_{n0}(\xi,z)$, $w_{n0}(\xi,z)$:

$$\left(u_0^0 + c_0^0 + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{\alpha n}u_{n0}(\xi,z) = Q_{1n}(\xi,z),$$
$$\left(u_0^0 + c_0^0 + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{2\alpha n}v_{n0}(\xi,z) = Q_{2n}(\xi,z),$$
$$\left(u_0^0 + c_0^0 + \frac{2}{\gamma-1}c_0^0 - u_0^0\right)^{2\alpha n}w_{n0}(\xi,z) = Q_{3n}(\xi,z).$$

Здесь $Q_{1n}(\xi,z)$, $Q_{2n}(\xi,z)$, $Q_{3n}(\xi,z)$ — функции, известным образом зависящие от ξ, z.

Выполнив преобразования, получим

$$[2\alpha c_0^0]^{\alpha n}\,u_{n0}(\xi,z) = Q_{1n}(\xi,z),$$
$$[2\alpha c_0^0]^{2\alpha n}\,v_{n0}(\xi,z) = Q_{2n}(\xi,z),$$
$$[2\alpha c_0^0]^{2\alpha n}\,w_{n0}(\xi,z) = Q_{3n}(\xi,z).$$

Так как $c_0^0(\xi,z) \neq 0$, $2\alpha \neq 0$, функции $u_{n0}(\xi,z)$, $v_{n0}(\xi,z)$, $w_{n0}(\xi,z)$ определяются единственным образом.

Итак, построенное в виде ряда (10) формальное решение задачи (8), (9) является единственным.

Заметим, что (13) — необходимые условия разрешимости для характеристической задачи Коши (8), (13). Поскольку определитель перед выводящими производными по переменной τ имеет ранг, равный нулю, поверхность $\tau = 0$ является характеристикой кратности четыре. При этом коэфициенты ряда для функции u определяются из алгебраических соотношений, а для функций c, v, w — из решений дифференциальных уравнений.

Теорема. *Задача* (15) *с краевыми условиями* (9) *в случае аналитичности функций из начальных условий* (4) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки* $(t = 0, \xi = 0, z = 0, \eta = 0)$. *Решение этой задачи представляется в виде сходящегося ряда* (10).

Доказательство проводится методом мажорант, применение которого к характеристической задаче Коши подробно изложено в монографии [2], поэтому в данной работе далее приведены только основные моменты доказательства.

Вначале заменой

$$\tilde{\zeta} = \zeta - \eta_1(\tau, \xi, z)$$

условия (9) записываются на новой координатной плоскости

$$\tilde{\zeta} = 0.$$

Стандартным образом проводится сведение к нулевым условиям на плоскости $\tilde{\zeta} = 0$. Поскольку начальные ряды коэффициентов (10) построены в явном виде, также стандартными методами делается переход к продолженной системе с нулевыми начальными условиями для того, чтобы алгоритм построения коэффициентов ряда стал единообразным.

Мажорируя функцию u и ее продолжения функцией H, а функции c, v, w и их продолжения — функцией S, получаем следующую мажорантную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \tau} = F\left[(\tau + H)\dfrac{\partial S}{\partial \tau} + \sum\limits_{\ell}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \ell} + \dfrac{\partial S}{\partial \ell}\right) + 1\right], \\ \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{\zeta}} = F\left[(\tau + H)\left(\dfrac{\partial H}{\partial \tau} + \dfrac{\partial S}{\partial \tau}\right) + \dfrac{\partial H}{\partial \tilde{\zeta}} + \sum\limits_{q}\left(\dfrac{\partial H}{\partial q} + \dfrac{\partial S}{\partial q}\right) + 1\right], \\ H|_{\tau=0} = 0, \\ S|_{\tilde{\zeta}=0} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь символ ℓ принимает значения $\tilde{\zeta}$, ξ, z, символ q — значения ξ, z.

Функция

$$F = \frac{M}{1 - \dfrac{\tau + \tilde{\zeta} + \xi + z + H + S}{\rho}}$$

является мажорантой для всех коэффициентов системы, полученной после продолженной системы (15). Здесь M, ρ — положительные константы.

Получившаяся задача (17) с точностью до обозначения независимых переменных совпадает с соответствующей задачей из монографии [2], являющейся мажорантой для характеристической задачи Коши стандартного вида. И поэтому у задачи (17) в некоторой окрестности начала координат имеется единственное аналитическое решение, которое мажорирует решение задачи (15) с краевыми условиями (9). Тем самым устанавливается требуемая сходимость ряда (10). Теорема доказана. □

Таким образом, в виде сходящегося ряда (10) в окрестности звуковой характеристики Γ_1 построено решение задачи (8), (9). С помощью простейших преобразований решение (10) восстанавливается в физическом пространстве переменных t, η, ξ, z.

Ранее задача о распаде специального разрыва всегда формулировалась как краевая задача с данными на звуковой характеристике в пространстве специальным образом введенных новых независимых переменных. Поскольку звуковая характеристика является характеристикой кратности один, для получения единственного решения задавалось условие вертикали, описывающее начальный разрыв плотности газа. Подобная задача решена в [5]. Введение нестационарных автомодельных переменных позволило построить единственное решение задачи (8), (9) в окрестности звуковой характеристики без дополнительного граничного условия.

Для завершения исследования необходимо показать, что решение, построенное в [5], совпадает с (10). Такое исследование для двумерного случая проведено в [9]. Доказательство эквивалентности решения (10) с решением задачи о распаде специального разрыва из [5] полностью повторяет схему доказательства из работы [9] и ввиду громоздкости здесь не приводится.

Заключение

Задача о распаде специального разрыва ранее была решена [1–5] в пространстве специальным образом введенных новых независимых переменных. При этом в пространстве исходных физических переменных законы движения поверхностей Γ_0, Γ_1 определялись в явном виде. Но для того чтобы в какой-либо момент времени $t = t_0 > 0$ определить значения газодинамических параметров в пространстве физических переменных, необходимо было обращать неявно заданные функции. Эта процедура достаточно громоздка и трудна для задания начальных данных в момент времени $t = t_0 > 0$ между поверхностями Γ_0 и Γ_1 для последующего построения течения газа разностными методами.

Именно для преодоления трудности обращения неявно заданных функций в работе задача о распаде специального разрыва и решена с помощью введения нестационарных автомодельных переменных. В этом случае параметры газа в момент времени $t = t_0 > 0$ с помощью начальных отрезков сходящегося ряда (10) определяются в явном виде в пространстве исходных физических независимых переменных.

Список литературы

[1] **Баутин С.П., Дерябин С.Л.** Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука; 2005: 390.

[2] **Баутин С.П.** Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука; 2009: 368.

[3] **Баутин С.П.** Схлопывание одномерной полости. Прикладная математика и механика. 1982; 46(1):50–59.

[4] **Баутин С.П.** Двумерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа. Прикладная математика и механика. 1983; 47(3):433–439.

[5] **Дерябин С.Л., Мезенцев А.В.** Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Вычислительные технологии. 2010; 15(5):51–71.

[6] **Риман Б.** О распаде плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. М.; Л.: ОГИЗ; 1948: 376–395.

[7] **Баутин С.П.** Одно течение теплопроводного газа, аналогичное центрированной волне Римана. Прикладная математика и механика. 2002; 66(1):87–94.

[8] **Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu.** Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011; 26(4):353–377.

[9] **Дерябин С.Л.** Построение двумерных течений в физическом пространстве, возникающих после распада специального разрыва. Вычислительные технологии. 2020; 25(4):4–19. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.002.

[10] **Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.** Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург: УрГУПС; 2020: 400.

[11] **Фуджита Яшима Х.** Моделирование внутренней структуры тропических циклонов: уравнение потока на траектории ветра. Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения". Тематический обзор. 2017; (137):118–130.

[12] **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука; 1987: 840.

[13] **Баутин С.П.** Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука; 2008: 92.

[14] **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ; 1950: 428.

[15] **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований; 2003: 336.

Вычислительные технологии, 2021, том 26, № 5, с. 52–64. © ФИЦ ИВТ, 2021 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2021, vol. 26, no. 5, pp. 52–64. © FRC ICT, 2021 eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.005

Application of nonstationary self-similar variables for solving the three-dimensional problem of the decay of a special discontinuity

Bautin Sergey P.[1,*], Deryabin Sergey L.[2]

[1]Snezhinsk Institute of Physics and Technology, 456776, Snezhinsk, Russia
[2]Ural State University of Railway Transport, 620034, Ekaterinburg, Russia
[*]Corresponding author: Bautin Sergey P., e-mail: spbautin@mail.ru

Received February 26, 2021, revised August 19, 2021, accepted August 25, 2021.

Abstract

The aim of this study is to construct a solution to the problem of the decay of a special discontinuity in physical space. The problem reduces to finding of three-dimensional isentropic flows of a polytropic gas that occur after the instantaneous destruction of an impermeable wall separating an inhomogeneous moving gas from a vacuum at the initial moment of time. The problem takes into account the forces of gravity and Coriolis.

Research methods. In the system of gas dynamics equations, a self-similar feature is introduced in a variable that outputs from the initial interface. For the resulting system, the Cauchy problem is formulated using conditions on the sound characteristic. The solution to this problem is constructed in the form of power series. The coefficients of the series are partly determined by solving algebraic equations, another part can be found as solutions of ordinary differential equations. The convergence of the constructed series is proved by the Majorant method

The results obtained in the work. In the form of a convergent power series, solutions to the problem of the decay of a special discontinuity in physical space are constructed.

Conclusions. The solution constructed in physical space allows setting the initial conditions for the numerical simulation of this characteristic Cauchy problem using a difference scheme.

Keywords: system of gas dynamics equations, non-stationary self-similar variables, sonic characteristic, characteristic Cauchy problem, converging series.

Citation: Bautin S.P., Deryabin S.L. Application of nonstationary self-similar variables for solving the three-dimensional problem of the decay of a special discontinuity. Computational Technologies. 2021; 26(5):52–64.DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.005. (In Russ.)

References

1. **Bautin S.P., Deryabin S.L.** Matematicheskoe modelirovanie istecheniya ideal'nogo gaza v vacuum [Mathematical modelling of the flow of an ideal gas into a vacuum]. Novosibirsk: Nauka; 2005: 390. (In Russ.)
2. **Bautin S.P.** Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoy dinamike [The Cauchy characteristic problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka; 2009: 368. (In Russ.)
3. **Bautin S.P.** Collapse of a one-dimensional cavity. Journal Applied Mathematics and Mechanics. 1982; 46(1):50–59. (In Russ.)
4. **Bautin S.P.** Twodimensional flow of inhomogeneous moving gas into vacuum. Journal Applied Mathematics and Mechanics. 1983; 47(3):433–439. (In Russ.)
5. **Deryabin S.L., Mezentsev A.V.** Computational and analytic modeling of gas flows adjacent to vacuum under the action of gravity and Coriolis. Computational Technologies. 2010; 15(5):51–71. (In Russ.)
6. **Riemann B.** O paspade ploskikh voln konechnoy amplitudy. Sochineniya [On the decay of plane waves of finite amplitude. Books]. M.; L.: OGIZ; 1948: 376–395. (In Russ.)
7. **Bautin S.P.** On a particular flow of heat-conducting gas, similar to a centered Riemann wave. Journal Applied Mathematics and Mechanics. 2002; 66(1):87–94. (In Russ.)
8. **Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu.** Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011; 26(4):353–377.
9. **Deryabin S.L.** Construction of two-dimensional flows in physical space arising after the decay of a special discontinuity. Computational Technologies. 2020; 25(4):4–19. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.002. (In Russ.)
10. **Bautin S.P., Krutova I.Yu., Obukhov A.G.** Gazodinamicheskaya teoriya voskhodyashchikh zakruchennykh potokov [Gas-dynamic theory of the ascending swirling flows]. Ekaterinburg: UrGUPS; 2020: 400. (In Russ.)
11. **Fujita Yashima H.** Modeling of the internal structure of tropical cyclones: Flow equation on wind trajectory. Results of Science and Technology. Series "Modern Mathematics and Its Applications". Thematic Review. 2017; (137):118–130. (In Russ.)
12. **Loitsiansky L.G.** Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of fluid and gas]. Moscow: Nauka; 2009: 368. (In Russ.)
13. **Bautin S.P.** Tornado i sila Koriolisa [Tornado and the Coriolis force]. Novosibirsk: Nauka; 2008: 92. (In Russ.)
14. **Rashevskiy P.K.** Kurs differentsial'noy geometrii [Course in differential geometry]. M.; L.: GITTL; 1950: 428. (In Russ.)
15. **Ovsyannikov L.V.** Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki [Lectures on fundamentals of gas dynamics]. Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Issledovaniy; 2003: 336. (In Russ.)