

К расчету течений тяжелой жидкости многомерным узловым методом характеристик

В. С. СУРОВ

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), 454080, Челябинск, Россия

Контактный автор: Суров Виктор Сергеевич, e-mail: surovvictor@gmail.com

Поступила 8 декабря 2021 г., доработана 10 февраля 2022 г., принята в печать 14 февраля 2022 г.

С использованием ранее предложенной автором гиперболической обобщенно-равновесной модели газожидкостной смеси, которая в работе применяется в рамках многожидкостной гидродинамики для совместного расчета движения жидкости и газа с автоматической локализацией контактных поверхностей, рассчитан ряд таких модельных задач, как растекание столба жидкости под действием сил гравитации, падение водяного столба на слой жидкости, колебание жидкости в бассейне. В численных расчетах использован узловый метод характеристик, обобщенный на многомерный случай, который базируется на расщеплении исходной системы уравнений по пространственным переменным на ряд одномерных подсистем с последующим интегрированием их с помощью одномерного узлового метода характеристик.

Ключевые слова: гиперболическая модель газожидкостной среды, многомерный узловый метод характеристик.

Цитирование: Суров В.С. К расчету течений тяжелой жидкости многомерным узловым методом характеристик. Вычислительные технологии. 2022; 27(2):62–73. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.006.

Введение

Метод характеристик широко используется в вычислительной практике при численном решении задач из различных предметных областей, таких как газодинамика [1], механика гетерогенных сред [2], электромагнетизм [3], динамика популяций [4], ядерная энергетика [5], механика упругопластических сред [6], термоупругость [7] и др., которые описываются гиперболическими системами уравнений. Суть метода характеристик состоит в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые записываются вдоль характеристических направлений [8]. Известны различные варианты метода характеристик, описанные в монографии [9]. В работе [10] предложен вариант многомерного узлового метода характеристик (МУМХ), основанный на расщеплении исходной системы уравнений по пространственным направлениям на ряд одномерных подсистем с их последующим интегрированием с помощью одномерного узлового метода характеристик (ОУМХ) [11]. Использование многомерного узлового метода характеристик проиллюстрируем на примере модели, описывающей течение односкоростной бинарной смеси идеального газа со

второй несжимаемой фракцией [12], которая используется, например, в многожидкостной гидродинамике для совместного расчета движения жидкости и газа с автоматической локализацией контактных поверхностей [13]. Отметим также работу [14], в которой обсуждается постановка граничных условий на непроницаемых криволинейных границах для МУМХ.

Представляется перспективным применение использованной в работе модели среды, а также численного метода для исследования волн цунами. Из литературы известны различные модели среды, предназначенные для моделирования явления цунами [15–17], среди которых имеются и гиперболические, например описываемые уравнениями мелкой воды, к которым, в частности, может быть применен МУМХ. Численным аспектам проблемы цунами посвящены работы [18–22].

1. Модель среды

Уравнения, описывающие двумерное течение газожидкостной смеси с несжимаемой дисперсной фракцией ($\rho_s^0 = \text{const}$) в дивергентной форме при наличии сил гравитации, имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \alpha \rho_s^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_s^0 u}{\partial x} + \frac{\partial \alpha \rho_s^0 v}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial \alpha \rho_s^0 u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha (p + \rho_s^0 u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha \rho_s^0 uv}{\partial y} = f_x + \alpha \rho_s^0 \mathbf{g}_x, \\
 & \frac{\partial \alpha \rho_s^0 v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_s^0 uv}{\partial x} + \frac{\partial (p + \alpha \rho_s^0 v^2)}{\partial y} = f_y + \alpha \rho_s^0 \mathbf{g}_y, \\
 & \frac{\partial \alpha \rho_s^0 e_s}{\partial t} + \frac{\partial \alpha (p + \rho_s^0 e_s) u}{\partial x} + \frac{\partial \alpha (p + \rho_s^0 e_s) v}{\partial y} = f_x u + f_y v + \alpha \rho_s^0 (\mathbf{g}_x u + \mathbf{g}_y v), \\
 & \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0 u}{\partial x} + \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0 v}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0 u}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha) (p + \rho_g^0 u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0 uv}{\partial y} = -f_x + (1 - \alpha) \rho_g^0 \mathbf{g}_x, \\
 & \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0 v}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0 uv}{\partial x} + \frac{\partial (1 - \alpha) (p + \rho_g^0 v^2)}{\partial y} = -f_y + (1 - \alpha) \rho_g^0 \mathbf{g}_y, \\
 & \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_g^0 e_g}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha) (p + \rho_g^0 e_g) u}{\partial x} + \frac{\partial (1 - \alpha) (p + \rho_g^0 e_g) v}{\partial y} = \\
 & \quad = -f_x u - f_y v + (1 - \alpha) \rho_g^0 (\mathbf{g}_x u + \mathbf{g}_y v),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u и v — компоненты вектора скорости; p — давление; \mathbf{g}_x , \mathbf{g}_y и f_x , f_y — проекции ускорения свободного падения и плотности сил межфракционного взаимодействия в направлении осей Ox и Oy ; $e_k = \varepsilon_k + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ — удельная полная энергия k -й фракции ($k = g, s$); α — объемная доля несжимаемой составляющей в смеси; $\varepsilon_g = \varepsilon_g(p, \rho_g^0) = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho_g^0}$ — удельная внутренняя энергия газа, γ — показатель адиабаты газовой составляющей; ρ_k^0 — физическая плотность k -й фракции. Заметим, что если в (1) опустить силы межфракционного взаимодействия, то система теряет свойство гиперболичности [12].

Просуммировав соответствующие законы сохранения по составляющим смесь фракциям, получим законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = \rho \mathfrak{g}_x, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial y} = \rho \mathfrak{g}_y, \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho e)u}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho e)v}{\partial y} = \rho(\mathfrak{g}_x u + \mathfrak{g}_y v), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho = \alpha \rho_s^0 + (1 - \alpha) \rho_g^0$ — плотность смеси; $\varepsilon = \frac{1}{\rho} [\alpha \rho_s^0 \varepsilon_s + (1 - \alpha) \rho_g^0 \varepsilon_g]$ и $e = \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ — удельные внутренняя и полная энергии смеси. В частности, для рассматриваемой в работе газожидкостной смеси уравнение состояния имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left[\frac{(1 - \alpha)p}{\gamma - 1} + \alpha \rho_s^0 \varepsilon_s \right], \quad (3)$$

где $\varepsilon_s = \text{const}$. Уравнения (2) в квазилинейной форме принимают вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mathfrak{g}_x, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \mathfrak{g}_y, \quad \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$. Учитывая (3), а также равенство $\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$, закон сохранения энергии для смеси в целом может быть переписан как

$$\frac{Dp}{Dt} - c^2 \frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

где $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho(1 - \alpha)}}$ — скорость звука в смеси. Таким образом, система уравнений модели газожидкостной смеси при наличии гравитации в квазилинейной форме принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mathfrak{g}_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \mathfrak{g}_y, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что в системе (4) отсутствуют плотности сил межфракционного взаимодействия. В случае необходимости их можно найти из соответствующих уравнений системы (1).

2. Методика численного счета

При интегрировании системы (4) использован многомерный вариант узлового метода характеристик, основанный на расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных (по пространственным направлениям) [10]. Рассмотрим малый временной интервал, а именно шаг интегрирования по времени системы (4). Изменения параметров, которые претерпевают за этот малый промежуток времени, можно найти, суммируя локальные изменения, которые происходят по отдельным координатным направлениям. Иными словами, для нахождения приближенного решения системы (4) за указанный промежуток времени сначала решается подсистема

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mathfrak{g}_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{g}_y, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

полученная из (4), в которой оставлены только слагаемые, изменяющие параметры течения в направлении оси Ox . Проинтегрировав (5) и базируясь на найденном распределении определяющих переменных, решаем подсистему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{g}_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \mathfrak{g}_y, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

в которой учитываются изменения только вдоль координатного направления Oy .

Характеристическое уравнение системы (5)

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - u & 0 & -1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - u & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & 0 & \lambda - u & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \lambda - u \end{vmatrix} = 0,$$

где $\lambda = dx/dt$, имеет действительные корни: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = u$. Характеристические соотношения вдоль характеристических направлений $dx/dt = u \pm c$ подсистемы (5) могут быть найдены из уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 & 0 & -u \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{du}{dt} \\ 0 & \lambda - u & 0 & -\frac{1}{\rho} & \mathfrak{g}_x - u \frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \\ 0 & 0 & \lambda - u & 0 & \mathfrak{g}_y - u \frac{dv}{dt} \\ 0 & -\rho c^2 & 0 & \lambda - u & -u \frac{dp}{dt} - \rho c^2 \frac{du}{dt} \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & -u \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{du}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим соотношения

$$\rho c du \pm dp = \frac{\rho c \mathfrak{g}_x}{u \pm c} dt, \quad (7)$$

справедливые на характеристических направлениях $\lambda = u \pm c$. Вдоль траекторной характеристики $\lambda = u$ выполняются равенства

$$dp = c^2 d\rho, \quad dv = \mathfrak{g}_y dt, \quad \rho d\alpha = \alpha d\rho, \quad (8)$$

которые непосредственно следуют из подсистемы (5).

Аналогично характеристическое уравнение подсистемы (6) имеет действительные корни: $\lambda_{1,2} = v \pm c$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = v$, а характеристические соотношения вдоль характеристических направлений $dy/dt = v \pm c$ подсистемы (6) принимают вид

$$\rho c dv \pm dp = \frac{\rho c g_y}{v \pm c} dt.$$

Вдоль траекторной характеристики $\lambda = v$ выполняются равенства

$$dp = c^2 d\rho, \quad du = g_x dt, \quad \rho d\alpha = \alpha d\rho.$$

Для двумерного варианта МУМХ процесс вычислений при переходе с временного шага t^n на t^{n+1} состоит из двух тактов. На первом узлы расчетной области перебираются вдоль оси Ox и в них по процедуре ОУМХ [11] определяются промежуточные значения параметров. На втором такте определяются окончательные величины $(\rho, u, v, p, \alpha)^{n+1}$ путем применения процедуры ОУМХ в направлении оси Oy на основе данных первого такта.

Опишем процедуру ОУМХ, например, для первого промежуточного такта. Второй такт проводится аналогично. При его использовании достаточно определить искомые величины в узле (x_k, t^{n+1}) по их известным значениям в узлах, находящихся на n -м временном слое. Применялась следующая итерационная процедура. Полагалось, что на “нулевой” итерации ($\sigma = 0$) переменные ρ, u, v, p, α в точке (x_k, t^{n+1}) совпадают с их значениями в точке (x_k, t^n) , при этом характеристические направления $dx/dt = u$, $dx/dt = u \pm c$ аппроксимируются выражениями

$$x_k - x_C^\sigma = u^\sigma \Delta t, \quad x_k - x_L^\sigma = (u^\sigma + c^\sigma) \Delta t, \quad x_k - x_R^\sigma = (u^\sigma - c^\sigma) \Delta t,$$

где $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, σ — номер итерации. Точки пересечения полученных характеристических направлений с прямой $t = t^n$ (рис. 1) определяются соотношениями

$$x_L^\sigma = x_k - (u^\sigma + c^\sigma) \Delta t, \quad x_C^\sigma = x_k - u^\sigma \Delta t, \quad x_R^\sigma = x_k - (u^\sigma - c^\sigma) \Delta t. \quad (9)$$

Параметры $(\rho, u, v, p, \alpha)^{(0)}$ в найденных точках $(x_L, x_C, x_R)^{(0)}$ находятся интерполяцией по их известным значениям в ближайших узлах. Перепишем соотношения (7), (8) в конечно-разностном виде:

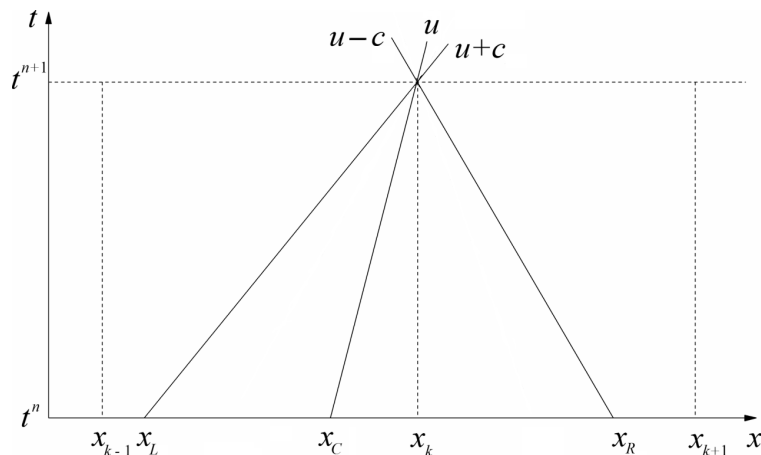


Рис. 1. Расчетная схема для узлового метода характеристик

Fig. 1. Calculation scheme for the nodal method of characteristics

$$\begin{aligned}
 u^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - u_L^\sigma + \frac{1}{(\rho c)_L^\sigma} [p^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - p_L^\sigma] &= \frac{\mathbf{g}_x \Delta t}{(u+c)_L^\sigma}, \\
 p^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - p_C^\sigma - (c^2)_C^\sigma [\rho^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - \rho_C^\sigma] &= 0, \\
 v^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - v_C^\sigma &= \mathbf{g}_y \Delta t, \\
 \alpha^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - \alpha_C^\sigma + \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)_C^\sigma [\rho^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - \rho_C^\sigma] &= 0, \\
 u^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - u_R^\sigma - \frac{1}{(\rho c)_R^\sigma} [p^{\sigma+1}(x_k, t^{n+1}) - p_R^\sigma] &= \frac{\mathbf{g}_x \Delta t}{(u-c)_R^\sigma}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Решая систему (10) при $\sigma = 0$ относительно переменных $(\rho, u, v, p, \alpha)^{(1)}$, найдем уточненные значения искоемых функций в точке (x_k, t^{n+1}) . Затем по этим данным из выражений (9) вычисляются новые координаты $(x_L, x_C, x_R)^{(1)}$, которые, в свою очередь, используются для определения $(\rho, u, v, p, \alpha)^{(2)}$ из (10), где необходимо положить $\sigma = 1$. Описанный итерационный процесс продолжается вплоть до сходимости. При невязке 10^{-7} требуется, как правило, 5–7 итераций.

Аналогичные формулы в направлении Oy , позволяющие определить значения искоемых параметров в точке (y_k, t^{n+1}) , следующие:

$$\begin{aligned}
 y_L^\sigma &= y_k - (v^\sigma + c^\sigma) \Delta t, \quad y_L^\sigma = y_k - v^\sigma \Delta t, \quad y_R^\sigma = y_k - (v^\sigma - c^\sigma) \Delta t, \\
 u^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - u_L^\sigma + \frac{1}{(\rho c)_L^\sigma} [p^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - p_L^\sigma] &= \frac{\mathbf{g}_y \Delta t}{(v+c)_L^\sigma}, \\
 p^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - p_C^\sigma - (c^2)_C^\sigma [\rho^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - \rho_C^\sigma] &= 0, \\
 u^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - u_C^\sigma &= \mathbf{g}_x \Delta t, \\
 \alpha^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - \alpha_C^\sigma + \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)_C^\sigma [\rho^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - \rho_C^\sigma] &= 0, \\
 v^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - v_R^\sigma - \frac{1}{(\rho c)_R^\sigma} [p^{\sigma+1}(y_k, t^{n+1}) - p_R^\sigma] &= \frac{\mathbf{g}_y \Delta t}{(v-c)_R^\sigma}.
 \end{aligned}$$

3. Результаты численного моделирования

Для иллюстрации применения описанного выше численного метода рассмотрена задача о растекании столба жидкости ($\alpha = 0.99$, $\rho_s^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$), находящегося в поле массовых сил ($\mathbf{g}_x = 0$, $\mathbf{g}_y = -9.8 \text{ м/с}^2$), начальное положение и форма которого на момент времени $t = 0$ приведены на рис. 2, а. Рассматриваемый жидкий столб располагался в воздухе при нормальных условиях с $\alpha = 10^{-8}$.

Нижняя граница расчетной области — непроницаемая для газа и жидкости. Левая и верхняя — “свободные” границы, через которые среда может втекать или вытекать. Правая граница — плоскость симметрии. Во всем расчетном пространстве на момент времени $t = 0$ полагалось $p = 0.1 \text{ МПа}$, $u = v = 0$. Расчеты выполнены на равномерной сетке из 200×100 узлов. Временной шаг во все время расчета полагался постоянным и равным $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Для визуализации области, занятой жидкостью, использовался метод маркеров [23], для чего в приграничные ячейки устанавливались невесомые маркеры, которые перемещались с локальной скоростью среды. Эти маркеры в процессе вычислений не участвовали, а использовались лишь для целей визуализации деформации жидкого столба. На рис. 2, б и в приведены поля скоростей, распределения давлений в растекающемся столбе жидкости на моменты времени 0.75 и 1 с, а на рис. 2, г — распределения скорости $u(x)$ у поверхности преграды на эти же моменты времени.

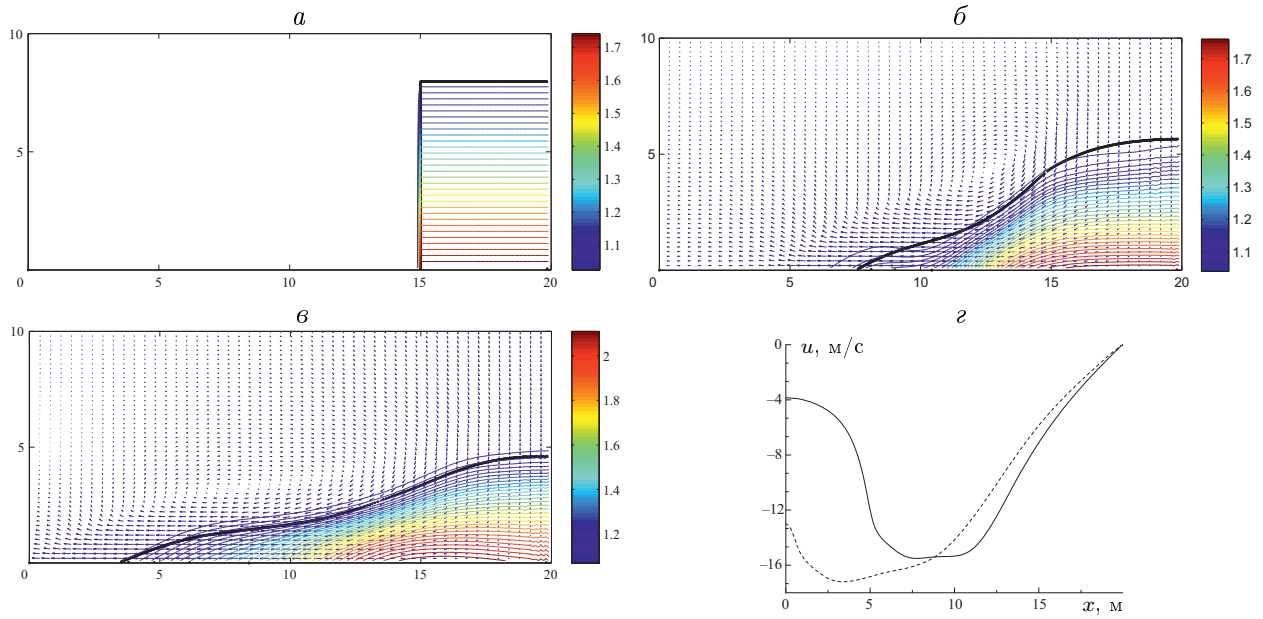


Рис. 2. Поля скоростей и давлений к моментам времени: 0; 0.75; 1 с (*a–в*). Распределение скорости у поверхности преграды к моментам времени: 0.75 и 1.0 с (сплошная и штриховая кривые) (*г*)

Fig. 2. Velocity and pressure fields at time points: 0; 0.75; 1 s (*a–в*). Velocity distribution at the barrier surface to time points: 0.75 and 1.0 s (solid and dashed curves) (*г*)

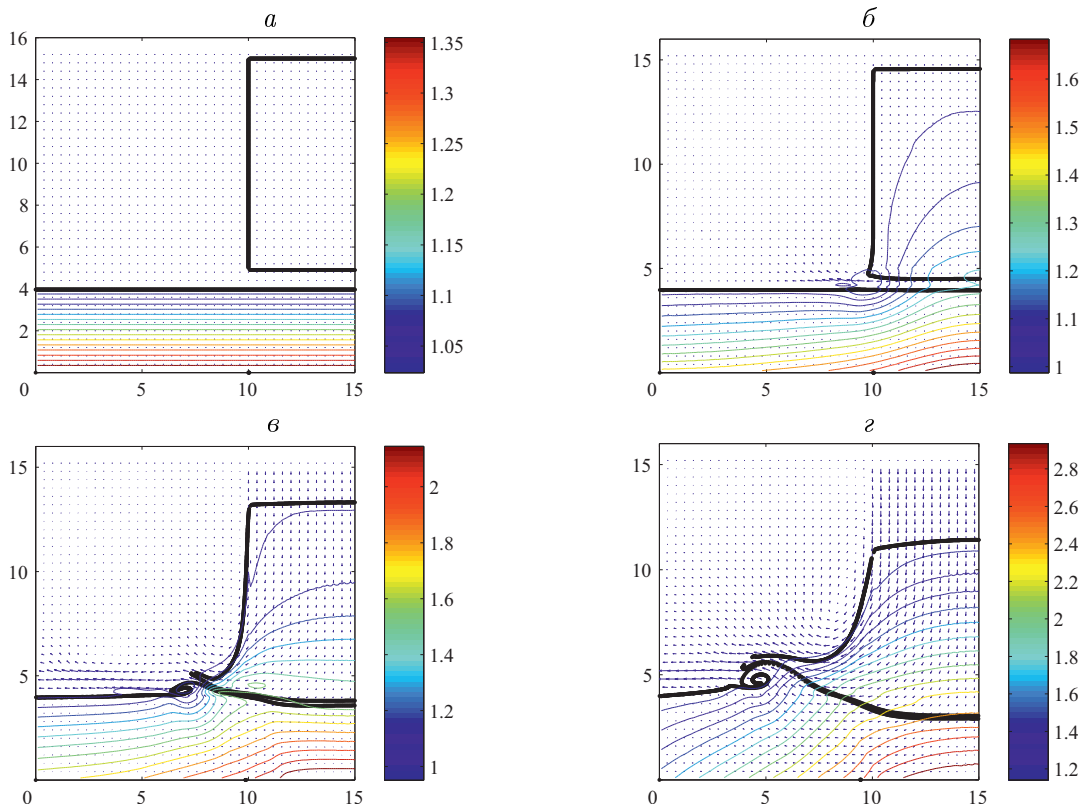


Рис. 3. Поля скоростей и давлений к моментам времени: 0; 0.025; 0.05 и 0.075 с (*a–г*)

Fig. 3. Velocity and pressure fields at time points: 0; 0.025; 0.05 and 0.075 s (*a–г*)

В следующей задаче рассмотрено взаимодействие столба жидкости со слоем жидкости под действием сил гравитации. Параметры газа, жидкости и массовые силы — те же, что и в предыдущей задаче. В начальный момент времени скорость столба жидкости равна нулю (рис. 3, *a*). В отличие от предыдущей задачи левая граница — твердая стенка. Расчеты выполнены на равномерной сетке из 150×150 узлов. Временной шаг во все время расчета полагался постоянным и равным $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}$ с. На рис. 3, *b–г* представлены поля скоростей и давлений к моментам времени 0.025, 0.05 и 0.075 с после начала падения. Влияние окружающего столб жидкости воздуха становится заметным с момента времени, предшествующего непосредственному контакту нижнего торца столба со слоем жидкости. Вследствие действия истекающего из зазора воздуха наблюдается некоторая деформация нижней части столба жидкости (рис. 3, *б*).

В рамках рассмотренного метода рассчитано свободное колебание жидкости в бассейне, длина которого $L = 10$ м, глубина $H = 7$ м. Над поверхностью жидкости располагается воздух при нормальных условиях. Начальное положение свободной границы жидкости определялось выражением

$$y(x) = H + \sin\left(\frac{x\pi}{L} + \frac{\pi}{2}\right).$$

В момент времени $t = 0$ жидкость покоится, а давление в ней распределено по гидростатическому закону (рис. 4, *a*). Под действием сил гравитации в бассейне возникает колебательное движение жидкости, сопровождающееся сложным вихревым движением газа над поверхностью жидкости, как видно из рис. 4, *б*, где приведено поле скоростей на момент времени $t = 0.6$ с. Расчеты выполнены на равномерной сетке из 100×150 узлов. Временной шаг во все время расчета полагался постоянным и равным $\Delta t = 3 \cdot 10^{-4}$ с. На рис. 4, *в* приведена временная зависимость вертикальной координаты свободной поверхности жидкости вблизи левой границы бассейна, откуда видно, что расчетный период колебаний составляет $T \simeq 3$ с. Это согласуется с теоретической оценкой $T = \sqrt{4\pi L / \left[g \operatorname{th}\left(\frac{\pi H}{L}\right) \right]} \approx 3.6$ с, которую дает линеаризованная теория для волн малой амплитуды [24], где пренебрегалось влиянием движущегося над свободной поверхностью жидкости воздуха.

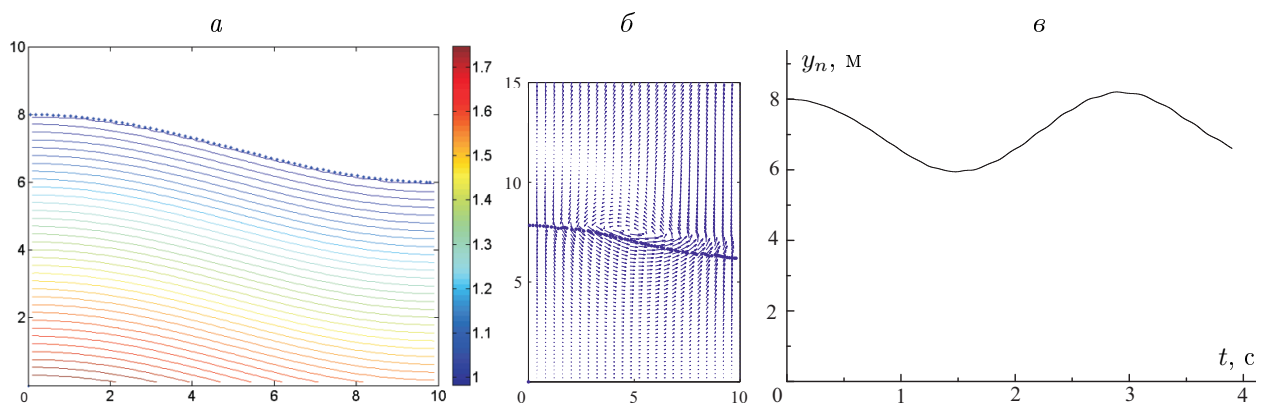


Рис. 4. Колебание жидкости в бассейне: распределение давления p/p_0 на момент времени $t = 0$ (*a*); поле скоростей к моменту времени $t = 0.6$ с (*б*); зависимость вертикальной координаты свободной поверхности жидкости вблизи левой границы бассейна от времени (*в*)

Fig. 4. Fluid fluctuation in the pool: pressure distribution p/p_0 at time $t = 0$ (*a*); speed field at time $t = 0.6$ s (*б*); the vertical coordinate of the free surface of the liquid near the left border of the basin is time dependent (*в*)

Заключение

В гиперболическую обобщенно-равновесную модель среды включены силы гравитации. Рассмотренная модель, описывающая течение односкоростной бинарной смеси идеального газа со второй несжимаемой фракцией, использована для расчета совместного движения жидкости и газа с автоматической локализацией контактных поверхностей в рамках подхода многожидкостной гидродинамики. При численном решении уравнений модели применен простой, но эффективный многомерный узловый метод характеристик, предназначенный для интегрирования гиперболических систем. Метод базируется на расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем, для расчета которых применен одномерный узловый метод характеристик. С помощью этого метода решен ряд модельных задач о растекании столба жидкости под действием сил гравитации, падения водяного столба на слой жидкости, а также свободного колебания жидкости в бассейне.

Список литературы

- [1] **Parpia I.H., Kentzer C.P., Williams M.H.** Multidimensional time dependent method of characteristics. *Computers and Fluids*. 1988; 16(1):105–117.
- [2] **Суров В.С.** Гиперболические модели в механике гетерогенных сред. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014; 54(1):139–148.
- [3] **Sanchez-Alegria A., Moreno P., Loo-Yau J.R., Ortega-Cisneros S.** An alternative model for aerial multiconductor transmission lines excited by external electromagnetic fields based on the method of characteristics. *Electrical Engineering*. 2019; (101):719–731.
- [4] **Pilon L., Viskanta R.** Modified method of characteristics for solving population balance equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2003; 42(11):1211–1236.
- [5] **Eklund M., Alamaniotis M., Hernandez H., Jevremovic T.** Method of characteristics — A review with applications to science and nuclear engineering computation. *Progress in Nuclear Energy*. 2015; (85):548–567.
- [6] **Суров В.С.** К расчету упругопластической деформации твердого тела многомерным узловым методом характеристик. *Вычислительные технологии*. 2021; 26(4):39–52. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.005.
- [7] **Мартыненко М.Д., Босяков С.М.** Метод характеристик для динамической термоупругой задачи кубически анизотропного тела в напряжениях. *Инженерно-физический журнал*. 2002; 75(3):74–81.
- [8] **Русанов В.В.** Характеристики общих уравнений газовой динамики. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1963; 3(3):508–527.
- [9] **Магомедов К.М., Холодов А.С.** Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука; 1988: 290.
- [10] **Суров В.С.** Многомерный узловый метод характеристик для гиперболических систем. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2021; 13(1):19–32. DOI:10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-32.
- [11] **Суров В.С.** Узловой метод характеристик в многожидкостной гидродинамике. *Инженерно-физический журнал*. 2013; 86(5):1080–1087.
- [12] **Суров В.С.** Об уравнениях односкоростной гетерогенной среды. *Инженерно-физический журнал*. 2009; 82(1):75–84.

- [13] Суков В.С. О локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидродинамике. Инженерно-физический журнал. 2010; 83(3):518–527.
- [14] Суков В.С. К вопросу граничных условий в многомерном узловом методе характеристик. Инженерно-физический журнал. 2021; 94(3):715–721.
- [15] Мурти Т. Сейсмические морские волны. Цунами. Л.: Гидрометеиздат; 1981: 446.
- [16] Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН; 1996: 276.
- [17] Левин Б.В., Носов М.А. Физика волн цунами и родственных явлений в океане. М.: Янус-К; 2005: 360.
- [18] Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. Вычислительные технологии. 2014; 19(1):40–62.
- [19] Шокин Ю.И., Рычков А.Д., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б. О численных методах решения задач о накате волн на берег. I. Сравнительный анализ численных алгоритмов для одномерных задач. Вычислительные технологии. 2015; 20(5):214–232.
- [20] Зайцев А.И., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Ялченир А. Вычислительный комплекс НАМИ-ДАНС в проблеме цунами. Вычислительная механика сплошных сред. 2019; 12(2):161–174.
- [21] Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука; 1983: 175.
- [22] Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук А.Г., Симонов К.В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. Новосибирск: Наука; 1989: 168.
- [23] Суков В.С. Взаимодействие ударных волн с каплями пузырьковой жидкости. Журнал технической физики. 2001; 71(6):17–22.
- [24] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз; 1963: 584.

Calculation of heavy liquid flows by the multidimensional nodal method of characteristics

SUROV VICTOR S.

South Ural State University (NRU), 454080, Chelyabinsk, Russia

Corresponding author: Surov Victor S., e-mail: surovvictor@gmail.com

Received December 8, 2021, revised February 10, 2022, accepted February 14, 2022.

Abstract

Gravity forces are included in the hyperbolic generalized-equilibrium model of the medium. This model, which describes the flow of a single-velocity binary mixture of an ideal gas with a second incompressible fraction, is used in multi-fluid hydrodynamics to calculate the combined movement of liquid and gas with automatic localization of contact surfaces. Numerical solution of the model equations adapts a simple but effective multidimensional node method of characteristics. The method was designed to integrate hyperbolic systems and it is based on splitting the original

system of equations into a number of one-dimensional subsystems. To do this a one-dimensional node method of characteristics is employed. Using the described method, a number of model problems were solved including the flow of a column of liquid under the influence of gravity, the fall of a water column on a layer of liquid as well as the free oscillation of liquid in the basin.

Keywords: hyperbolic model of gas-liquid medium, multidimensional nodal method of characteristics.

Citation: Surov V.S. Calculation of heavy liquid flows by the multidimensional nodal method of characteristics. Computational Technologies. 2022; 27(2):62–73. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.006. (In Russ.)

References

1. **Parpia I.H., Kentzer C.P., Williams M.H.** Multidimensional time dependent method of characteristics. Computers and Fluids. 1988; 16(1):105–117.
2. **Surov V.S.** Hyperbolic models in the mechanics of heterogeneous media. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014; 54(1):148–157. DOI:10.1134/S096554251401014X.
3. **Sanchez-Alegria A., Moreno P., Loo-Yau J.R., Ortega-Cisneros S.** An alternative model for aerial multiconductor transmission lines excited by external electromagnetic fields based on the method of characteristics. Electrical Engineering. 2019; (101):719–731.
4. **Pilon L., Viskanta R.** Modified method of characteristics for solving population balance equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2003; 42(11):1211–1236.
5. **Eklund M., Alamaniotis M., Hernandez H., Jevremovic T.** Method of characteristics — A review with applications to science and nuclear engineering computation. Progress in Nuclear Energy. 2015; (85):548–567.
6. **Surov V.S.** Calculation of the elasticplastic deformation of a solid body by multidimensional nodal method of characteristics. Computational Technologies. 2021; 26(4):39–52. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.005. (In Russ.)
7. **Martynenko M.D., Bosyakov S.M.** Method of characteristics for the dynamic thermoelastic problem of a cubically anisotropic body in stresses. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2002; 75(3):614–623.
8. **Rusanov V.V.** Characteristics of the general equations of gas dynamics. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1963; 3(3):674–698.
9. **Magomedov K.M., Kholodov A.S.** Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody [Grid-characteristic numerical methods]. Moscow: Nauka; 1988: 290. (In Russ.)
10. **Surov V.S.** Multidimensional nodal method of characteristics for hyperbolic systems. Computer Research and Modeling. 2021; 13(1):19–32. DOI:/10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-3. (In Russ.)
11. **Surov V.S.** Nodal method of characteristics in multifluid hydrodynamics. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2013; 86(5):1151–1159. DOI:10.1007/s10891-013-0937-5.
12. **Surov V.S.** On equations of a one-velocity heterogeneous medium. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2009; 82(1):75–84. DOI:10.1007/s10891-009-0163-3.
13. **Surov V.S.** On localization of contact surfaces in multifluid hydrodynamics. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2010; 83(3):549–559. DOI:10.1007/s10891-010-0376-5.
14. **Surov V.S.** On the problem of boundary conditions in the multidimensional nodal method of characteristics. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2021; 94(3):695–701. DOI:10.1007/s10891-021-02346-1.
15. **Murty T.S.** Seismic sea waves. Tsunamis. Ottawa: Department of the Environment. Fisheries and Marine Service; 1977: 337.
16. **Pelinovsky E.N.** Gidrodinamika voln tsunami [Tsunami wave hydrodynamics]. Nizhny Novgorod: IPF RAN; 1996: 276. (In Russ.)
17. **Levin B., Nosov M.** Physics of tsunamis. Springer; 2009: 338.
18. **Beizel S.A., Shokina N.Yu., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** On some numerical algorithms for computation of tsunami runup in the framework of shallow water model. Computational Technologies. 2014; 19(1):40–62. (In Russ.)
19. **Shokin Yu.I., Rychkov A.D., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** On numerical methods for solving run-up problems. I. Comparative analysis of numerical algorithms for one-dimensional problems. Computational Technologies. 2015; 20(5):214–232. (In Russ.)

20. **Zaytsev A.I., Kurkin A.A., Pelinovsky E.N., Yalciner A.** Computational NAMI-DANCE complex in the problem of tsunami waves. *Computational Continuum Mechanics*. 2019; 12(2):161–174. (In Russ.)
21. **Marchuk A.G., Chubarov L.B., Shokin Yu.I.** Chislennoe modelirovanie voln tsunami [Numerical modelling of tsunami waves]. Novosibirsk: Nauka; 1983: 175. (In Russ.)
22. **Shokin Yu.I., Chubarov L.B., Marchuk A.G., Simonov K.V.** Vychislitel'nyy eksperiment v probleme tsunami [Computational experiment in tsunami problem]. Novosibirsk: Nauka; 1989: 168. (In Russ.)
23. **Surov V.S.** Interaction of shock waves with bubbleliquid drops. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*. 2001; 46(6):662–667. DOI:10.1134/1.1379630.
24. **Cochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V.** Teoreticheskaya gidromekhanika [Theoretical hydromechanics]. Vol. 1. Moscow: Fizmatgiz; 1963: 584. (In Russ.)