

Плановые модели волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. III. Линейный анализ в случае неровного дна

Г. С. ХАКИМЗЯНОВ^{1,*}, З. И. ФЕДОТОВА¹, Д. ДУТЫХ²

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

²Университет Савойя Монблан, 73376, Шамбери, Франция

*Контактный автор: Хакимзянов Гаяз Салимович, e-mail: khak@ict.nsc.ru

Поступила 31 января 2022 г., доработана 24 февраля 2022 г., принята в печать 3 марта 2022 г.

Для иерархии длинноволновых гидродинамических моделей получены соотношения, устанавливающие связь между градиентами амплитуды волны и глубины в случае слабо изменяющегося дна. Выведены законы изменения амплитуды в зависимости от глубины жидкости — расширение закона Грина, известного для бездисперсионной модели мелкой воды, на случай длинноволновых моделей с дисперсией. Показано, что повышение порядка длинноволнового приближения, как и повышение точности дисперсионного соотношения моделей мелкой воды, приводит к более точному описанию не только фазовых, но и амплитудных характеристик модели трехмерных потенциальных течений.

Ключевые слова: длинные поверхностные волны, нелинейно-дисперсионные уравнения, дисперсионное соотношение, фазовая скорость, закон Грина, неровное дно.

Цитирование: Хакимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д. Плановые модели волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. III. Линейный анализ в случае неровного дна. Вычислительные технологии. 2022; 27(2):37–53. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.004.

Введение

В работах [1, 2] представлены новые модели повышенной точности, полученные путем модификации формул для негидростатической составляющей давления известной Serre – Green – Naghdi-модели (далее SGN-), позволившей добиться четвертого (для mSGN-) и шестого-восьмого (для mSGN4-) порядков аппроксимации дисперсионного соотношения модели трехмерных потенциальных течений (далее FNPF-модель [2]). При этом mSGN-модель, как и SGN-модель, имеет второй порядок длинноволнового приближения, тогда как mSGN4-модель — четвертый. Вывод mSGN4-модели [2] расширил существующую иерархическую цепочку моделей мелкой воды [3, 6] в сторону повышения порядка длинноволновой аппроксимации.

В известных работах, посвященных нелинейно-дисперсионным (NLD-) моделям четвертого порядка точности, в качестве вектора скорости, как правило, выбиралась горизонтальная составляющая вектора скорости FNPF-модели на некоторой поверхности, расположенной между дном и свободной границей (см., например, обзорную статью [7]). В итоге получалась очень громоздкая форма записи уравнений. Кроме того, для этих моделей не выполняются законы сохранения массы и импульса. В полученных в [1, 2] mSGN- и mSGN4-моделях, учитывающих подвижность дна, используется усредненная по толщине жидкого слоя скорость. Для них выполняется закон сохранения массы, а закон сохранения полного импульса выполняется в случае горизонтального неподвижного дна. Уравнения этих моделей инвариантны относительно преобразования Галилея и записываются в компактной форме, аналогичной записи уравнений газовой динамики с источниками членами.

Для указанных моделей в [1, 2] проведен анализ дисперсионных свойств (дисперсионный анализ) при условии, что дно горизонтальное. Представляет несомненный интерес аналогичное исследование таких моделей в случае дна переменной формы.

Следует отметить, что первые NLD-модели были выведены в связи с необходимостью более точного воспроизведения поверхностных волн средней длины, которые обычно наблюдаются в мелководной зоне акваторий, где волновая картина во многом определяется рельефом дна. Изучение именно этой стадии развития волнового процесса представляет наибольший интерес для исследователей и практиков, занимающихся проблемами освоения прибрежных территорий.

В недавних работах [8, 9] перечислены основные достижения в изучении волновых режимов в областях с переменной батиметрией. Здесь в случае нелинейных волн и сложного рельефа дна возможно только численное моделирование. Упрощение задачи при переходе к линейной теории позволяет аналитически описать частные случаи, которые помогают прояснить некоторые черты сложной картины реальных течений. Линеаризация модели с последующим анализом дисперсионного соотношения для гармонической волны позволяет получить соотношения между градиентами амплитуды и глубины на слабо изменяющемся дне, что впервые показано в работе [10]. Впоследствии этот подход был усовершенствован в ряде работ (см., например, [11, 15]), где полученные формулы использовались авторами для сравнения точности предлагаемых ими моделей с известными.

В настоящей работе для mSGN- и mSGN4-моделей получен ряд свойств, проявляющихся при выходе волн из относительно глубоководной области в прибрежную зону с изменяющейся глубиной. Получены соотношения, устанавливающие связь между градиентами амплитуды и глубиной волны в случае слабо изменяющегося дна. Выведены законы зависимости амплитуды от глубины жидкости — расширение закона Грина, известного для бездисперсионной модели мелкой воды (NSWE-модель), на случай длинноволновых моделей с дисперсией.

Показано, что повышение порядка длинноволнового приближения, как и повышение точности аппроксимации дисперсионного соотношения моделей мелкой воды, приводит к более точному описанию не только фазовых, но и амплитудных характеристик FNPF-модели, при этом mSGN4-модель четвертого порядка длинноволнового приближения с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения демонстрирует лучшую аппроксимацию этих характеристик в случае как горизонтального [2], так и неровного дна.

1. SGN-модель и ее модификации

Приведем краткое описание моделей, полученных в [1, 2] путем модификации формул для негидростатической составляющей давления SGN-модели, позволившей достичь четвертого (для mSGN-) и шестого–восьмого (для mSGN4-) порядков аппроксимации дисперсионного соотношения FNPF-модели.

SGN-модель можно записать в виде

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla p}{H} = \frac{\check{p}}{H} \nabla h, \quad (2)$$

где \mathbf{u} — усредненная по глубине жидкости горизонтальная составляющая вектора скорости 3D-течения; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ — вектор горизонтальных координат; t — время, g — ускорение свободного падения; $H = \eta + h$ — полная глубина; $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня воды, функция $h = h(\mathbf{x}, t)$ описывает форму дна; p — проинтегрированная по толщине слоя жидкости главная часть давления трехмерной модели, удерживаемая в длинноволновом приближении, имеющая вид

$$p = g \frac{H^2}{2} - \left(\frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right), \quad \check{p} = gH - \left(\frac{H^2}{2} R_1 + HR_2 \right), \quad (3)$$

где

$$R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2, \quad R_2 = D^2 h, \quad (4)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

Далее величину p будем называть давлением NLD-модели или просто давлением.

Уравнения mSGN-модели имеют в точности такой же вид (1)–(3), как уравнения SGN-модели, но с другими R_1 и R_2 :

$$R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \beta \nabla \cdot \mathbf{I}_0, \quad R_2 = D^2 h - \beta \mathbf{I}_0 \cdot \nabla h,$$

где β — параметр модели, $\beta \leq 0$,

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g \nabla \eta. \quad (5)$$

Уравнение неразрывности mSGN4-модели имеет тот же вид (1), что и в SGN-модели, а уравнение движения отличается от (2) наличием одного дополнительного слагаемого:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla \cdot \mathcal{M}}{H} + \frac{\nabla p}{H} = \frac{\check{p}}{H} \nabla h,$$

где

$$\mathcal{M} = \frac{H^3}{180} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

$$m_{11} = 15A_1^2 + 15HA_1B_1 + 4H^2B_1^2 \geq 0,$$

$$m_{12} = m_{21} = 15A_1A_2 + 7.5H(A_1B_2 + A_2B_1) + 4H^2B_1B_2,$$

$$m_{22} = 15A_2^2 + 15HA_2B_2 + 4H^2B_2^2 \geq 0,$$

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2)^\top = -\nabla(Dh) - (\nabla \cdot \mathbf{u})\nabla h, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2)^\top = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

Выражение для давления в mSGN4-модели имеет следующий вид:

$$p = g \frac{H^2}{2} - \left(\frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right) - \left[\left(\nabla(Dh) + 2(\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla h \right) \cdot \mathbf{Q}_1 + D(\nabla h \cdot \mathbf{Q}_1) - \right. \\ \left. - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{Q}_2 + 2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{Q}_2 - D(\nabla \cdot \mathbf{Q}_2) \right] + \\ + \beta_1 \left(\frac{H^3}{3} \nabla \cdot \mathbf{I}_1 + \frac{H^2}{2} \mathbf{I}_1 \cdot \nabla h \right) + \beta_0 \left(\nabla h \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_1 - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_2 \right),$$

где R_1 и R_2 определяются формулами (4),

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{H^3}{12} \mathbf{A} + \frac{H^4}{24} \mathbf{B}, \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{H^4}{24} \mathbf{A} + \frac{H^5}{45} \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{Q}}_1 = \frac{H^3}{12} \tilde{\mathbf{A}} + \frac{H^4}{24} \tilde{\mathbf{B}}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_2 = \frac{H^4}{24} \tilde{\mathbf{A}} + \frac{H^5}{45} \tilde{\mathbf{B}}, \\ \tilde{\mathbf{A}} = -\nabla(\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h) - (\nabla \cdot \mathbf{I}_0) \nabla h, \quad \tilde{\mathbf{B}} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{I}_0).$$

Параметр \mathbf{I}_0 вычисляется как в mSGN-модели (5):

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 - \left[\frac{1}{H} \nabla \left(\frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right) - \left(\frac{H}{2} R_1 + R_2 \right) \nabla h \right].$$

Давление на дне выражается формулой

$$\check{p} = gH - \left(\frac{H^2}{2} R_1 + H R_2 \right) + D(\nabla \cdot \mathbf{Q}_1) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{Q}_1 + \beta_1 \left(\frac{H^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{I}_1 + H \mathbf{I}_1 \cdot \nabla h \right) - \beta_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_1.$$

В работах [1, 2] достаточно подробно исследованы дисперсионные свойства этих моделей для решений, имеющих вид гармоник:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (7)$$

где $a_0 \neq 0$ и $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$ — амплитуды гармоник; $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^\top$ — волновой вектор, $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$; ω — волновая частота. Для линеаризованных mSGN- и mSGN4-моделей в случае горизонтального дна $h(\mathbf{x}, t) \equiv d = \text{const} > 0$ корни дисперсионных уравнений, имеющие смысл частоты, выглядят соответственно следующим образом:

$$\omega = \left[g d k^2 \frac{1 - \frac{\beta}{3} \xi^2}{1 + \frac{1 - \beta}{3} \xi^2} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

$$\omega = \left[g d k^2 \frac{1 - \frac{\beta_1}{3} \xi^2 + \frac{\beta_0}{45} \xi^4}{1 + \frac{1 - \beta_1}{3} \xi^2 + \frac{\beta_0 - 5\beta_1 - 1}{45} \xi^4} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

где $k = |\mathbf{k}|$, $\xi = kd$. При $\beta = 0$ в формуле (8) получаем выражение ω для SGN-модели.

Оценку дисперсионных свойств моделей мелкой воды обычно производят сравнением фазовых скоростей, соответствующих этим моделям, с “эталонными” значениями их аналогов в линеаризованной задаче Коши–Пуассона для потенциальных течений [1, 10, 13].

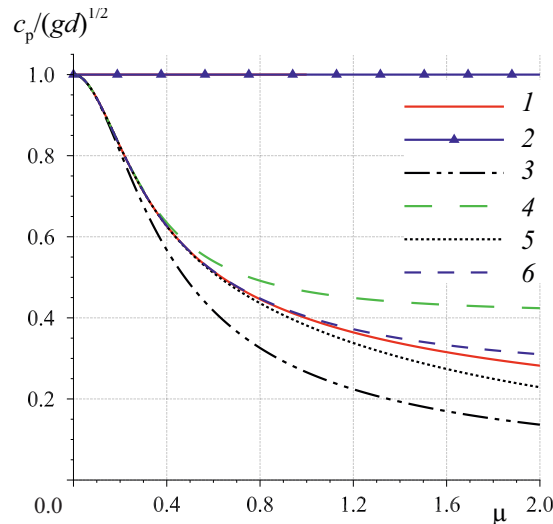


Рис. 1. Зависимость модуля c_p фазовой скорости от параметра дисперсии μ в моделях: FNPF (1); NSWЕ (2); SGN (3); mSGN при $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 при $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 при $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ (6)

Fig. 1. Phase velocity c_p as a function of the dispersion parameter μ in the models: FNPF (1); NSWЕ (2); SGN (3); mSGN with $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 with $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 with $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ (6)

В [1] показано, что при $\beta = -0.2$ mSGN-модель аппроксимирует “эталонную” фазовую скорость с точностью $O(\mu^4)$, где $\mu = d/\lambda$ — параметр дисперсии, λ — характерное значение длины волны, причем согласно способу получения дифференциальных уравнений сама mSGN-модель аппроксимирует исходную FNPF-модель лишь с точностью $O(\mu^2)$, $\beta \in [-0.2, 0]$.

Выведенное в [2] двухпараметрическое семейство mSGN4-моделей аппроксимирует FNPF-модель с точностью $O(\mu^4)$, при этом параметры β_0 и β_1 должны удовлетворять соотношениям

$$0 \leq \beta_0 \leq \beta_1(1 + 5\beta_1), \quad \beta_1 < -\frac{1}{5}.$$

Показано, что при $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ “эталонная” фазовая скорость аппроксимируется с точностью $O(\mu^8)$ и при $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$ — с точностью $O(\mu^6)$.

На рис. 1 продемонстрировано, как происходит уточнение фазовой скорости $c_p = \omega/k$ длинноволновых моделей с повышением их точности в зависимости от параметра дисперсии μ . Бездисперсионную модель мелкой воды (NSWE-модель) можно использовать только для очень длинных волн ($\mu \leq 0.05$). Наилучший результат получается для mSGN4-модели с аппроксимантом Padé (4,4) (линия 6 на рис. 1). Отметим, что в области очень коротких волн наиболее предпочтительной [2] является mSGN4-модель с аппроксимантом Padé (2,4).

2. Линейный анализ в случае неровного дна

Безусловно, представляет интерес поведение волн при их выходе на мелководье. В настоящей работе рассмотрим случай, когда волны движутся к прямолинейной береговой линии $x = 0$ (здесь $x = x_1$) перпендикулярно прямолинейным изобатам. Это предположение позволяет рассматривать однонаправленное течение в акватории с глубиной $h = h(x)$. Кроме того, ограничимся изучением линеаризованных уравнений при допол-

нительном предположении, что форма дна является слабо изменяющейся в том смысле, что вторые и более высокого порядка производные функции $h(x)$, а также всевозможные произведения производных этой функции пренебрежимо малы. При этих условиях линеаризованные mSGN- и mSGN4-модели одномерного течения записываются следующим образом: уравнение неразрывности

$$\eta_t + uh_x + hu_x = 0 \quad (10)$$

одинаково для обеих моделей, а уравнения движения имеют, соответственно, вид

$$u_t + g\eta_x - \frac{h^2}{3}((1 - \beta)u_t - \beta g\eta_x)_{xx} - hh_x((1 - \beta)u_t - \beta g\eta_x)_x = 0, \quad (11)$$

$$u_t + g\eta_x - \frac{h^2}{3}u_{txx} - hh_xu_{tx} + \beta_1 \left(hh_x(u_t + g\eta_x)_x + \frac{h^2}{3}(u_t + g\eta_x)_{xx} \right) + \frac{2h_xh^3}{9}(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)u_{xxx} + \frac{2h_xh^3}{9}\beta_0g\eta_{xxx} + \frac{h^4}{45}(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)u_{xxxx} + \frac{h^4}{45}\beta_0g\eta_{xxxx} = 0. \quad (12)$$

Далее предполагается, что над слабо изменяющимся дном распространяются волны в виде гармоник с переменной амплитудой

$$\eta(x, t) = a(x)e^{-i(\omega t - K(x))}, \quad (13)$$

при этом частота ω этих гармоник постоянна [10, 13, 16], $K_x(x) = k(x)$, а амплитуда $a(x)$ и волновое число $k(x)$, как и форма дна, являются слабо изменяющимися величинами, т. е. их вторые и более высокого порядка производные пренебрежимо малы, так что существенны лишь a_x, k_x .

В случае горизонтального дна гармоника (7), соответствующая скорости, имеет ту же фазу, что и гармоника (6). Но в случае дна переменной формы для гармоник возможен небольшой фазовый сдвиг [13], поэтому скорость будем рассматривать в виде

$$u(x, t) = v(x)e^{-i(\omega t - K(x) - \psi(x))},$$

где величина фазового сдвига $\psi(x)$ предполагается малой — того же порядка, что и h_x , т. е. величинами ψ^2, ψ_x , произведениями вида $a_x\psi, v_x\psi, h_x\psi$ и аналогичными произведениями, содержащими производные более высоких порядков, можно пренебречь. Именно из-за этого предположения о малости $\psi(x)$ скорость может быть рассмотрена в виде

$$u(x, t) = v(x)(1 + i\psi(x))e^{-i(\omega t - K(x))}. \quad (14)$$

2.1. Скорость изменения амплитуды для mSGN-модели

Подставляя гармоники (13) и (14) в уравнения (10), (11) и разделяя мнимые и действительные части, получаем следующую систему уравнений:

$$-a\omega + hvk = 0, \quad (15)$$

$$(hv)_x - hv\psi k = 0, \quad (16)$$

$$-\omega v + gak - \frac{h^2}{3}[\omega(1 - \beta)vk^2 + \beta gk^3a] = 0, \quad (17)$$

$$\omega v\psi + ga_x - \frac{h^2}{3}[\omega(1 - \beta)(2v_xk + vk_x - v\psi k^2) + \beta g(3kk_xa + 3k^2a_x)] - hh_x[\omega(1 - \beta)vk + \beta gk^2a] = 0. \quad (18)$$

Из уравнений (15) и (17) вытекает дисперсионное соотношение

$$\omega = \left[ghk^2 \frac{1 - \frac{\beta}{3}\xi^2}{1 + \frac{1-\beta}{3}\xi^2} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

аналогичное (8), где вместо d используются $h = h(x)$, $k = k(x)$, $\xi = k(x)h(x)$.

После исключения v и ψ из уравнений (16) и (18) приходим к соотношению

$$\alpha_1 \frac{a_x}{a} + \alpha_2 \frac{k_x}{k} + \alpha_3 \frac{h_x}{h} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 - \frac{4}{3}\beta\xi^2 - \frac{2}{9}\beta(1-\beta)\xi^4, \\ \alpha_2 &= -1 - \frac{2}{3}\beta\xi^2 - \frac{1}{3}\beta(1-\beta)\xi^4, \\ \alpha_3 &= \frac{\xi^2}{9}(-3 - 6\beta - 2\beta(1-\beta)\xi^2). \end{aligned}$$

Дифференцирование по x выражения (19) с учетом того, что ω не зависит явным образом от x , дает формулу

$$\frac{k_x}{k} = -\alpha_4 \frac{h_x}{h},$$

где

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} - \frac{3\xi^2}{2(9 - 6\beta\xi^2 - \beta(1-\beta)\xi^4)}.$$

Комбинируя полученные формулы, получаем соотношение между градиентами амплитуды и глубины для mSGN-модели:

$$\frac{a_x}{a} = K_{sl}(kh) \frac{h_x}{h}, \quad (20)$$

где коэффициент K_{sl} имеет следующий вид:

$$K_{sl} = \frac{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3}{\alpha_1}. \quad (21)$$

2.2. Скорость изменения амплитуды для mSGN4-модели

По схеме, изложенной в предыдущем подразделе, получим для mSGN4-модели коэффициент изменения амплитуды волны при ее выходе в мелководную зону. Подставляя гармоники (13) и (14) в (12), получаем следующие уравнения для мнимой и действительной частей:

$$-\omega v + g a k - \frac{h^2}{3} \left[\omega(1 - \beta_1) v k^2 + \beta_1 g k^3 a \right] + \frac{h^4}{45} \left[\omega(1 - \beta_0 + 5\beta_1) v k^4 + \beta_0 g a k^5 \right] = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \omega v \psi + g a_x - \frac{h^2}{3} \left[\omega(1 - \beta_1)(2v_x k + v k_x - v \psi k^2) + \beta_1 g(3k k_x a + 3k^2 a_x) \right] - \\ - h h_x \left[\omega(1 - \beta_1) v k + \beta_1 g k^2 a \right] - \frac{2h^3 h_x}{9} \left[\omega(\beta_0 - 5\beta_1 - 1) v k^3 - \beta_0 g a k^4 \right] + \\ + \frac{h^4}{45} \left[\omega(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)(-4v_x k^3 - 6v k^2 k_x + v \psi k^4) + \beta_0 g(10k^3 k_x a + 5k^4 a_x) \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнений (15) и (22) следует дисперсионное соотношение

$$\omega = \left[ghk^2 \frac{1 - \frac{\beta_1}{3}\xi^2 + \frac{\beta_0}{45}\xi^4}{1 + \frac{1 - \beta_1}{3}\xi^2 + \frac{\beta_0 - 5\beta_1 - 1}{45}\xi^4} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

аналогичное (9), с переходом к $h(x)$, как и в (19).

После исключения v и ψ из (16) и (23) приходим к формуле

$$\gamma_1 \frac{a_x}{a} + \gamma_2 \frac{k_x}{k} + \gamma_3 \frac{h_x}{h} = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 - \xi^2 \beta_1 + \zeta^2 \left(1 - \frac{1}{3}(1 - \beta_1)\xi^2 \right) - \frac{1}{15}\zeta^2(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\xi^4 + \frac{1}{9}\beta_0\xi^4, \\ \gamma_2 &= -\zeta^2 - \beta_1\xi^2 - \frac{1}{15}\zeta^2(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\xi^4 + \frac{2}{9}\beta_0\xi^4, \\ \gamma_3 &= -\frac{1}{3}\zeta^2(1 - \beta_1)\xi^2 - \beta_1\xi^2 - \frac{6}{45}\zeta^2(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\xi^4 + \frac{2}{9}\beta_0\xi^4, \end{aligned}$$

где

$$\zeta^2 = \frac{\omega^2}{ghk^2}.$$

Далее, дифференцируя по x дисперсионное соотношение (24), находим связь

$$\gamma_4 \frac{k_x}{k} + \gamma_5 \frac{h_x}{h} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= 2 - \frac{4}{3}\beta_1\xi^2 + \frac{2}{15}\beta_0\xi^4 - \zeta^2 \left[\frac{2}{3}(1 - \beta_1)\xi^2 + \frac{4}{45}(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\xi^4 \right], \\ \gamma_5 &= 1 - \beta_1\xi^2 + \frac{\beta_0}{9}\xi^4 - \zeta^2 \left[\frac{2}{3}(1 - \beta_1)\xi^2 + \frac{4}{45}(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\xi^4 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, вычислены γ_i ($i = 1, \dots, 5$), и формула изменения градиента амплитуды принимает вид (20) с коэффициентом

$$K_{sl} = \frac{\gamma_2\gamma_5 - \gamma_3\gamma_4}{\gamma_1\gamma_4}.$$

В англоязычной литературе коэффициент K_{sl} называется shoaling (sl-) коэффициентом, который отражает изменение амплитудных характеристик поверхностных волн в прибрежной зоне. Соотношение (20) описывает наблюдаемый факт увеличения амплитуды волны при ее движении в сторону берега (в сторону уменьшающейся глубины). В бездисперсионной (NSWE-) модели первого длинноволнового приближения $K_{sl}(kh) = -1/4$, т.е. не зависит ни от длины волны, ни от глубины. В “эталонной” FNPF-модели коэффициент $K_{sl}(kh)$ (линия 1 на рис. 2) вычисляется по формуле [10]

$$K_{sl}(kh) = -\frac{G(2 + G(1 - \cosh 2kh))}{2(1 + G)^2},$$

где

$$G = \frac{2kh}{\sinh 2kh}.$$

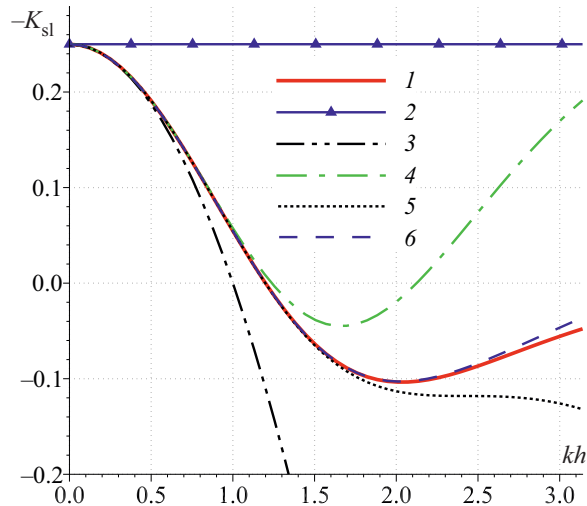


Рис. 2. Зависимость коэффициента K_{sl} от переменной kh в моделях: FNPF (1); NSWE (2); SGN (3); mSGN при $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 при $\beta_0 = 0, \beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 при $\beta_0 = 1/21, \beta_1 = -1/3$ (6)

Fig. 2. Coefficient K_{sl} as a function of the variable kh in the models: FNPF (1); NSWE (2); SGN (3); mSGN with $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 with $\beta_0 = 0, \beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 with $\beta_0 = 1/21, \beta_1 = -1/3$ (6)

Расположение кривых на рис. 2 показывает, что наилучшее приближение к “эталонной” FNPF-модели и в наиболее широком диапазоне изменения параметра kh имеет место для mSGN4-модели с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения (линия 6).

2.3. Фазовая скорость гармонической волны, движущейся по неровному дну

Как было отмечено ранее, а также в работах [10, 11] и др., дисперсионные соотношения моделей SGN, mSGN, mSGN4 и FNPF в случае слабо изменяющегося дна остаются по виду такими же, как и в случае горизонтального дна, с той лишь разницей, что вместо величины d надо использовать $h(x)$ и волновое число k становится переменной величиной. Тогда фазовая скорость определяется как отношение

$$c_p(k(x), h(x)) = \frac{\omega(k(x), h(x))}{k(x)}.$$

На рис. 3 показана зависимость фазовой скорости от глубины, где r — отношение фазовой скорости FNPF-модели к фазовым скоростям рассматриваемых моделей при $h = h_0, \mu_0 = h_0/\lambda_0$ (λ_0 — длина набегающей волны на глубине h_0). Для длинных волн (рис. 3, а) все дисперсионные модели показывают высокую точность. При уменьшении длин волн ($\mu_0 = 0.5$) удовлетворительное приближение к “эталонной” FNPF-модели имеет место для всех дисперсионных моделей (рис. 3, б), кроме SGN-модели. В недавней работе 2021 г. [17] предложена оригинальная модификация SGN-модели, улучшающая ее дисперсионные свойства на наклонном дне. Для самых коротких из рассмотренных набегающих волн ($\mu_0 = 1.0$) наилучшее приближение демонстрирует только mSGN4-модель (рис. 3, в, линии 5 и 6), более предпочтительна имеющая восьмой порядок точности дисперсионного соотношения (линия 6). Разумеется, NLD-модели мелкой

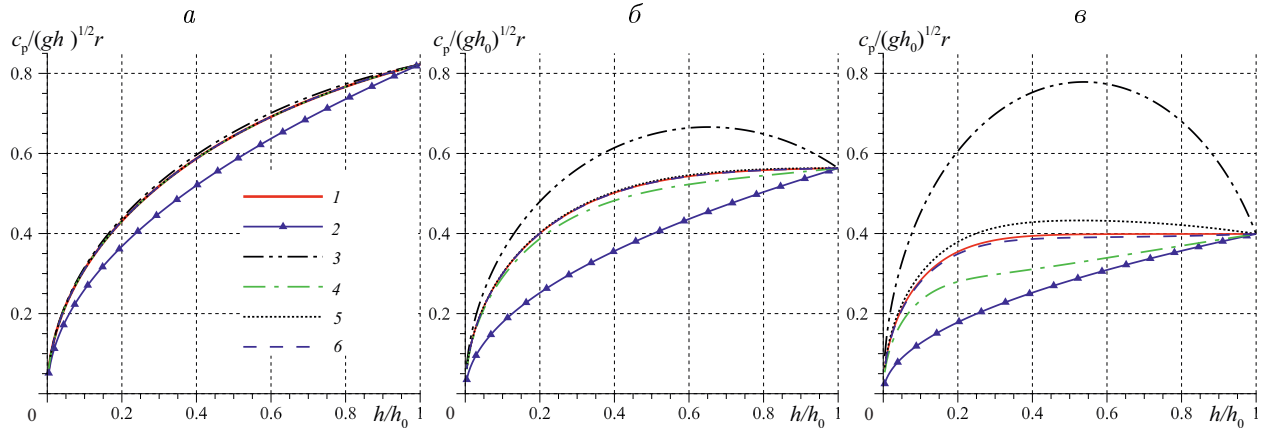


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости c_p от глубины h при $\mu_0 = 0.2$ (а), 0.5 (б) и 1.0 (в) в моделях: FNPF (1), NSW (2), SGN (3), mSGN при $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 при $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 при $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ (6)

Fig. 3. Phase velocity c_p as a function of the depth h at $\mu_0 = 0.2$ (a), 0.5 (b) and 1.0 (c) in the models: FNPF (1); NSW (2); SGN (3); mSGN with $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 with $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 with $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ (6)

воды ориентированы на воспроизведение длинных волн, что следует из условий их вывода. Однако при конструировании численных алгоритмов [5] необходимо учитывать свойства этих моделей в области коротких волн.

3. Формула изменения амплитуды волны в случае неровного дна

В практических задачах при расчетах нагрузок на прибрежные сооружения или для оценки размеров зоны затопления прибрежной территории важно знать амплитуду и длину приходящих со стороны моря волн. Если волны не обрушиваются, то для этих целей полезна формула вида (20). В самом деле, если найти зависимость $k = k(h)$, то уравнение (20) можно проинтегрировать и получить формулу для вычисления амплитуды. В работах [10, 13, 16] и др. отмечено, что при выходе длинных волн на отмель их амплитуда и длина изменяются, тогда как частота остается постоянной. Поэтому, зная длину λ_0 волны на глубоководье, можно найти $k = k(h)$ из дисперсионного соотношения, используя равенство $\omega = \omega_0$, где ω_0 — частота на границе акватории со стороны моря.

Прежде чем рассматривать конкретные модели, перепишем (20) в виде

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dh} = K_{sl}(kh) \frac{1}{h} \quad (25)$$

и введем безразмерные переменные $\bar{h} = h/h_0$ и $\bar{a} = a/a_0$, $0 < \bar{h} \leq 1$, $\bar{a} = \bar{a}(\bar{h})$, $\bar{a}(1) = 1$, в результате чего приходим к уравнению

$$\frac{d}{d\bar{h}} \ln \bar{a} = \frac{K_{sl}(\nu(\bar{h})\bar{h})}{\bar{h}}, \quad 0 < \bar{h} \leq 1, \quad (26)$$

где $\nu(\bar{h}) = k(\bar{h})h_0$.

Теперь рассмотрим SGN-модель, которая получится из mSGN-модели, если выбрать $\beta = 0$. При этом значении параметра из формулы (21) вытекает выражение для коэффициента K_{sl} , которое в размерных переменных имеет вид

$$K_{sl}(kh) = -\frac{1}{4}(1 - k^2h^2). \quad (27)$$

Проинтегрировав уравнение (26) с учетом выражения (27), переписанного для безразмерных величин, приходим к соотношению

$$\int_{\bar{h}}^1 \frac{d}{dz} \ln(\bar{a}(z)) dz = -\frac{1}{4} \int_{\bar{h}}^1 \frac{1 - z^2\nu^2(z)}{z} dz,$$

откуда получим формулу

$$-\ln(\bar{a}(\bar{h})) = \ln(\bar{h}^{1/4}) + \frac{1}{4} \int_{\bar{h}}^1 z\nu^2(z) dz. \quad (28)$$

Теперь при выводе явного выражения для амплитуды \bar{a} определим функцию $\nu(\bar{h})$ из условия постоянства частоты (8) ($\beta = 0$)

$$\omega^2 = ghk^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}h^2k^2} = gh_0k_0^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}h_0^2k_0^2}$$

или в безразмерных переменных

$$\frac{\bar{h}\nu^2(\bar{h})}{1 + \frac{1}{3}\bar{h}^2\nu^2(\bar{h})} = \frac{4\pi^2\mu_0^2}{1 + \frac{4}{3}\pi^2\mu_0^2} = \frac{\nu_0^2}{1 + \frac{1}{3}\nu_0^2}, \quad (29)$$

где $\nu_0 = 2\pi\mu_0$. Следовательно,

$$\nu^2 = \frac{\nu_0^2}{\bar{h} \left(1 + \frac{1}{3}\nu_0^2(1 - \bar{h}) \right)}.$$

Подставляя это выражение в (28), получаем

$$-\ln(\bar{a}(\bar{h})) = \ln(\bar{h}^{1/4}) + \frac{3}{4} \ln \left(1 + \frac{\nu_0^2}{3}(1 - \bar{h}) \right),$$

откуда следует зависимость амплитуды волны от глубины:

$$\bar{a}(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{h}^{1/4}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\nu_0^2(1 - \bar{h}) \right)^{3/4}}. \quad (30)$$

Отметим, что для случая бездисперсионной модели мелкой воды соотношение (27) переходит в равенство $K_{sl}(kh) = -1/4$, а формула (30) — в известную формулу закона Грина

$$\bar{a}(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{h}^{1/4}}.$$

Для mSGN- и mSGN4-моделей коэффициент $K_{sl}(kh)$ можно представить в виде

$$K_{sl}(kh) = -\frac{1}{4} + \frac{k^2h^2}{4} \tilde{K}_{sl}, \quad (31)$$

где \tilde{K}_{sl} имеет вид дробно-рациональной функции от k^2h^2 . Для mSGN-модели имеем

$$\tilde{K}_{sl} = \frac{1 - \frac{2}{9}\beta k^2 h^2 + \frac{1}{27}\beta(1 - \beta)k^4 h^4}{\left[1 - \frac{2}{3}\beta k^2 h^2 - \frac{1}{9}\beta(1 - \beta)k^4 h^4\right]^2}.$$

Аналог соотношения (28) теперь принимает вид

$$-\ln(\bar{a}(\bar{h})) = \ln(\bar{h}^{1/4}) + \frac{1}{4} \int_{\bar{h}}^1 z \nu^2(z) \tilde{K}_{sl}(z \nu(z)) dz,$$

отсюда получаем формулу для амплитуды

$$\bar{a}(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{h}^{1/4}} \exp \left[-\frac{1}{4} \int_{\bar{h}}^1 z \nu^2(z) \tilde{K}_{sl}(z \nu(z)) dz \right].$$

Выписать интеграл из правой части в явном виде не всегда удастся, так как выражение для $\nu(\bar{h})$ является корнем многочлена, т. е. может содержать радикалы, поэтому проще вычислить интеграл численно, используя для K_{sl} выражение (21). Аналогичная ситуация имеет место и для mSGN4- и FNPF-моделей.

Выведенные в настоящем разделе зависимости представлены в виде графиков на рис. 4. Из этих графиков следует, что результаты, полученные с помощью классического закона Грина, не зависят от длины набегающих волн, в то время как для моделей волновой гидродинамики старших приближений такая зависимость имеет место. Анализ результатов показал, что наилучшее приближение к коэффициенту усиления “эталонной” FNPF-модели и в наиболее широком диапазоне длин λ_0 набегающих волн имеет место для mSGN4-модели четвертого порядка с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения.

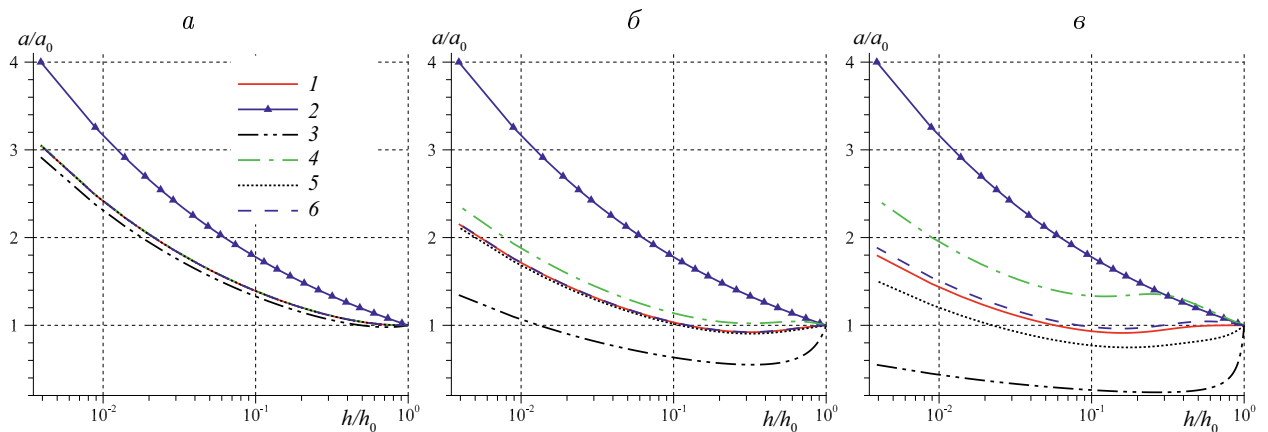


Рис. 4. Коэффициент усиления при $\mu_0 = 0.2$ (а), 0.5 (б) и 1.0 (в) для моделей: FNPF (1); NSWE (2); SGN (3); mSGN при $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 при $\beta_0 = 0, \beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 при $\beta_0 = 1/21, \beta_1 = -1/3$ (6)

Fig. 4. Amplification coefficient at $\mu_0 = 0.2$ (a), 0.5 (b) and 1.0 (c) in the models: FNPF (1); NSWE (2); SGN (3); mSGN with $\beta = -0.2$ (4); mSGN4 with $\beta_0 = 0, \beta_1 = -2/7$ (5); mSGN4 with $\beta_0 = 1/21, \beta_1 = -1/3$ (6)

Заключение

Представленные в статье результаты можно условно разделить на две группы. К первой группе можно отнести результаты анализа теоретических свойств цепочки моделей NSWЕ — SGN — mSGN и mSGN4, полученные путем сравнения с FNPF-моделью. Характеристики mSGN4-модели четвертого порядка длинноволнового приближения с восьмым порядком точности аппроксимации дисперсионного соотношения показывают наилучшую близость к характеристикам “эталонной” модели, в том числе и для акваторий с переменной глубиной. Это обстоятельство актуализирует задачу разработки и анализа численных алгоритмов для нелинейно-дисперсионных моделей повышенной точности, ориентированных на решение того же круга задач [18, 19], которые ранее решались с использованием SGN-модели.

Вторая группа результатов включает обобщение известного для бездисперсионных уравнений мелкой воды закона Грина на случай, когда дисперсия учитывается. Эти результаты могут быть полезными при проектировании защитных сооружений в прибрежной зоне и расчете силовых нагрузок на находящиеся вблизи берега плавающие или заякоренные объекты [20]. Отметим, что полученные для mSGN4-модели законы изменения амплитуды волн, несмотря на то что они близки к результатам для “эталонной” FNPF-модели, могут служить лишь для предварительных оценок, поскольку в реальных акваториях при выходе волн на протяженные мелководные зоны сильное влияние на изменение амплитуды волн оказывают формы источника и рельефа дна, дальность распространения и обрушение волн [21–27], а также многие другие факторы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий (проект 1.3 “Вычислительные технологии решения фундаментальных и прикладных задач зарождения, трансформации и воздействия на объекты поверхностных волн в природных и искусственных акваториях”) и программы “Инвестиции в будущее” (№ ANR-18-EURE-0016 — Solar Academy) Национального исследовательского агентства Франции. Авторы выражают глубокую признательность анонимному рецензенту за ценные замечания и советы по улучшению стиля представления материала статьи.

Список литературы

- [1] **Хакимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д.** Плановая модель гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. *Вычислительные технологии*. 2020; 25(5):17–41. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.003.
- [2] **Хакимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д.** Плановая модель волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. II. Четвертый, шестой и восьмой порядки. *Вычислительные технологии*. 2021; 26(3):4–25. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.002.
- [3] **Федотова З.И., Хакимзянов Г.С.** Базовая нелинейно-дисперсионная модель гидродинамики длинных поверхностных волн. *Вычислительные технологии*. 2014; 19(6):77–94.
- [4] **Шокин Ю.И., Федотова З.И., Хакимзянов Г.С.** Иерархия моделей гидродинамики длинных поверхностных волн. *Доклады Академии наук*. 2015; 462(2):168–172.

- [5] **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing. Basel: Birkhauser; 2020: 284.
- [6] **Барахнин В.Б., Хакимзянов Г.С.** Использование расщепления при решении нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды. Доклады Академии наук. 1999; 364(4):444–446.
- [7] **Madsen P.A., Fuhrman D.R.** High-order Boussinesq-type modelling of nonlinear wave phenomena in deep and shallow water. Advances in Coastal and Ocean Engineering. 2010; (11):245–285.
- [8] **Athanassoulis G.A., Benoit M., Clamond D., Grilli S.T.** Foreword to the special issue on nonlinear waves over variable bathymetry. Journal of Ocean Engineering and Marine Energy. 2019; (5):307–310.
- [9] **Eldrup M.R., Andersen T.L.** Numerical study on regular wave shoaling, de-shoaling and decomposition of free/bound waves on gentle and steep foreshores. Journal of Marine Science and Engineering. 2020; 8(5):Paper 334.
- [10] **Madsen P.A., Sørensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. Coastal Engineering. 1992; (18):183–204.
- [11] **Beji S., Nadaoka K.** A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. Ocean Engineering. 1996; 23(8):691–704.
- [12] **Lee C., Cho Y.-S., Yoon S.B.** A note on linear dispersion and shoaling properties in extended Boussinesq equations. Ocean Engineering. 2003; (30):1849–1867.
- [13] **Madsen P.A., Schäffer H.A.** Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A. 1998; (356):3123–3181.
- [14] **Simarro G., Orfila A., Galan A.** Linear shoaling in Boussinesq-type wave propagation models. Coastal Engineering. 2013; (80):100–106.
- [15] **Filippini A.G., Bellec S., Colin M., Ricchiuto M.** On the nonlinear behavior of Boussinesq type models: amplitude-velocity vs amplitude-flux forms. Coastal Engineering. 2015; (99):109–123.
- [16] **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир; 1977: 622.
- [17] **Clamond D.** Remarks on dispersion-improved shallow water equations with uneven bottom. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2021; (54):Paper 045701.
- [18] **Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Beisel S.A., Chubarov L.B., Shokina N.Yu.** Simulation of tsunami waves generated by submarine landslides in the Black Sea. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2015; 30(4):227–237.
- [19] **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Bulgarian tsunami on 7 May 2007: Numerical investigation of the hypothesis of a submarine-landslide origin. Subaqueous Mass Movements and Their Consequences: Assessing Geohazards, Environmental Implications and Economic Significance of Subaqueous Landslides. Special Publications. London: Geological Society; 2019; (477):303–313.
- [20] **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: Long waves over a flat bottom. Ocean Engineering. 2021; (221):Article 108540.
- [21] **Mirchina N.R., Pelinovsky E.N.** Nonlinear and dispersive effects for tsunami waves in the open ocean. Natural Science of Hazards. 1982; 2(4):D1–D9.

- [22] **Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh.** Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles. *Natural Hazards*. 1992; 6(3):227–249.
- [23] **Пелиновский Е.Н.** Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН; 1996: 276.
- [24] **Glimsdal S., Pedersen G.K., Harbitz C.B., Lovholt F.** Dispersion of tsunamis: does it really matter? *Natural Hazards and Earth System Science*. 2013; (13):1507–1526.
- [25] **Пелиновский Е.Н., Шургалина Е.Г., Родин А.А.** О критериях перехода обрушающегося бора в волнообразный. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2015; 51(5):598–601.
- [26] **Gusev O.I., Beisel S.A.** Tsunami dispersion sensitivity to seismic source parameters. *Science of Tsunami Hazards*. 2016; 35(2):84–105.
- [27] **Chubarov L.B., Kikhtenko V.A., Lander A.V., Gusev O.I., Beisel S.A., Pinegina T.K.** Technique of local probabilistic tsunami zonation for near-field seismic sources applied to the Bechevinskaya Cove (the Kamchatka Peninsula). *Natural Hazards*. 2022; 110(1):373–406.

Two-dimensional models of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. III. Linear analysis for an uneven bottom

КХАКИМЗЯНОВ ГАЯЗ С.^{1,*}, ФЕДОТОВА ЗИНАИДА И.¹, ДУТЯКХ ДЕНЬС²

¹Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

²Univercity Savoie Mont Blanc, CNRS, LAMA, 73376, Chambéry, France

*Corresponding author: Khakimzyanov Gayaz S., e-mail: khak@ict.nsc.ru

Received January 31, 2022, revised February 24, 2022, accepted March 3, 2022.

Abstract

Two new fully nonlinear weakly dispersive shallow water models (mSGN and mSGN4) with improved accuracy were developed by Khakimzyanov et al. [1, 2]. The average velocity was used and the bottom mobility was taken into account. Modification of the dispersion parts of the pressure of the well-known Serre – Green – Naghdi (SGN-) model made allows achieving the fourth (for mSGN) and sixth-eighth (for mSGN4) orders of approximation of the dispersion relation of the three-dimensional potential flow model (FNPF-model) in the case of a horizontal stationary bottom.

This article addresses a study of the properties for the obtained models in the case of an uneven bottom. The research method is based on the use of the dispersion relation for models, which are linearized to account a slight change of the profile of the bottom [10, 15]. For a hierarchy of long-wave hydrodynamic models using the depth-averaged velocity, relations between the gradients of the amplitude, wavenumber, and bottom are obtained. The dependence between the amplitude and depth is established. A generalization of Green's law to the case of long-wave models with dispersion is obtained. It is shown that an increase in the order of the long-wave approximation along with an increase in the accuracy of the dispersion relation of shallow water models leads to a more accurate description of both the phase, and the amplitude characteristics of the model for three-dimensional potential flows. At the same time, the mSGN4-model of the fourth order of the

long-wave approximation with the eighth order of accuracy of the dispersion relation shows the best approximation of the considered characteristics both in the case of a horizontal and uneven bottoms.

Keywords: long surface waves, nonlinear dispersive equations, dispersion relation, phase velocity, Green's law, uneven bottom.

Citation: Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D. Two-dimensional models of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. III. Linear analysis for an uneven bottom. Computational Technologies. 2022; 27(2):37–53. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.004. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state task of the Federal Research Center for Information and Computational Technologies (project 1.3 “Computational technologies for solving fundamental and applied problems of the generation, transformation and impact on objects of surface waves in natural and artificial water areas”). This work has been supported by the French National Research Agency, through Investments for Future Program (ref. ANR-18-EURE0016 — Solar Academy). The authors would like to thank the anonymous Referee for helping us to shape this manuscript.

References

1. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D.** Two-dimensional model of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. Computational Technologies. 2020; 25(5):17–41. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.003. (In Russ.)
2. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D.** Two-dimensional model of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. II. Fourth, sixth and eighth orders. Computational Technologies. 2021; 26(3):4–25. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.002. (In Russ.)
3. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** The basic nonlinear-dispersive hydrodynamic model of long surface waves. Computational Technologies. 2014; 19(6):77–94. (In Russ.)
4. **Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Hierarchy of nonlinear models of the hydrodynamics of long surface waves. Doklady Physics. 2015; 60(5):224–228.
5. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing. Basel: Birkhauser; 2020: 284.
6. **Barakhnin V.B., Khakimzyanov G.S.** The splitting technique as applied to the solution of the nonlinear dispersive shallow-water equations. Doklady Mathematics. 1999; 59(1):70–72.
7. **Madsen P.A., Fuhrman D.R.** High-order Boussinesq-type modelling of nonlinear wave phenomena in deep and shallow water. Advances in Coastal and Ocean Engineering. 2010; (11):245–285.
8. **Athanassoulis G.A., Benoit M., Clamond D., Grilli S.T.** Foreword to the special issue on nonlinear waves over variable bathymetry. Journal of Ocean Engineering and Marine Energy. 2019; (5):307–310.
9. **Eldrup M.R., Andersen T.L.** Numerical study on regular wave shoaling, de-shoaling and decomposition of free/bound waves on gentle and steep foreshores. Journal of Marine Science and Engineering. 2020; 8(5):Paper 334.
10. **Madsen P.A., Sørensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. Coastal Engineering. 1992; (18):183–204.
11. **Beji S., Nadaoka K.** A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. Ocean Engineering. 1996; 23(8):691–704.
12. **Lee C., Cho Y.-S., Yoon S.B.** A note on linear dispersion and shoaling properties in extended Boussinesq equations. Ocean Engineering. 2003; (30):1849–1867.
13. **Madsen P.A., Schäffer H.A.** Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A. 1998; (356):3123–3181.
14. **Simarro G., Orfila A., Galan A.** Linear shoaling in Boussinesq-type wave propagation models. Coastal Engineering. 2013; (80):100–106.
15. **Filippini A.G., Bellec S., Colin M., Ricchiuto M.** On the nonlinear behavior of Boussinesq type models: amplitude-velocity vs amplitude-flux forms. Coastal Engineering. 2015; (99):109–123.

16. **Whitham G.B.** Linear and nonlinear waves. N.Y.: John Wiley & Sons Inc.; 1974: 636.
17. **Clamond D.** Remarks on dispersion-improved shallow water equations with uneven bottom. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2021; (54):Paper 045701.
18. **Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Beisel S.A., Chubarov L.B., Shokina N.Yu.** Simulation of tsunami waves generated by submarine landslides in the Black Sea. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015; 30(4):227–237.
19. **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Bulgarian tsunami on 7 May 2007: Numerical investigation of the hypothesis of a submarine-landslide origin. *Subaqueous Mass Movements and Their Consequences: Assessing Geohazards, Environmental Implications and Economic Significance of Subaqueous Landslides*. Special Publications. London: Geological Society; 2019; (477):303–313.
20. **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: Long waves over a flat bottom. *Ocean Engineering*. 2021; (221):Article 108540.
21. **Mirchina N.R., Pelinovsky E.N.** Nonlinear and dispersive effects for tsunami waves in the open ocean. *Natural Science of Hazards*. 1982; 2(4):D1–D9.
22. **Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh.** Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles. *Natural Hazards*. 1992; 6(3):227–249.
23. **Pelinovsky E.N.** *Gidrodinamika voln tsunami [Tsunami wave hydrodynamics]*. Nizhny Novgorod: IPF RAN; 1996: 276. (In Russ.)
24. **Glimsdal S., Pedersen G.K., Harbitz C.B., Lovholt F.** Dispersion of tsunamis: does it really matter? *Natural Hazards and Earth System Science*. 2013; (13):1507–1526.
25. **Pelinovsky E.N., Shurgalina E.G., Rodin A.A.** Criteria for the transition from a breaking bore to an undular bore. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2015; 51(5):530–533.
26. **Gusev O.I., Beisel S.A.** Tsunami dispersion sensitivity to seismic source parameters. *Science of Tsunami Hazards*. 2016; 35(2):84–105.
27. **Chubarov L.B., Kikhtenko V.A., Lander A.V., Gusev O.I., Beisel S.A., Pinegina T.K.** Technique of local probabilistic tsunami zonation for near-field seismic sources applied to the Bechevinskaya Cove (the Kamchatka Peninsula). *Natural Hazards*. 2022; 110(1):373–406.