

Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве

Э. Ш. НАСИБУЛЛАЕВА

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, 450054, Уфа, Россия

Контактный автор: Насибуллаева Эльвира Шамилевна, e-mail: elvira@anrb.ru

Поступила 26 октября 2021 г., доработана 4 февраля 2022 г., принята в печать 11 февраля 2022 г.

Для решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер различных радиусов, произвольно расположенных в трехмерном пространстве, при внешнем воздействии проведена оптимизация численной методики с целью минимизации используемого объема оперативной памяти и машинного времени. Верификация компьютерной модели показала хорошее соответствие численным данным других исследователей. Проведенная серия вычислительных экспериментов позволяет получить количественную оценку числа усечения рядов при разложении, которая может быть использована при исследовании ресурсоемких задач. С помощью представленной оптимизированной методики построены диаграммы распределения давления вне и внутри системы сфер, которые позволяют определить зоны повышения и понижения давления.

Ключевые слова: звукопроницаемая сфера, акустическое рассеяние, метод разложения по мультиполям, вычислительный эксперимент, монополюсный источник излучения, диаграмма распределения давления.

Цитирование: Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве. Вычислительные технологии. 2022; 27(2):19–36. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.003.

Введение

Изучение рассеяния звуковых волн на неоднородностях малых размеров, отличающихся плотностью и/или сжимаемостью от основной среды, — одна из важнейших задач акустики. Прежде всего это связано с тем, что на данном явлении основываются многие практические применения акустических волн, которые позволяют, например:

- в гидролокации [1, 2] определять местоположение косяков рыб, отдельных крупных рыб или других подводных объектов и невидимых подводных препятствий;
- в приборах неразрушающего контроля [3] измерять как геометрические параметры при одностороннем доступе к изделию, так и физико-механические свойства металлов и металлоизделий без их разрушения;
- в медицинских сканерах [4, 5] визуализировать внутренние органы и процессы, протекающие в тканях, для диагностических целей;
- при зондировании атмосферы и океана [1, 2, 6] получать информацию о поверхности Земли и объектах на ней, об атмосфере, океане и верхнем слое земной коры;

- при создании позиционируемого 3D-звука [7] придавать звуковой модели реализм и усиливать ощущения при восприятии звука слушателем.

Таким образом, задача акустического рассеяния от препятствий малых размеров при внешних воздействиях является актуальной.

Случай одиночной сферы (сферическая твердая частица, пузырек или капля) достаточно хорошо исследован (см., например, работы [8–12]). Можно выделить несколько статей [13–15], посвященных рассеянию звуковых волн от пары сфер, где рассеянные поля от сфер хотя и взаимодействуют друг с другом, но данное взаимодействие является достаточно простым для того, чтобы его можно было подробно изучить. В последние два десятилетия основное внимание сосредоточено на рассеянии от множества сфер при внешних воздействиях [16–20]. Так, в [16] представлена основанная на быстром методе мультиполей численная техника, которая разработана для решения задачи акустического рассеяния от множества звуконепроходимых (волна не проходит через поверхность) сфер с произвольным акустическим импедансом. Вычислительные эксперименты, проведенные с помощью данной техники и метода граничных элементов (в пакете программ СОМЕТ), показали, что предложенная в работе [16] методика расчета позволяет достигать высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени.

В работе [17] представлены теоретические исследования рассеяния от множества резонансных воздушных пузырьков под действием падающей плоской волны (т. е. рассмотрен случай звукопроницаемых сфер, когда волна проходит через поверхность раздела), а также численные расчеты обратного сечения рассеяния для простых кластеров из двух или трех пузырьков в различных конфигурациях и для разных углов падения плоской волны.

В работе [18] обобщена численная техника разложения потенциала поля по мультиполям на случай акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер с центрами, расположенными на одной оси, при прохождении сферической волны от монопольного источника излучения, а в работе [19] — при падении плоской волны под произвольным углом к оси, соединяющей центры сфер. Диаграммы, построенные в данных работах, позволяют наглядно продемонстрировать полную картину распределения давления вне и внутри системы сфер.

В работе [20] предложен альтернативный подход к теории многократного рассеяния, в которой рассеянное отдельной частицей поле имеет монопольный, дипольный и ротационный тип рассеяния звука. Однако данный подход из-за осреднения звукового поля не позволяет определить давление в конкретной точке пространства, следовательно, такие эффекты, как повышение или понижение давления в некоторых зонах, не могут быть обнаружены.

В настоящей работе рассматривается задача акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер различных радиусов, произвольно расположенных в трехмерном пространстве, при внешнем воздействии с целью получения распределения давления вне и внутри сфер в широком диапазоне параметров системы. Для численного решения данной задачи методика расчета, представленная в работе [16], адаптирована на случай звукопроницаемых сфер. При большом числе сфер в конфигурации системы так же, как и при увеличении их взаимодействия (вызванного, например, более сильным воздействием внешнего поля или более плотным расположением сфер в конфигурации), решение задачи требует значительных вычислительных ресурсов и машинного времени. Поэтому в работе проведена оптимизация алгоритма построения матрицы ко-

эффициентов при повторном разложении с целью минимизации используемого объема оперативной памяти. Выполнен анализ затрат вычислительных ресурсов в зависимости от числа усечения рядов при разложении.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматриваются N сфер различных радиусов a_1, a_2, \dots, a_N с центрами, которые имеют декартовы координаты $\mathbf{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$, $v = 1, \dots, N$, и расположены в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой, которая характеризуется плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . На рис. 1 представлены схема задачи и основные обозначения. Моделирование осуществляется при следующих предположениях:

- сферы звукопроницаемы, т. е. через их границу проходит волна, которая распространяется в другой среде, имеющей плотность ρ_v и скорость звука c_v , $v = 1, \dots, N$;
- система сфер подвергается внешнему воздействию сферической волны от монопольного источника излучения, расположенного в произвольной точке $MS(x_s, y_s, z_s)$ трехмерного пространства;
- центры сфер неподвижны и радиальное движение сферической поверхности отсутствует.

Задача рассеяния звука от системы звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнений Гельмгольца для комплексных потенциалов вне сфер $\psi(\mathbf{r})$ и внутри v -й сферы $\psi_{\text{int}}^{(v)}$ [10, 18]

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} + k_v^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} = 0$$

с граничными условиями вида

$$\left(\psi(\mathbf{r}) - \psi_{\text{int}}^{(v)} \right) \Big|_{S_v} = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{S_v} = 0, \quad v = 1, \dots, N.$$

Здесь k_0 и k_v — волновые числа для внешней и внутренних сред.

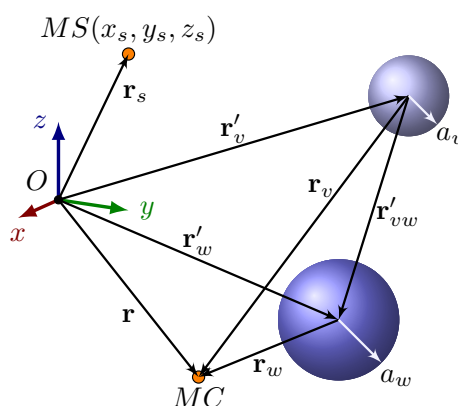


Рис. 1. Схема и основные обозначения в различных системах отсчета: MS — монопольный источник излучения; MC — расчетная точка

Fig. 1. Scheme and basic notations in various reference systems: MS is monopole radiation source; MC is calculation point

В соответствии с методом повторного разложения по мультиполям [16, 17] потенциал внешнего поля представляется в форме

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ — потенциал падающего поля; $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ — потенциал поля рассеяния, удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда [21]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik_0 \psi_{\text{scat}} \right) = 0.$$

Далее проводятся разложение всех потенциалов и повторное разложение потенциала поля рассеяния по мультиполям, их вид подробно описан, например, в работе [18], где рассмотрен случай системы звукопроницаемых сфер, центры которых расположены на одной оси. В настоящей работе задача не является осесимметричной, поэтому при повторном разложении мультиполей $S_n^m(\mathbf{r}_v)$ необходимо использовать общую формулу [16]

$$S_n^m(\mathbf{r}_v) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) R_l^s(\mathbf{r}_w), \quad v, w = 1, \dots, N, \quad v \neq w.$$

Здесь $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ — коэффициенты перехода при повторном разложении; $R_n^m(\mathbf{r}_w)$ — регулярные фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные с w -й сферой [22].

Для упрощения записи дальнейших соотношений введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u &= (v-1)(n_{tr}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s), & \tilde{u} &= (l+1)^2 - (l-s), \\ t &= (w-1)(n_{tr}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m), & \tilde{t} &= (n+1)^2 - (n-m), \\ & & \tilde{v} &= vN - v(v+1)/2 - (N-w), \end{aligned} \quad (1)$$

где по умолчанию индексы принимают значения

$$l = 0, 1, \dots, n_{tr}, \quad s = -l, \dots, l, \quad n = 0, 1, \dots, n_{tr}, \quad m = -n, \dots, n, \quad v, w = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Задача в общем случае сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_l^{(v)s}$, записанной в матричном виде

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D} \quad (3)$$

с матрицей и векторами, скомпонованными следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A_u\} = (\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)})^T = \left(\{A_l^{(1)s}\}^T, \dots, \{A_l^{(N)s}\}^T \right)^T, \\ \mathbf{D} &= \{D_t\} = (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(N)})^T = \left(\{D_n^{(1)m}\}^T, \dots, \{D_n^{(N)m}\}^T \right)^T, \\ \mathbf{L} &= \{L_{ut}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{(11)} & \mathbf{L}^{(12)} & \dots & \mathbf{L}^{(1N)} \\ \mathbf{L}^{(21)} & \mathbf{L}^{(22)} & \dots & \mathbf{L}^{(2N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L}^{(N1)} & \mathbf{L}^{(N2)} & \dots & \mathbf{L}^{(NN)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(11)} \right\} & \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(12)} \right\} & \dots & \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(1N)} \right\} \\ \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(21)} \right\} & \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(22)} \right\} & \dots & \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(2N)} \right\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(N1)} \right\} & \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(N2)} \right\} & \dots & \left\{ L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(NN)} \right\} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где элементы определяются как

$$\begin{aligned}
 A_u &= A_l^{(v)s}, \quad D_t = D_n^{(w)m} = -\frac{j_n(k_0 a_w) j'_n(k_w a_w) - \kappa_w j'_n(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)}{h_n(k_0 a_w) j'_n(k_w a_w) - \kappa_w h'_n(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)} C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w), \\
 L_{ut} &= L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(wv)} = \begin{cases} \frac{j_l(k_0 a_w) j'_l(k_w a_w) - \kappa_w j'_l(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)}{h_l(k_0 a_w) j'_l(k_w a_w) - \kappa_w h'_l(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) & \text{для } v \neq w, \\ \delta_{\tilde{u}\tilde{t}} & \text{для } v = w. \end{cases} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Здесь знак “Т” означает операцию транспонирования; $j_n(z)$ и $h_n(z)$ — сферические функции Бесселя и Ханкеля первого типа соответственно [22]; $\kappa_w = (k_0 \rho_w)/(k_w \rho_0)$ — введенный параметр; $C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w)$ — коэффициенты разложения падающего поля около $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_w$; $\delta_{\tilde{u}\tilde{t}}$ — символ Кронекера. Отметим, что при численной реализации система уравнений (3) должна быть конечной, поэтому при разложении в ряды проводится их усечение по l и n при некотором фиксированном значении n_{tr} . Вопрос о выборе числа n_{tr} является важным и будет подробно рассмотрен в подразд. 2.2.

2. Программная реализация техники разложения по мультиполям

При численной реализации техники разложения по мультиполям разработан программный код на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [23] для решения системы (3) с помощью функции `zcgsv` (для комплексных матриц общего вида). Для вычисления специальных сферических функций $h_l(z)$, $j_l(z)$ и присоединенных функций Лежандра $P_l^s(z)$ и их производных были адаптированы программные коды [24] для специальных цилиндрических функций и полиномов Лежандра, написанные на языке Fortran 77.

Поскольку матрица \mathbf{L} и векторы \mathbf{A} и \mathbf{D} в матричном уравнении (3) имеют размеры $N(n_{tr}+1)^2 \times N(n_{tr}+1)^2$ и $N(n_{tr}+1)^2$ соответственно, при большом числе сфер N и числе усечения рядов n_{tr} при разложении данная матрица и векторы занимают значительный объем памяти. С целью минимизации используемого объема оперативной памяти проведена оптимизация алгоритма [16] для определения коэффициентов перехода при повторном разложении $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ (см. подразд. 2.1), а для минимизации машинного времени выполнен анализ подходов к определению числа n_{tr} (см. подразд. 2.2).

2.1. Оптимизация алгоритма определения коэффициентов перехода при повторном разложении $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$

Благодаря соотношению симметрии

$$(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) = (-1)^{l+n} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{wv}) \quad (5)$$

коэффициенты повторного разложения достаточно вычислить для $w = v+1, \dots, N$. Тогда вместо двухмерной матрицы $(\mathbf{S}|\mathbf{R})$ размера $N(n_{tr}+1)^2 \times N(n_{tr}+1)^2$, представленной в работе [16], с учетом введенных обозначений (1) и (2) можно ввести трехмерную матрицу $(\mathbf{S}|\mathbf{R}) = \{(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}}\}$, в которой элементы определяются следующим образом:

$$(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}} = (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}), \quad w = v+1, \dots, N.$$

Матрица имеет размер $N(N-1)/2 \times (n_{tr}+1)^2 \times (n_{tr}+1)^2$, что уменьшает объем выделяемой памяти под данную матрицу на $\frac{50(N-1)}{N}$ процентов.

С учетом равенства

$$(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) = (-1)^{l+n}(S|R)_{nl}^{-m,-s}(\mathbf{r}'_{vw})$$

получим следующий алгоритм заполнения матрицы $(\mathbf{S}|\mathbf{R})$ с помощью рекуррентных соотношений для $w = v + 1, \dots, N$:

- рекуррентный процесс начинается с определения коэффициентов $(S|R)_{l0}^{s0}(\mathbf{r}'_{vw})$ и $(S|R)_{0n}^{0m}(\mathbf{r}'_{vw})$ по формулам

$$(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}1} = \sqrt{4\pi}(-1)^l S_l^{-s}(\mathbf{r}'_{vw}),$$

$$(S|R)_{\tilde{v}1\tilde{u}} = \sqrt{4\pi} S_l^s(\mathbf{r}'_{vw}) \quad (\text{при } l \neq 0);$$

- вычисляются вспомогательные коэффициенты для $n, m = -n_{tr}, \dots, n_{tr}$

$$b_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & 0 \leq m \leq n, \\ -\sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & -n \leq m < 0, \\ 0, & |m| > n; \end{cases}$$

- для $m = 0, \dots, n_{tr} - 1, l = 1, \dots, n_{tr}$ коэффициенты вида $(S|R)_{l|m}^{sm}$ и $(S|R)_{|s|n}^{sm}$ вычисляются по формулам

$$\tilde{u}_0 = l^2 - (l-s), \quad \tilde{u}_2 = (l+2)^2 - (l-s),$$

$$\tilde{t}_0 = m^2 + 1, \quad \tilde{t}_1 = (m+1)^2 + 1, \quad \tilde{t}_2 = (m+2)^2,$$

$$(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}_2} = \frac{b_l^{-s}(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}_0(\tilde{t}_0-1)} - b_{l+1}^{s-1}(S|R)_{\tilde{v}(\tilde{u}_2-2)(\tilde{t}_1-1)}}{b_{m+1}^{-m-1}},$$

$$(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}_1} = \frac{b_l^s(S|R)_{\tilde{v}(\tilde{u}_0+2)\tilde{t}_0} - b_{l+1}^{-s-1}(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}_2\tilde{t}_0}}{b_{m+1}^{-m-1}},$$

а для $m = 1, \dots, n_{tr} - 1, l = 1, \dots, n_{tr}, s = -l + 1, \dots, l - 1$ — по формулам

$$\tilde{u}_3 = (l+1)^2 - (l+s), \quad \tilde{t}_0 = m^2 + 1, \quad \tilde{t}_3 = (m+1)^2,$$

$$(S|R)_{\tilde{v}\tilde{t}_3\tilde{u}_3} = (-1)^{l+m}(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}_0}, \quad (S|R)_{\tilde{v}\tilde{t}_0\tilde{u}_3} = (-1)^{l+m}(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}_3};$$

- вычисляются вспомогательные коэффициенты для $n, m = -n_{tr}, \dots, n_{tr}$

$$a_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n+1+|m|)(n+1-|m|)}{(2n+1)(2n+3)}}, & n \geq |m|, \\ 0, & |m| > n; \end{cases}$$

- вычисляются остальные коэффициенты матрицы по формулам

$$\tilde{u}_0 = l^2 - (l-1-s), \quad \tilde{u}_2 = (l+2)^2 - (l+1-s), \quad \tilde{u}_3 = (l+1)^2 - (l+s),$$

$$\tilde{t}_0 = n^2 - (n-1-m), \quad \tilde{t}_2 = (n+2)^2 - (n+1-m), \quad \tilde{t}_3 = (n+2)^2 - (n+1+m),$$

$$(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}_2} = \frac{a_{n-1}^m(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}_0} - a_l^s(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}_2\tilde{t}} + a_{l-1}^s(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}_0\tilde{t}}}{a_n^m},$$

$$(S|R)_{\tilde{v}\tilde{t}_3\tilde{u}_3} = (-1)^{n+1+l}(S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{t}_2} \quad \text{при } l \neq (n+1)$$

для $n = 0, \dots, n_{tr} - 1, l = n + 1, \dots, n_{tr}, s = -l + 1, \dots, l - 1$.

В результате с учетом соотношения (5) для определения коэффициентов $L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(wv)}$ в (4) при $v < w$ получим выражения

$$L_{\tilde{u}\tilde{i}}^{(wv)} = \frac{j_l(k_0 a_w) j_l'(k_w a_w) - \kappa_w j_l'(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)}{h_l(k_0 a_w) j_l'(k_w a_w) - \kappa_w h_l'(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)} (S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{i}},$$

$$L_{\tilde{u}\tilde{i}}^{(vw)} = (-1)^{l+n} \frac{j_l(k_0 a_v) j_l'(k_v a_v) - \kappa_v j_l'(k_0 a_v) j_l(k_v a_v)}{h_l(k_0 a_v) j_l'(k_v a_v) - \kappa_v h_l'(k_0 a_v) j_l(k_v a_v)} (S|R)_{\tilde{v}\tilde{u}\tilde{i}}.$$

Таким образом, все коэффициенты основной матрицы \mathbf{L} системы (3) определены.

2.2. Выбор числа членов усечения рядов при разложении

Вопрос правильного выбора числа n_{tr} членов при усечении рядов важен, поскольку при малом числе n_{tr} точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастет не только точность, но и время расчета.

Анализ литературы по данной проблеме показал, что можно выделить два подхода к определению числа n_{tr} .

Подход 1. Усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда Σ (при $n = n_{tr}$ и $n = n_{tr} + 1$) — как только их относительная погрешность $\delta = |(\Sigma_{n_i} - \Sigma_{n_i+1}) / \Sigma_{n_i}| \cdot 100\%$ становится меньше δ_{fix} , дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение $n_{tr} = n_i$ [9].

Подход 2. Выполняется усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе n_{tr} , определяемом с помощью одной из эвристических формул:

$$n_{tr} = \left[k_0 a_v + \left(\frac{\ln(2\sqrt{2}\pi k_0 a_v \varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} (k_0 a_v)^{1/3} + 1 \right], \quad (6)$$

$$n_{tr} = \begin{cases} [ek_0 r'_{vw}] & \text{для малых } k_0 r'_{vw}, \\ [ek_0 r'_{vw}/2] & \text{для больших } k_0 r'_{vw}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $[z]$ — целая часть числа z ; ε — точность, заданная при разложении в ряд Фурье; e — число Эйлера. Вывод формулы (6) представлен, например, в работах [25, 26], формула (7) приведена в работе [16].

Заметим, что вывод формулы (7) основывается на том, что асимптотическое разложение сферических функций Ханкеля $h_n(z)$ при больших n и фиксированных z может привести к росту данных функций, начиная с $n \approx ez/2$ [22]. Поскольку сферические функции Ханкеля $h_n(k_0 r'_{vw})$ входят в матрицу коэффициентов перехода при повторном разложении ($\mathbf{S|R}$), то начиная с n_{tr} , определенного формулой (7) при наименьшем значении r'_{vw} ($v, w = 1, \dots, N$, $v \neq w$), возможен экспоненциальный рост решения вместо его стабилизации. Следовательно, данная формула позволяет получить только верхнюю оценку числа n_{tr} , а не значение, при котором происходит стабилизация решения.

В работе [27] представлено сравнение эвристических формул (6) и (7) на примере двух звуконепроницаемых сфер, однако данное сравнение ограничено только одной точкой. В работе [28] проведено сравнение двух подходов для случая трех звукопроницаемых сфер при сильном их взаимодействии. Показано, что в рассмотренном диапазоне параметров (для $k_0 a > 5$) оптимально применение комбинированного подхода: с помощью подхода 2 по формулам (6) и (7) вычислить минимальное значение n_{tr} ; затем, начиная с этой величины, применять подход 1 до достижения необходимой точности δ_{fix} . Для анализа данных подходов к определению числа n_{tr} для конфигураций, состоящих из множества звукопроницаемых сфер, при значениях волнового радиуса $1 \leq k_0 a \leq 5$ необходимо провести серию вычислительных экспериментов (см. подразд. 3.3).

3. Вычислительный эксперимент

Проведен ряд вычислительных экспериментов для верификации численной методики расчета, профилирования программного кода и анализа подходов к определению числа усечения рядов при их разложении. На конкретных примерах с помощью оптимизированной методики расчета продемонстрированы возможности получения результатов для различных значений параметров системы.

3.1. Верификация оптимизированной численной методики

Большинство работ по изучению акустического рассеяния от множества сфер численно исследуют системы, содержащие от одной до трех сфер. Рассмотрим конфигурацию, представленную в работе [16], поскольку она — одна из немногих, где проводились расчеты для систем с $N > 3$. В данной работе рассмотрен рассеивающий слой, который состоял из $N = 11 \times 11 = 121$ звуконепроницаемых жестких сфер одного радиуса $a = 1$, равномерно распределенных в плоскости Oyz с наименьшим расстоянием между центрами соседних сфер δl (конфигурация представлена на рис. 2). Монопольный источник излучения MS находится на оси Ox на расстоянии $d = 10a$ от плоскости, содержащей центры сфер, а точка расчета MC расположена симметрично относительно данной плоскости.

В настоящей работе исследуются звукопроницаемые сферы, для которых имеет место согласование со случаем малых жестких сфер [10], когда отношения упругостей вещества сферы ($\chi_v = \rho_v c_v^2$) и внешней среды ($\chi_0 = \rho_0 c_0^2$), и плотностей внутренней и внешней сред стремятся к бесконечности, т.е. $\chi_v/\chi_0 \rightarrow \infty$ и $\rho_v/\rho_0 \rightarrow \infty$. Тогда для возможности верификации с результатами работы [16] выбирается внешняя среда с физическими свойствами воздуха ($\rho_0 = 1.205$ кг/м³, $c_0 = 343.1$ м/с), а внутренняя — со свойствами воды ($\rho_v = 998$ кг/м³, $c_v = 1484$ м/с), поскольку в этом случае для всех сфер имеем

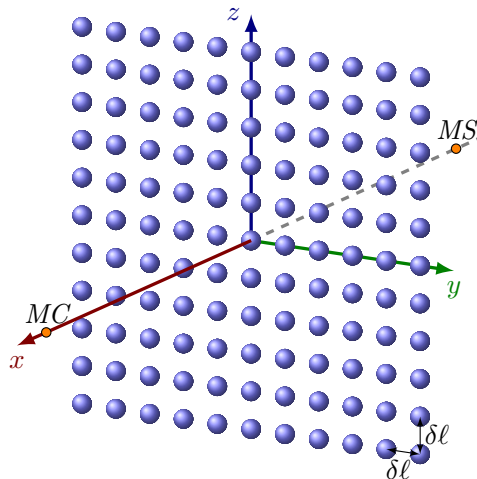


Рис. 2. Рассеивающий слой из 121 равномерно распределенных в плоскости Oyz звукопроницаемых сфер одного радиуса a : δl — наименьшее расстояние между центрами сфер; $MS = M(-10a, 0, 0)$ — монопольный источник излучения; $MC = M(10a, 0, 0)$ — расчетная точка

Fig. 2. A scattering layer of 121 sound-permeable spheres of the same radius a which uniformly distributed in the plane Oyz : δl is the least distance between the centers of the spheres; $MS = M(-10a, 0, 0)$ is monopole radiation source; $MC = M(10a, 0, 0)$ is calculation point

$\chi_v/\chi_0 \gg 1$ и $\rho_v/\rho_0 \gg 1$. Наименьшее расстояние между центрами соседних сфер $\delta l = 5a$. Выберем систему координат так, чтобы плоскость Oyz содержала центры сфер, ось Ox проходила через центр рассеивающего слоя, монополярный источник излучения лежал на оси Ox на расстоянии $d = 10a$ от начала координат (в точке $MS = M(-10a, 0, 0)$), тогда точка расчета $MC = M(10a, 0, 0)$ (рис. 2).

Для монополярного источника излучения падающее поле определяется по формуле

$$\psi_{in}(vecr) = -V_0 \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|},$$

а коэффициенты разложения падающего поля имеют следующий вид [18]:

$$C_{in,n}^m(\mathbf{r}'_v) = -V_0 ik_0 h_n(k_0|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_v|) Y_n^{-m}(\theta_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_v}, \varphi_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_v}),$$

где V_0 — производительность монополярного источника. Здесь и далее временной множитель $e^{-i\omega t}$ ($\omega = 2\pi f$ — угловая частота; f — частота внешнего поля) опущен.

На рис. 3, *a* представлены результаты расчета функции

$$STF = 20 \lg \left| \frac{\psi|_{MC}}{\psi_{in}|_{MC}} \right| \quad (8)$$

при $n_{tr} = 5$ для волновых радиусов $k_0a = 1, 3$ и 5 , полученные в работе [16] (большие голубые закрашенные круги) и в настоящей работе (красная линия с закрашенными кругами). Относительные погрешности, отнесенные к расчетным данным работы [16], равны 0.19% для $k_0a = 1$, 0.92% для $k_0a = 3$ и 4.64% для $k_0a = 5$. Увеличение погрешности с ростом волнового радиуса связано с тем, что чем больше значение k_0a , тем больше число n_{tr} , при котором достигается устойчивое решение (см. подразд. 3.4), следовательно, тем больше отклонение конечного результата от случая малой жесткой сферы.

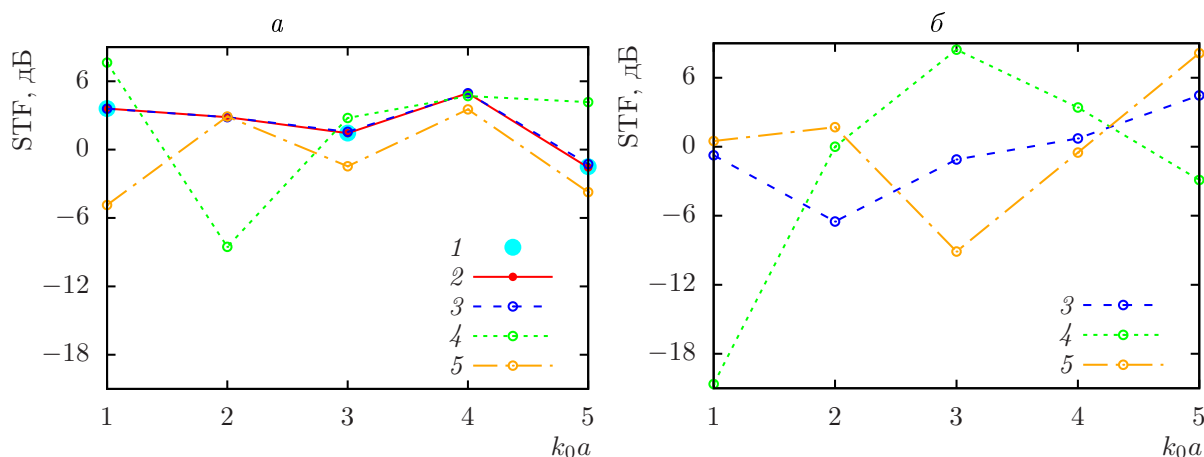


Рис. 3. Зависимость функции STF (8) в точке $MC(10a, 0, 0)$ от волнового числа k_0a для $\delta l = 5a$ (*a*) и $\delta l = 3a$ (*b*): 1 — данные для случая жестких сфер при $n_{tr} = 5$, полученные в работе [16]; 2 — данные настоящей работы для случая капель воды в воздухе $n_{tr} = 5$; 3 — капли воды в воздухе (Сф I); 4 — воздушные пузырьки в воде (Сф II); 5 — капли дихлорэтана в воде (Сф III)

Fig. 3. The dependence of the STF function (8) on the wave number k_0a at the point $MC(10a, 0, 0)$ for $\delta l = 5a$ (*a*) and $\delta l = 3a$ (*b*): 1 is data for the case of rigid spheres at $n_{tr} = 5$ obtained in [16]; 2 is data of present work for the case of water drops in air at $n_{tr} = 5$; 3 are water drops in air (Sph I); 4 are air bubbles in water (Sph II); 5 are dichloroethane drops in water (Sph III)

Таким образом, результаты настоящей работы, полученные для капель воды в воздухе, в пределах небольшой погрешности хорошо согласуются с результатами, представленными в работе [16] для малых жестких сфер.

3.2. Профилирование программного кода

В табл. 1 в зависимости от числа усечения рядов n_{tr} представлены значения таких параметров, как:

- объем памяти V_L , занимаемый самой большой расчетной матрицей — основной матрицей системы (3);
- используемый объем V_{ram} оперативной памяти;
- общее время t_{cpu} выполнения программного кода;
- доля времени $\delta_{eq} = t_{eq}/t_{cpu} \cdot 100\%$, приходящаяся на решение системы уравнений (3);
- относительные погрешности δ_1 , δ_2 и δ_3 для функции $|p/p_{in}|$, вычисленные в точках $M_1(10a, 0, 0)$, $M_2(0, a, 0)$ и $M_3(0, 0.5a, 0)$ соответственно.

Рассматривалась конфигурация, представленная на рис. 2, в случае капель дихлорэтана ($\rho_v = 1252.6$ кг/м³, $c_v = 1034$ м/с) в воде при $k_0a = 5$ и $\delta l = 5a$. Расчеты проводились в ОС Windows 10 на процессоре Intel Core i7-4702MQ (4 ядра и 8 потоков по 2.2 ГГц, кэш 6 Мб) с 32 Гб ОЗУ. Затраченное на выполнение программы общее время t_{cpu} определялось консольной командой `time`; профилирование кода (погрешность δ_{eq}) выполнялось с помощью команды `cpu_time`; используемый объем ОЗУ V_{ram} определялся с помощью диспетчера задач Windows.

Анализ данных, приведенных в табл. 1, показывает, что основное время при выполнении программы занимает решение системы уравнений (3). Увеличение числа n_{tr} даже на единицу приводит к значительному увеличению как объема оперативной памяти (в 3.11 раза для $n_{tr} = 1$ и в 1.34 раза для $n_{tr} = 12$), так и машинного времени (в 4 раза для $n_{tr} = 1$ и в 1.64 раза для $n_{tr} = 12$).

Т а б л и ц а 1. Использование вычислительных ресурсов и относительные погрешности в зависимости от параметра n_{tr}

Table 1. Analysis of the usage of computing resources and the relative errors depending on the parameter n_{tr}

n_{tr}	V_L , Мб	V_{ram} , Мб	t_{cpu} , с	δ_{eq} , %	δ_1 , %	δ_2 , %	δ_3 , %
1	3.57	12.7	0.2	76.9	—	—	—
2	18.10	55.3	0.8	83.7	29.628	10.318	467.333
3	57.19	172.5	3.7	92.0	89.038	41.470	14.163
4	139.63	419.6	13.5	94.1	49.562	4.397	29.127
5	289.53	868.8	45.2	95.2	16.852	67.555	25.143
6	536.39	1608.5	113.0	96.3	28.429	326.222	14.079
7	915.06	2743.2	249.3	96.9	29.711	51.019	0.021
8	1465.75	4393.1	507.3	97.1	27.795	82.504	5.489
9	2234.04	6695.0	945.6	97.5	4.823	4.029	2.587
10	3270.86	9801.3	1750.1	97.9	9.358	9.353	0.420
11	4632.50	13880.9	2835.8	98.2	3.299	1.405	0.226
12	6380.64	19118.4	4642.6	98.4	0.498	0.188	0.009
13	8582.29	25727.8	7636.1	98.7	0.002	0.042	0.005

3.3. Применение подхода 1 к определению числа усечения рядов n_{tr} при разложении

В табл. 1 также представлены значения относительных погрешностей δ_j ($j = 1, 2, 3$) для последовательных значений n_{tr} на трех примерах расчета модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ в следующих точках пространства: точка вне сфер $MC = M_1(10a, 0, 0)$, граничная точка $M_2(0, a, 0)$ и точка внутри сферы $M_3(0, 0.5a, 0)$. Поскольку связь между акустическим давлением p и потенциалом ψ определяется по формуле

$$p = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho \psi,$$

значения p и p_{in} выражаются через соответствующие потенциалы с точностью до постоянной величины $i\omega\rho$.

С помощью подхода 1 к определению числа n_{tr} и, например, выполнения условия $\delta_j \leq \delta_{fix} = 1\%$ ($j = 1, 2, 3$) из табл. 1 получаем, что $n_{tr} = 11$ для точек M_1 и M_2 , $n_{tr} = 6$ для точки M_3 , однако стабилизация решения для M_3 устанавливается при $n_{tr} = 9$. На рис. 4 приведены зависимости функции $|p/p_{in}|$ от числа n_{tr} в данных трех точках.

3.4. Параметрический анализ

На рис. 3 представлены значения функции STF (8) в точке $MC = M_1(10a, 0, 0)$ в зависимости от волнового радиуса $k_0a = 1, 2, 3, 4, 5$ при $\delta l = 5a$ (см. рис. 3, а) и $\delta l = 3a$ (см. рис. 3, б) для различных сред вне и внутри сфер: капли воды в воздухе (Сф I), воздушные пузырьки в воде (Сф II), капли дихлорэтана в воде (Сф III). Соответствующие значения чисел усечения рядов приведены в табл. 2. Данные значения получены с помощью подхода 1 с использованием двойного контроля точности расчетов, а именно, относительная погрешность рассчитывалась для двух функций — STF и модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$. Необходимая точность считалась достигнутой при $\delta_{fix} = 1\%$. Применялся двойной контроль, поскольку были обнаружены параметры, при которых для одной из функций относительная погрешность могла принимать значения меньше δ_{fix} до достижения стабилизации искомой функции.

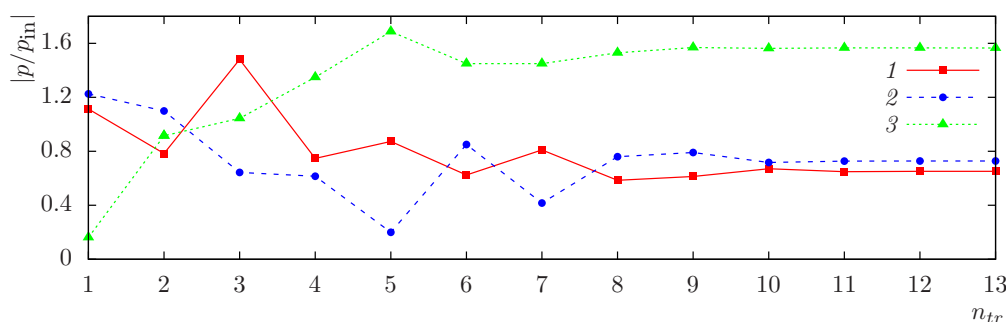


Рис. 4. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от числа n_{tr} для конфигурации, представленной на рис. 2, в точках: 1 — $M_1(10a, 0, 0)$; 2 — $M_2(0, a, 0)$; 3 — $M_3(0, 0.5a, 0)$. Система сфер: капли дихлорэтана в воде; основные параметры: $k_0a = 5$, $\delta l = 5a$

Fig. 4. The dependence of the normalized pressure modulus $|p/p_{in}|$ on the truncation number n_{tr} for the configuration shown on Fig. 2 at the points: 1 — $M_1(10a, 0, 0)$; 2 — $M_2(0, a, 0)$; 3 — $M_3(0, 0.5a, 0)$. Sphere system: dichloroethane drops in water; main parameters: $k_0a = 5$, $\delta l = 5a$

Т а б л и ц а 2. Число усечения рядов n_{tr} , полученное с помощью подхода 1 при $\delta_{fix} = 1\%$, в зависимости от волнового радиуса k_0a для рассеивающего слоя из 121 сферы (см. рис. 2) в точке MC для двух значений параметра δl : Сф I — капли воды в воздухе; Сф II — воздушные пузырьки в воде; Сф III — капли дихлорэтана в воде

Table 2. The series truncation number n_{tr} obtained using the approach 1 at $\delta_{fix} = 1\%$ as function of the wave radius k_0a for a scattering layer of 121 spheres (see Fig. 2) at the point MC for two values of the parameter δl : Sph I — water drops in air; Sph II — air bubbles in water; Sph III — dichloroethane drops in water

k_0a	Сф I		Сф II		Сф III		Формула (6)	Формула (7)	
	$\delta l = 3a$	$\delta l = 5a$	$\delta l = 3a$	$\delta l = 5a$	$\delta l = 3a$	$\delta l = 3a$		$\delta l = 3a$	$\delta l = 5a$
1	2	3	4	3	2	1	6	4	6
2	5	5	8	5	4	4	9	8	13
3	9	8	7	7	7	7	11	12	20
4	10	8	9	8	10	8	13	16	27
5	8	12	12	10	11	12	14	20	33

Из рис. 3 видно влияние основных геометрических и физических параметров системы, таких как:

- расстояние между центрами сфер δl , поскольку чем ближе сферы друг к другу, тем больше их взаимодействие;
- волновой радиус $k_0a = (\omega/c_0)a$, так как при увеличении параметра k_0a и фиксированном радиусе сферы a усиливается и воздействие внешнего поля на систему сфер, а при фиксированной частоте внешнего поля f увеличивается радиус самих сфер, а следовательно, и их отклик на внешнее воздействие;
- физические параметры сред вне и внутри сфер (плотность ρ и скорость звука c), поскольку отношение данных величин существенно влияет на характер рассеянного поля. Рассеяние капель воды в воздухе, как уже отмечалось, согласуется со случаем жестких сфер ($\chi_v/\chi_0 \rightarrow \infty$ и $\rho_v/\rho_0 \rightarrow \infty$), рассеяние от воздушных пузырьков в воде вне области резонанса ($k_0a \gg 0.013$) — со случаем мягких сфер [10] ($\chi_0/\chi_v \rightarrow \infty$ и $\rho_0/\rho_v \rightarrow \infty$), а случай капель одной жидкой среды в другой является промежуточным (в рассмотренном примере $\chi_v/\chi_0 \approx 0.6$ и $\rho_v/\rho_0 \approx 1.3$).

Проведем анализ данных, представленных в табл. 2. Сравнение двух подходов к определению числа n_{tr} для параметров системы δl , k_0a , ρ и c показало следующее:

- значения n_{tr} для рассмотренных случаев Сф I–Сф III и разных δl меньше числа n_{tr} , полученного с помощью формулы (6), которая не зависит ни от физических свойств сред, ни от конфигурации системы. Таким образом, для волновых радиусов $k_0a \leq 5$ формула (6) завышает значения n_{tr} , что приводит к существенному увеличению времени расчета;
- все значения n_{tr} для случаев Сф I–Сф III не превышают соответствующих значений, полученных по формуле (7), которая задает верхнюю границу числа n_{tr} ;
- логично предположить, что чем больше расстояние между сферами, тем меньше их взаимодействие, следовательно, тем меньше будет число n_{tr} . Однако имеются параметры, для которых данное предположение не выполняется, например для Сф I при $k_0a = 1$ и 5, а также для Сф III при $k_0a = 5$, что затрудняет формулировку закономерности для числа n_{tr} в зависимости от δl . Значит, в каждом случае необходимо проводить дополнительное исследование для определения числа усечения рядов при разложении;

- аналогично, чем больше волновой радиус k_0a , тем больше число n_{tr} . Но и здесь имеются исключения — для Сф I значение при $k_0a = 5$ и $\delta l = 3a$ меньше, чем при $k_0a = 3$ и 4, а при $\delta l = 5a$ данные значения при $k_0a = 3$ и 4 равны, что также затрудняет формулировку зависимости n_{tr} от k_0a и требует проведения дополнительных исследований.

Таким образом, в случае $1 \leq k_0a \leq 5$ необходимо использовать подход 1 для получения наименьшего значения n_{tr} , при котором достигается заданная точность, поскольку эвристические формулы для данных волновых радиусов завышают значение числа n_{tr} , что приводит к существенному увеличению времени расчета. Для расчетов областей, когда требуется привлечение значительных вычислительных ресурсов, рекомендуется предварительно вычислить значение n_{tr} в нескольких характерных точках, например внешних, внутренних и граничных. Выбирается наибольшее значение числа n_{tr} из полученных для данных характерных точек при условии, что оно не превосходит значения, вычисленного по формуле (7).

На рис. 5 и 6 представлены диаграммы распределения нормированного давления $|p/p_{in}|$ для конфигурации капель воды в воздухе (см. рис. 2) в плоскостях, параллельных рассеивающему слою, при значениях параметров $\delta l = 3a$ и $k_0a = 1$. Поскольку система симметрична относительно осей Ox и Oy , расчеты проведены только в первой четверти. Число расчетных точек плоскости 91×91 . Для диаграмм на рис. 5 требуемая точность ($\delta_{fix} = 1\%$) достигается при $n_{tr} = 3$ (для всех расчетных точек плоскости), а на рис. 6 — при $n_{tr} = 6$ (предварительные расчеты в характерных точках), так как для получения стабильного решения внутренних точек требуется больше членов в разложении рядов.

Плоскость $x = -10a$ (рис. 5, а) содержит монополярный источник излучения MS . На распределение давления влияют волны, рассеянные системой сфер в обратном к падающей сферической волне направлении. В плоскости $x = 10a$ (см. рис. 5, б) на распределение давления влияют волны, прошедшие сквозь рассеивающий слой. Распределение давления на самом слое (в плоскости, содержащей центры сфер $x = 0$) представлено на рис. 6. Капли воды в воздухе мало пропускают сквозь себя падающую волну, что близ-

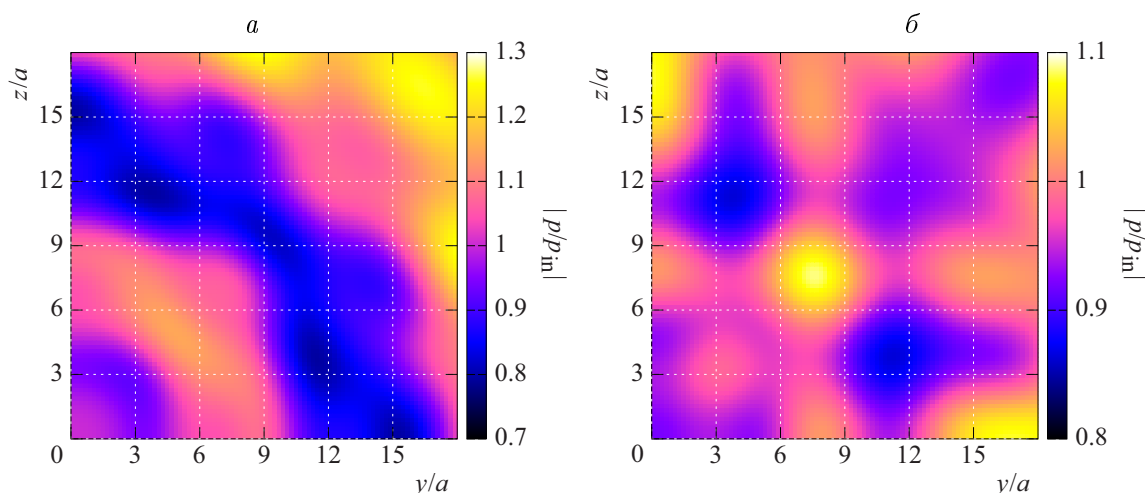


Рис. 5. Диаграммы распределения нормированного давления $|p/p_{in}|$ вне рассеивающего слоя (см. рис. 2) при $\delta l = 3a$ и $k_0a = 1$ в первой четверти плоскостей $x = -10a$ (а) и $x = 10a$ (б)
 Fig. 5. Diagrams of the normalized pressure distribution $|p/p_{in}|$ outside the scattering layer (see Fig. 2) which consists of water drops in the air at $\delta l = 3a$ and $k_0a = 1$ in the first quarter of planes $x = -10a$ (а) and $x = 10a$ (б)

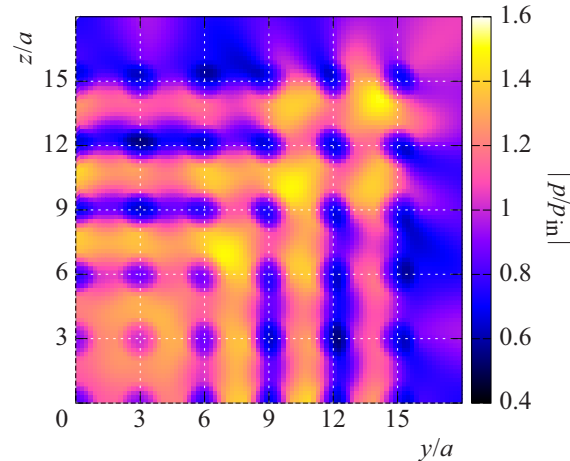


Рис. 6. Диаграмма распределения нормированного давления $|p/p_{\text{in}}|$ в плоскости $x = 0$ при $\delta l = 3a$ и $k_0 a = 1$ в первой четверти

Fig. 6. Diagrams of the normalized pressure distribution $|p/p_{\text{in}}|$ in the plane $x = 0$ at $\delta l = 3a$ and $k_0 a = 1$ in the first quarter

ко к случаю звуконепроницаемых жестких сфер. На диаграммах хорошо видны зоны повышения и понижения давления как результат наложения падающей и рассеянных от системы сфер волн. Таким образом, рассеивающий слой в рассмотренном примере играет роль сложной двумерной дифракционной решетки.

Заключение

Для задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер разных радиусов, произвольно расположенных в трехмерном пространстве, при воздействии акустическим полем проведена оптимизация алгоритма построения матрицы коэффициентов повторного разложения по мультиполям с целью минимизации используемого объема оперативной памяти. Верификация оптимизированного алгоритма показала хорошее соответствие численным данным, полученным другими исследователями.

Анализ использования вычислительных ресурсов и результаты профилирования программного кода показали, что для волновых радиусов $1 \leq k_0 a \leq 5$ наименьшее значение числа усечения рядов при разложении n_{tr} , для которого достигается заданная точность, дает подход 1. Подход 2 завышает значение n_{tr} , что приводит к существенным затратам машинного времени. Проведенная серия вычислительных экспериментов позволила получить количественную оценку n_{tr} , которая может быть использована при исследовании ресурсоемких задач по акустическому рассеянию от звукопроницаемых сфер.

Диаграммы, построенные с помощью рассмотренного подхода к изучению рассеяния от множества сфер, в отличие от подходов, основанных на осредненных уравнениях, позволяют наглядно продемонстрировать картину распределения давления вне и внутри системы сфер, в том числе для определения зон повышения и понижения давления.

В дальнейшем планируется проведение исследований акустического рассеяния для различных конфигураций системы в более широком диапазоне изменения физических и геометрических параметров.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке госзадания № 0246-2019-0052.

Список литературы

- [1] **Исимару А.** Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир; 1981: 280.
- [2] **Шашкевич А.П.** Акустика моря. Ленинград: Судостроение; 1966: 356.
- [3] **Алешин Н.П., Щербинский В.Г.** Радиационная, ультразвуковая и магнитная дефектоскопии металлоизделий. М.: Высшая школа; 1991: 271.
- [4] Применение ультразвука в медицине: Физические основы (под ред. К. Хилла). М.: Мир; 1989: 589.
- [5] **Демин И.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В.** Современные акустические методы исследований в биологии и медицине / Учеб. метод. пособие. Нижний Новгород: Издательство ННГУ; 2007: 121.
- [6] **Каллистратова М.А.** Радиоакустическое зондирование атмосферы. М.: Наука; 1985: 197.
- [7] Технология создания позиционируемого 3D звука. Адрес доступа: <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (дата обращения 21.10.2021).
- [8] **Medwin Н., Clay С.S.** Fundamentals of acoustical oceanography. San Diego: Academic Press; 1998: 739.
- [9] **Duda R.O., Martens W.L.** Range dependence of the response of a spherical head model. Journal of the Acoustical Society of America. 1998; 104(5):3048–3058. DOI:10.1121/1.423886.
- [10] **Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т.** Основы акустики. Киев: Наукова думка; 2009: 867.
- [11] **Насибуллаева Э.Ш.** Исследование рассеяния от звуконепроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии. Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017; 12(1):73–82. DOI:10.21662/uim2017.1.011.
- [12] **Насибуллаева Э.Ш.** Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы. Многофазные системы. 2018; 13(4):79–91. DOI:10.21662/mfs2018.4.012.
- [13] **Karodistrias G., Dahl P.H.** Effects of interaction between two bubble scatterers. Journal of the Acoustical Society of America. 2000; (107):3006–3017. DOI:10.1121/1.429330.
- [14] **Румелиотис Д.А., Котсис А.Д.** Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус. Акустический журнал. 2007; 53(1):38–49.
- [15] **Насибуллаева Э.Ш.** Исследование акустического рассеяния от пары звуконепроницаемых сфер при внешнем воздействии. Многофазные системы. 2019; 14(1):44–51. DOI:10.21662/mfs2019.1.006.
- [16] **Gumerov N.A., Duraiswami R.** Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. Journal of the Acoustical Society of America. 2002; 112(6):2688–2701. DOI:10.1121/1.1517253.
- [17] **Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P.** Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water. Journal of the Acoustical Society of America. 2003; 113(6):3001–3011. DOI:10.1121/1.1572141.
- [18] **Насибуллаева Э.Ш.** Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии. Вестник УГАТУ. 2021; 25(2):93–101. DOI:10.54708/19926502_2021_2529293.

- [19] **Насибуллаева Э.Ш.** Моделирование акустического рассеяния от коаксиальных сфер при внешнем воздействии. Многофазные системы. 2019; 14(2):115–124. DOI:10.21662/mfs2019.2.016.
- [20] **Кобелев Ю.А.** К теории многократного рассеяния звуковых волн на сферических частицах в жидких и упругих средах. Акустический журнал. 2011; 57(4):443–449.
- [21] **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука; 1981: 512.
- [22] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука; 1974: 832.
- [23] LAPACK — Linear Algebra PACKage. Available at: <https://www.netlib.org/lapack> (accessed at October 21, 2021).
- [24] **Zhang S., Jin J.** Computation of special functions. N.Y.: Wiley-Interscience; 1996: 717.
- [25] **Antoine X., Chniti C., Ramdani K.** On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders. Journal of Computational Physics. 2008; 227(3):1754–1771.
- [26] **Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J.** Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library; 2001: 932.
- [27] **Amamou M.L.** A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case. Acoustical Physics. 2016; 62(3):280–291. DOI:10.1134/S1063771016030015.
- [28] **Насибуллаева Э.Ш.** Определение числа членов при усечении рядов для численного решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер. Многофазные системы. 2020; 15(3–4):176–182. DOI:10.21662/mfs2020.3.128.

Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space

NASIBULLAeva ELVIRA SH.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, 450054, Ufa, Russia

Corresponding author: Nasibullaeva Elvira Sh., e-mail: elvira@anrb.ru

Received October 26, 2021, revised February 4, 2022, accepted February 11, 2022.

Abstract

The problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set, arbitrarily located in 3D space, under the acoustic field action is considered. In the case of a spheres large number in the system configuration, as well as with an increase in their interaction, the problem solution requires significant computing resources and computer time. Therefore the algorithm optimization for constructing the reexpansion coefficient matrix is carried out in order to minimize the amount of RAM used, and the analysis of the costs of computing resources is carried out depending on the truncated series number. The optimized algorithm verification showed a good correspondence with the numerical data obtained by other researchers.

The purpose is to determine the pressure distribution outside and inside the spheres in a wide range of system parameters.

Methodology. When solving the Helmholtz equations, a numerical technique based on the fast multipole method was used. For the numerical solution, the method developed for the case of soundproof spheres has been adapted for the sound-permeable one.

As a *finding* of the conducted series of computational experiments, a quantitative estimate of the truncated series number was obtained and can be applied to solution of resource-intensive problems. The optimized calculation method for various values of system parameters is demonstrated for particular examples.

Originality. Diagrams constructed using the considered approach, in contrast to approaches based on averaged equations, have represented a complete pressure distribution picture outside and inside the spheres system.

Keywords: sound-permeable sphere, acoustic scattering, multipole expansion method, computational experiment, monopole radiation source, pressure distribution diagram.

Citation: Nasibullaeva E.Sh. Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in three-dimensional space. Computational Technologies. 2022; 27(2):19–36. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.003. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was supported by the state assignment No. 0246-2019-0052.

References

1. **Ishimaru A.** Wave propagation and scattering in random media. 1st edition. N.Y.: Academic Press; 1978: 339.
2. **Stashkevich A.P.** Akustika morya [Acoustics of the sea]. Leningrad: Sudostroenie; 1966: 356. (In Russ.)
3. **Aleshin N.P., Shcherbinskiy V.G.** Radiatsionnaya, ul'trazvukovaya i magnitnaya defektoskopii metalloizdeliy [Radiation, ultrasonic and magnetic flaw detection of metal products]. Moscow: Vysshaya Shkola; 1991: 271. (In Russ.)
4. Physical principles of medical ultrasonics. Eds.: C.R. Hill. Chichester: Ellis Horwood; 1986: 495.
5. **Demin I.Yu., Pronchatov-Rubtsov N.V.** Sovremennye akusticheskie metody issledovaniy v biologii i meditsine [Modern acoustic research methods in biology and medicine]. Nizhni Novgorod: Izdadelstvo NNGU; 2007: 121. (In Russ.)
6. **Kallistratova M.A.** Radioakusticheskoe zondirovanie atmosfery [Radio-acoustic sounding of the atmosphere]. Moscow: Nauka; 1985: 197. (In Russ.)
7. Technology for creating positioned 3D sound. Available at: <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed at October 21, 2021). (In Russ.)
8. **Medwin H., Clay C.S.** Fundamentals of acoustical oceanography. San Diego: Academic Press; 1998: 739.
9. **Duda R.O., Martens W.L.** Range dependence of the response of a spherical head model. Journal of the Acoustical Society of America. 1998; 104(5):3048–3058. DOI:10.1121/1.423886.
10. **Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V.T.** Osnovy akustiki [Basics of acoustics]. Kiev: Naukova Dumka; 2009: 867. (In Russ.)
11. **Nasibullaeva E.Sh.** Investigation of scattering from soundproof single sphere under external influence. Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2017; 12(1):73–82. DOI:10.21662/uim2017.1.011. (In Russ.)
12. **Nasibullaeva E.Sh.** The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere. Multiphase Systems. 2018; 13(4):79–91. DOI:10.21662/mfs2018.4.012. (In Russ.)
13. **Kapodistrias G., Dahl P.H.** Effects of interaction between two bubble scatterers. Journal of the Acoustical Society of America. 2000; (107):3006–3017. DOI:10.1121/1.429330.
14. **Roumeliotis J.A., Kotsis A.D.** Acoustic scattering from two spheres, one with a small radius. Acoustical Physics. 2007; 53(1):33–43. DOI:10.1134/S1063771007010046.
15. **Nasibullaeva E.Sh.** Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence. Multiphase Systems. 2019; 14(1):44–51. DOI:10.21662/mfs2019.1.006. (In Russ.)

16. **Gumerov N.A., Duraiswami R.** Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2002; 112(6):2688–2701. DOI:10.1121/1.1517253.
17. **Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P.** Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2003; 113(6):3001–3011. DOI:10.1121/1.1572141.
18. **Nasibullaeva E.Sh.** Numerical analysis of acoustic scattering from soundpermeable spheres under external influence. *Vestnik UGATU*. 2021; 25(2):93–101. (In Russ.)
19. **Nasibullaeva E.Sh.** Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial soundpenetrable spheres. *Multiphase Systems*. 2019; 14(2):115–124. DOI:10.21662/mfs2019.2.016. (In Russ.)
20. **Kobelev Yu.A.** On the theory of multiple scattering of sound waves by spherical particles in liquid and elastic media. *Akusticheskij Zhurnal*. 2011; 57(4):443–449. (In Russ.)
21. **Vladimirov V.S.** *Equations of mathematical physics*. N.Y.: Marcell Dekker Incorporated; 1971: 427.
22. **Korn G.A., Korn Th.M.** *Mathematical handbook for scientists and engineers*. McGraw Hill Book Company; 1968: 943.
23. LAPACK — Linear Algebra PACKage. Available at: <https://www.netlib.org/lapack> (accessed at October 21, 2021).
24. **Zhang S., Jin J.** *Computation of special functions*. N.Y.: Wiley-Interscience; 1996: 717.
25. **Antoine X., Chniti C., Ramdani K.** On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders. *Journal of Computational Physics*. 2008; 227(3):1754–1771.
26. **Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J.** *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics*. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library; 2001: 932.
27. **Amamou M.L.** A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case. *Acoustical Physics*. 2016; 62(3):280–291. DOI:10.1134/S1063771016030015.
28. **Nasibullaeva E.Sh.** Terms number determination at the series truncation for the numerical solution of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set. *Multiphase Systems*. 2020; 15(3–4):176–182. DOI:10.21662/mfs2020.3.128. (In Russ.)