

## Анализ аппроксимации тороидального источника электромагнитного поля

Д. А. АРХИПОВ<sup>1</sup>, Э. П. ШУРИНА<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор Шурина Элла Петровна, e-mail: [shurina@online.sinor.ru](mailto:shurina@online.sinor.ru)

Поступила 09 декабря 2021 г., доработана 06 апреля 2022 г., принята в печать 14 апреля 2022 г.

Предложены два метода аппроксимации тороидального источника электромагнитного поля для решения системы уравнений Максвелла в естественных переменных векторным методом конечных элементов: электрическая постановка (плотность электрического тока вдоль обмотки катушки); магнитная постановка (эффективная плотность магнитного тока в сердечнике катушки). Выполнен сравнительный анализ методов в зависимости от электрофизических и геометрических характеристик источника и свойств среды. Численные эксперименты демонстрируют преимущество аппроксимации тороидальной генераторной катушки плотностью магнитного тока.

*Ключевые слова:* векторный метод конечных элементов, электромагнитное поле, тороидальная катушка, плотность тока, система уравнений Максвелла.

*Цитирование:* Архипов Д.А., Шурина Э.П. Анализ аппроксимации тороидального источника электромагнитного поля. Вычислительные технологии. 2022; 27(4):63–76. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.005.

### Введение

Проблемы геоэлектрики, к которым относятся и задачи электромагнитного каротажа, определяются типами источников возбуждения электромагнитного поля, точностью и физической корректностью их аппроксимации [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются тороидальный источник электромагнитного поля и его аппроксимация, учитывающая геометрические характеристики и физические свойства генераторной катушки [3]. Корректная математическая модель этого объекта, использование векторных базисных функций второго типа второго порядка [4] и адаптивной тетраэдральной сетки обеспечивают разрешимость дискретного конечно-элементного аналога уравнения Гельмгольца при расчете напряженности электрического и магнитного полей. В связи с геометрической сложностью катушки ее аппроксимация менее разработана по сравнению с соленоидом и электродами [5–7].

В настоящей работе рассмотрены два алгоритма дискретизации тороидального источника, а именно для токовой обмотки и объемного источника магнитного поля (рис. 1). Если источник задается плотностью электрического тока вдоль токовой обмотки, то

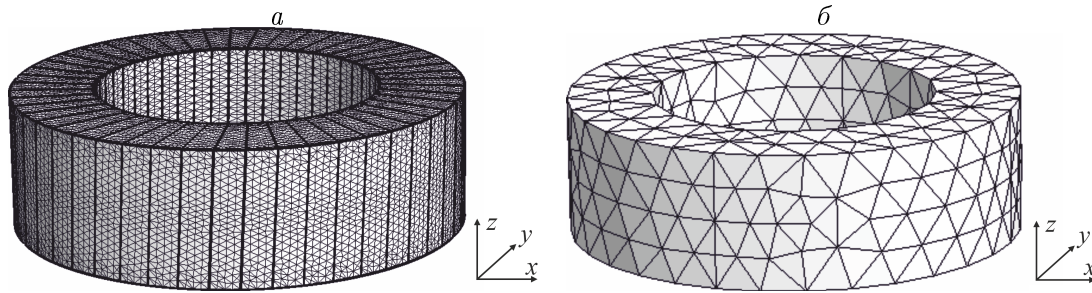


Рис. 1. Тороидальный источник: *a* — мелкая сетка, учитывающая токовую обмотку; *б* — грубая сетка, аппроксимирующая сердечник без учета обмотки

Fig. 1. Toroidal source: *a* — fine mesh considering the current winding; *b* — coarse mesh approximating the core without winding

необходимо строить адаптивную расчетную сетку с учетом геометрии обмотки. Для числа витков более ста такой способ аппроксимации неэффективен из-за большого количества ячеек дискретизации (рис. 1, *a*). Во втором алгоритме аппроксимация выполняется с использованием плотности магнитного тока, которая задается внутри сердечника тороида, следовательно, не требуется строить тетраэдральное сеточное разбиение с учетом геометрии обмотки (рис. 1, *б*), при этом количество ячеек не зависит от числа витков.

## 1. Моделирование электромагнитного поля

В качестве генератора магнитного поля используется тороидальный источник (катушка), который может быть представлен двумя диполями, но, как и в случае соленоидального источника, аппроксимация с помощью диполей возможна, когда измерения проводятся в дальней зоне [8, 9].

Таким образом, при аппроксимации катушки необходимо учитывать ее геометрию и физические свойства. В данной работе представлены методы аппроксимации источника, учитывающие его геометрические параметры.

Рассмотрим задачу, где источником электромагнитного поля является катушка (рис. 1, *a*) с сердечником из ферромагнитного материала (относительная магнитная проницаемость больше 100) и непрерывной токовой обмоткой (показана жирными линиями). Аппроксимация данного источника, отражающая все особенности этого типа обмотки, является задачей со сложной геометрией.

### 1.1. Математическая модель

Поведение гармонического электромагнитного поля описывается системой уравнений Максвелла в частотной области [10]

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - i\omega\varepsilon\mathbf{E} - \sigma\mathbf{E} = \mathbf{J}_0, \\ \operatorname{div} \varepsilon\mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mu\mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля, В/м;  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля, А/м;  $\mathbf{J}_0$  — плотность электрического тока источника, А/м<sup>2</sup>;  $\omega$  — циклическая

частота источника, Гц;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость, Ф/м;  $\mu$  — магнитная проницаемость, Гн/м;  $\sigma$  — удельная электропроводность, См/м.

При моделировании электромагнитных полей от системы (1) переходят к дифференциальным уравнениям второго порядка. Это делают по двум причинам. Во-первых, при переходе к уравнениям второго порядка уравнения Максвелла развязываются относительно электрического или магнитного поля. Во-вторых, с оператором второго порядка предпочтительнее работать при численном моделировании. Тогда уравнение Гельмгольца (второго порядка) для напряженности электрического поля в частотной области имеет вид

$$\operatorname{rot}\mu^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{J}_0, \quad (2)$$

где  $k^2 = -\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma$ ,  $i$  — мнимая единица. На границе области заданы условия Дирихле

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

где  $\Omega$  — область моделирования,  $\partial\Omega$  — внешняя граница расчетной области.

Условие разрешимости системы уравнений Максвелла для источника индукционного типа имеет вид [14]

$$\operatorname{div}(\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Следовательно, вычислительная схема решения задачи (2), (3) должна конструироваться таким образом, чтобы условие (4) выполнялось с заданной точностью. Векторный метод конечных элементов позволяет выполнить эти требования, если используется полный иерархический базис [11, 12].

## 1.2. Векторная вариационная постановка задачи

Пусть  $\Omega$  — трехмерная область с липшиц-непрерывной границей  $\partial\Omega$ , состоящая из неоднородных по физическим свойствам подобластей. Введем гильбертовы пространства векторных комплексных функций

$$\begin{aligned} H(\operatorname{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \operatorname{rot}\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3\}, \\ H_0(\operatorname{rot}, \Omega) &= \left\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}, \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \end{aligned}$$

со скалярным произведением и нормой [11].

Сформулируем следующую вариационную постановку для задачи (2), (3).

Для  $\mathbf{J}_0 \in [L_2(\Omega)]^3$  найми  $\mathbf{E} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$  такое, что для  $\forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$  выполняется

$$(\mu^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) + (k^2\mathbf{E}, \mathbf{v}) = -i(\omega\mathbf{J}_0, \mathbf{v}). \quad (5)$$

Так как для введенных пространств выполняется диаграмма де Рама, решение вариационной формулировки (5) будет удовлетворять закону сохранения заряда (4) в слабом смысле. Таким образом, при построении дискретного аналога вариационной формулировки (5) необходимо обеспечивать выполнение диаграммы де Рама [13] для конечномерных подпространств. Выполнение диаграммы возможно при использовании векторного метода конечных элементов на тетраэдральном разбиении области моделирования и иерархическом базисе полного второго порядка.

### 1.3. Дискретная вариационная постановка задачи

Введем согласованное тетраэдральное разбиение  $T$  расчетной области  $\Omega$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k \quad \forall \Omega_i, \Omega_j \in T, \quad i \neq j, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \Gamma_{ij},$$

где  $\Gamma_{ij}$  — общая грань тетраэдров  $i$  и  $j$ . Определим конечномерное подпространство  $H_0^h(\text{rot}; \Omega) \subset H_0(\text{rot}; \Omega)$ , используя иерархические векторные базисные функции  $\omega_i^k$  на элементе  $\Omega_k$  [4].

Сформулируем дискретную вариационную постановку задачи (1), (2).

Для  $\mathbf{J}_0^h \in [L_2^h(\Omega)]^3$  найти  $\mathbf{E}^h \in H_0^h(\text{rot}; \Omega)$  такое, что  $\forall \mathbf{v}^h \in H_0^h(\text{rot}; \Omega)$  выполняется

$$(\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^h, \text{rot} \mathbf{v}^h) + (k^2 \mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h) = -i(\omega \mathbf{J}_0^h, \mathbf{v}^h).$$

Для построенных дискретных подпространств выполняется дискретная диаграмма де Рама, следовательно, аппроксимация напряженности электрического поля будет удовлетворять закону сохранения заряда в слабой форме. Для построения дискретного аналога правой части уравнения (тороидального источника) токовую обмотку аппроксимируем на ребрах тетраэдров сеточного разбиения  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Плотность электрического тока вдоль ребра  $e_i$  определяется по формуле

$$\mathbf{J}_0^h(x, y, z) = \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) \cdot \mathbf{N}_i \cdot |\mathbf{J}_0|. \quad (6)$$

При таком методе аппроксимации многовитковой обмотки ее дискретный аналог характеризуется большим количеством сеточных элементов. Увеличение числа витков приводит к значительному уменьшению размера ячейки сетки (при количестве витков обмотки 30 число тетраэдров 221 903, при 60 — 649 122).

Таким образом, при большом количестве витков мелкость сетки источника приведет к тому, что конечно-элементная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) будет иметь большую размерность (более 100 млн неизвестных) и итерационный процесс будет сходиться очень медленно. Следовательно, необходимо разработать процедуру аппроксимации источника, которая не требует строить конечно-элементную сетку с учетом геометрии токовой обмотки, но при этом позволяет учитывать все геометрические и электрофизические свойства источника. Исследуем поведение электромагнитного поля от тороидального источника.

## 2. Численный эксперимент моделирования напряженности электромагнитного поля

Рассмотрим моделирование напряженности электромагнитного поля от генераторной катушки в однородной области. Геометрические характеристики источника и электрофизические характеристики среды приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

### 2.1. Вычисление эффективной плотности магнитного тока

При решении вариационной задачи (5) получим распределение напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  внутри и вне катушки. Напряженность магнитного поля вычисляем по формуле [15]

$$\mathbf{H} = i(\omega\mu)^{-1} \cdot \text{rot} \mathbf{E}. \quad (7)$$

Введем понятие плотности магнитного тока, наведенного в сердечнике катушки:

$$\mathbf{M} = \text{rot}\mathbf{E}. \tag{8}$$

Так как напряженность электрического поля является комплексно-значным вектором  $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z)$ , плотность магнитного тока, вычисляемая по формуле (8), будет комплексно-значным трехкомпонентным вектором  $(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z)$ .

Компоненту  $\mathbf{M}_\phi$  определяем по формуле

$$\mathbf{M}_\phi = -\mathbf{M}_x \sin \phi + \mathbf{M}_y \cos \phi.$$

Распределение плотности магнитного тока внутри сердечника 1 для частоты 1 МГц, 30 витков и удельной электропроводности внешней среды 0.1 См/м представлено на рис. 2. Магнитный ток сосредоточен внутри сердечника, причем  $\mathbf{M}_z \ll \mathbf{M}_\phi$ . Следовательно, сердечник катушки можно рассматривать как внешний источник магнитного поля, для этого необходимо исследовать влияние внешней среды и свойств сердечника на плотность магнитного тока.

Т а б л и ц а 1. Геометрические характеристики источника  
Table 1. Geometric characteristics of the source

Характеристика	Значение
Внешний радиус сердечника $R_{\text{внеш}}$ , мм	20.9
Внутренний радиус сердечника $R_{\text{внутр}}$ , мм	13.1
Высота сердечника $h$ , мм	12.5
Число витков обмотки	30, 45, 60, 90
Координаты центра тороидальной катушки	(0, 0, 0)
Сила тока, А	1
Частота источника, КГц	10, 500, 1000

Т а б л и ц а 2. Электрофизические характеристики среды для сердечников 1–3  
Table 2. Electrophysical characteristics of the medium for cores 1–3

Характеристика	1	2	3
Диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r$ , Ф/м	1	1	1
Магнитная проницаемость $\mu_r$ , Гн/м	200	600	1000
Удельная электропроводность $\sigma$ , См/м	0.333	0.333	0.333

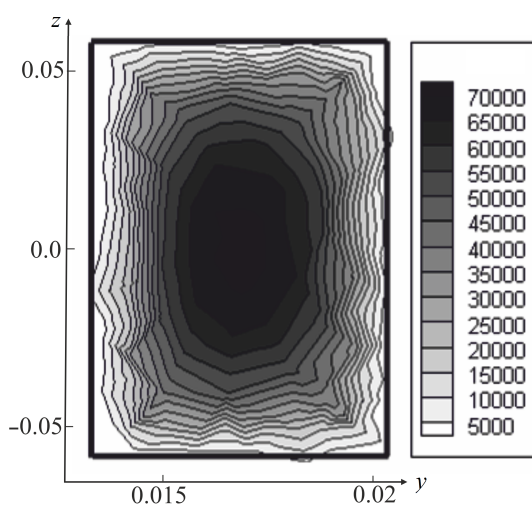


Рис. 2. Распределение плотности магнитного тока в сечении  $x = 0$  сердечника 1 катушки (действительная компонента  $\mathbf{M}_\phi$ )

Fig. 2. Magnetic current density on cutting plane  $x = 0$  for core 1 (real part of the  $\mathbf{M}_\phi$  component)

Т а б л и ц а 3. Эффективная плотность магнитного тока  $a_k$  при различном числе сечений  
 Table 3. Effective magnetic current density  $a_k$  at various number of sections

Компонента плотности магнитного тока	Число сечений		
	25	50	100
Действительная	2.18E+03	2.19E+03	2.19E+03
Мнимая	4.5E+05	4.52E+05	4.52E+05

Введем эффективный магнитный ток, усредняя его по радиальным сечениям сердечника. Строим  $k$  сечений  $a_k$  в цилиндрической системе координат

$$a_k = \begin{cases} r = (R_{\text{внеш}}, R_{\text{внутр}}), \\ z = \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), \\ \phi = \frac{2\pi i}{k}, \quad i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

В каждом из таких сечений вычисляем осредненное значение плотности магнитного тока

$$M_k = \frac{1}{S_{a_k}} \int_{a_k} \mathbf{M}_\phi dr dz.$$

Здесь  $S_{a_k}$  — площадь поперечного сечения сердечника;  $\phi$  — координата в цилиндрической системе координат;  $\mathbf{M}_\phi$  — компонента плотности магнитного тока.

Осредненное по радиальным сечениям сердечника значение плотности магнитного тока (эффективная плотность) определяется соотношением

$$\tilde{\mathbf{M}}_\phi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k M_i. \quad (9)$$

Исследуем влияние количества сечений  $a_k$  на эффективную плотность магнитного тока для сердечника 1 (табл. 3). Частота 1 МГц, 30 витков, диэлектрическая проницаемость внешней среды 0.1 См/м.

Таким образом, для 50 и 100 сечений осредненная плотность магнитного тока имеет одинаковое значение. Далее эффективную плотность магнитного тока будем вычислять для 50 сечений.

## 2.2. Анализ влияния внешней среды

Исследуем влияние электрофизических характеристик внешней среды на плотность магнитного тока для сердечника 1. Частота источника 1 МГц, число витков 30, но при относительной диэлектрической и магнитной проницаемости среды, равной 1.

Исследуем также влияние диэлектрической проницаемости среды на эффективную плотность магнитного тока при частоте источника 1 МГц, числе витков, равном 30, и сердечнике 1. Относительная магнитная проницаемость 1 и удельная электропроводность среды 0.1 См/м.

Из табл. 4 и 5 видно, что изменение электрофизических характеристик среды не влияет на эффективную плотность магнитного тока внутри сердечника (разница не более 1%). Следовательно, сердечник катушки можно рассматривать как внешний источник, в котором задано распределение плотности магнитного тока.

Т а б л и ц а 4. Эффективная плотность магнитного тока в зависимости от удельной электропроводности внешней среды

Table 4. Effective magnetic current density at various electric conductivity of the host medium

Компонента плотности магнитного тока	Удельная электропроводность внешней среды, См/м		
	0.1	0.01	1
Действительная	2.19E+03	2.22E+03	2.19E+03
Мнимая	4.5E+05	4.52E+05	4.51E+05

Т а б л и ц а 5. Эффективная плотность магнитного тока в зависимости от диэлектрической проницаемости внешней среды

Table 5. Dependence of the effective magnetic current density versus dielectric permittivity of the host medium

Компонента плотности магнитного тока	Относительная диэлектрическая проницаемость		
	0.1	1	10
Действительная	2.17E+03	2.19E+03	2.2E+03
Мнимая	4.52E+05	4.52E+05	4.51E+05

### 2.3. Анализ свойств тороидального источника

Выполним анализ свойств тороидального источника, находящегося в однородной вмещающей среде с удельной электропроводностью 1 См/м, относительной диэлектрической и магнитной проницаемостью, равной 1. Исследуем влияние частоты источника на эффективную плотность магнитного тока внутри сердечника 1 с числом витков, равным 30.

В последних трех столбцах табл. 6 приведено отношение компонент эффективной плотности магнитного тока при разной частоте. Действительная компонента плотности магнитного тока прямо пропорциональна квадрату частоты источника, а мнимая компонента — прямо пропорциональна частоте источника.

Рассмотрим зависимость плотности магнитного тока от числа витков (сердечник 1, частота 1 МГц). Плотность магнитного тока прямо пропорциональна числу витков обмотки (табл. 7). Рассмотрим зависимость плотности магнитного тока от магнитной проницаемости сердечника катушки (частота 1 МГц, число витков 30). Действительная компонента плотности магнитного тока прямо пропорциональна квадрату магнитной проницаемости сердечника, а мнимая компонента — прямо пропорциональна магнитной проницаемости (табл. 8).

Таким образом, при вычислении эффективной плотности магнитного тока достаточно рассчитать  $M_\phi$  для одной конфигурации катушки (геометрия, электрофизичес-

Т а б л и ц а 6. Плотность магнитного тока в зависимости от частоты источника

Table 6. Dependence of the magnetic current density versus source frequency

Компонента плотности магнитного тока	Частота				$\frac{100 \text{ КГц}}{10 \text{ КГц}}=10$	$\frac{500 \text{ КГц}}{10 \text{ КГц}}=50$	$\frac{1 \text{ МГц}}{10 \text{ КГц}}=100$
	10 КГц	100 КГц	500 КГц	1 МГц			
Действительная	2.19E-01	2.19E+01	5.48E+02	2.19E+03	100	2500	10 000
Мнимая	4.52E+03	4.52E+04	2.26E+05	4.52E+05	10	50	100

Т а б л и ц а 7. Плотность магнитного тока в зависимости от числа витков

Table 7. Dependence of the magnetic current density versus number of coil winding turns

Компонента плотности магнитного тока	Число витков				$\frac{45}{30} = 1.5$	$\frac{60}{30} = 2$	$\frac{90}{30} = 3$
	30	45	60	90			
Действительная	2.19E+03	3.29E+03	4.39E+03	6.57E+03	1.5	2	3
Мнимая	4.52E+05	6.77E+05	9.02E+05	1.36E+06	1.5	2	3

Т а б л и ц а 8. Плотность магнитного тока в зависимости от магнитной проницаемости сердечника

Table 8. Dependence of the magnetic current density versus magnetic permeability of the core

Компонента плотности магнитного тока	Относительная магнитная проницаемость				$\frac{600}{200}=3$	$\frac{1000}{200}=5$	$\frac{2000}{200}=10$
	200	600	1000	2000			
Действительная	2.19E+03	1.97E+04	5.48E+04	2.18E+05	9	25	99.9
Мнимая	4.52E+05	1.35E+06	2.25E+06	4.52E+06	3	4.99	10

кие свойства сердечника, частота источника, число витков). Затем варьировать относительную магнитную проницаемость сердечника, частоту источника или число витков обмотки и пересчитывать осредненную плотность магнитного тока по зависимостям, представленным в табл. 6–8. Следовательно, эффективная плотность магнитного тока не зависит от свойств внешней среды, а полностью определяется геометрическими и электрофизическими характеристиками катушки.

### 3. Моделирование напряженности магнитного поля

Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в частотной области описывается уравнением Гельмгольца

$$\operatorname{rot}(\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} + i\omega\mu\mathbf{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{J}_0, \quad (10)$$

на границе области моделирования заданы однородные краевые условия Дирихле

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

В качестве источника магнитного поля используем не  $(\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{J}_0$ , а эффективную плотность магнитного тока, вычисляемую по формулам (8), (9):

$$\operatorname{rot}(\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} + i\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{M}. \quad (11)$$

Для уравнения (11) условие разрешимости имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{M} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, при построении конечно-элементной аппроксимации уравнения (11) необходимо обеспечивать выполнение условия (12).

Сформулируем вариационную постановку задачи для напряженности магнитного поля.



Для  $\mathbf{M} \in [L_2^h(\Omega)]^3$  найти  $\mathbf{H} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$  такое, что для  $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$  выполняется

$$((\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1} \text{rot} \mathbf{H}, \text{rot} \mathbf{v}) + (i\omega\mu \mathbf{H}, \mathbf{v}) = (\mathbf{M}, \mathbf{v}).$$

Сформулируем дискретную вариационную постановку. Для  $\mathbf{M}^h \in [L_2(\Omega)]^3$  найти  $\mathbf{H}^h \in H_0^h(\text{rot}; \Omega)$  такое, что  $\forall \mathbf{v}^h \in H_0^h(\text{rot}; \Omega)$  выполняется

$$((\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1} \text{rot} \mathbf{H}^h, \text{rot} \mathbf{v}^h) + (i\omega\mu \mathbf{H}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{M}^h, \mathbf{v}^h).$$

Рассмотрим аппроксимацию правой части уравнения (11) с учетом условия (12). Основные отличия магнитного источника от электрического (см. разд. 4):

- электрический источник содержит только одну компоненту (в нашем случае мнимую), а магнитный источник — комплексно-значная величина;
- магнитный источник распределен в объеме, т. е. аппроксимируется тетраэдрами разбиения катушки, а электрический задается вдоль ребер, аппроксимирующих токовую петлю (соленоидальная катушка) или обмотку (тороидальная катушка).

Так как источник объемный, для вычисления элементов вектора правой части рассмотрим два подхода:

1.  $\mathbf{M}^h = \text{rot} \mathbf{E}^h$ , где  $\mathbf{E}^h$  — напряженность электрического поля, являющегося решением задачи с использованием электрического источника поля.
2.  $\mathbf{M}^h = (\mathbf{M}_x^h, \mathbf{M}_y^h, \mathbf{M}_z^h)$ ,  $\mathbf{M}_x^h = -\tilde{\mathbf{M}}_\phi \sin \phi$ ,  $\mathbf{M}_y^h = \tilde{\mathbf{M}}_\phi \cos \phi$ ,  $\mathbf{M}_z^h = 0$ , где  $\tilde{\mathbf{M}}_\phi^h$  — эффективная плотность магнитного тока,  $\phi$  — координата в цилиндрической системе координат.

В первом случае условие (12) выполняется автоматически, во втором плотность магнитного тока постоянна во всем сердечнике катушки (см. рис. 1), таким образом, получаем замкнутый (индукционный) источник и соотношение (12) будет выполняться.

Для вычисления скалярного произведения  $(\mathbf{M}^h, \mathbf{v})$  воспользуемся четырехточечной схемой Гаусса для численного интегрирования на тетраэдре [16].

Матрица конечно-элементов СЛАУ, соответствующая дискретной вариационной формулировке, не зависит от параметров источника, следовательно, для обоих подходов (электрическая постановка и магнитная) она будет иметь одинаковую структуру, если используются одинаковые сетки. Однако спектральные характеристики матриц будут различаться, так как коэффициенты уравнения в этих подходах разные.

Магнитный источник не привязан к электрической обмотке катушки, поэтому для моделирования магнитного источника нет необходимости строить сетку в зависимости от числа витков и моделирование можно проводить на более грубом разбиении.

#### 4. Сравнение результатов моделирования поля от электрического и магнитного источников

Рассмотрим задачу из разд. 2 с магнитным источником. При решении задачи (11), (12) получим распределение напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}^h$  во всей области моделирования. Напряженность электрического поля вычисляется по формуле [15]

$$\mathbf{E}^h = (\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1} \text{rot} \mathbf{H}^h. \quad (13)$$

Рассмотрим два способа вычисления правой части для частоты источника 1 МГц, сердечника 1, числа витков 30, удельной электропроводности вмещающей среды 0.1 См/м.

Сравнивать распределение электромагнитного поля, полученного от электрического и магнитного источников, будем в точках  $(x_i = 0.4, \dots, 4; y_i = 0; z_i = 0)$ . В качестве истинного решения возьмем распределение электромагнитного поля, полученного от электрического источника, тогда погрешность решения вычислим по формулам

$$\left[ \left( \sum_{i=1, \dots, N} \frac{\|\mathbf{E}_i^M - \mathbf{E}_i^J\|}{\|\mathbf{E}_i^J\|} \right) / N \right] \cdot 100 \%, \quad (14)$$

$$\left[ \left( \sum_{i=1, \dots, N} \frac{\|\mathbf{H}_i^M - \mathbf{H}_i^J\|}{\|\mathbf{H}_i^J\|} \right) / N \right] \cdot 100 \%, \quad (15)$$

где  $i$  — номер точки, в которой вычисляется значение поля;  $M$  — решение, полученное в магнитной постановке;  $J$  — решение, полученное в электрической постановке;  $N$  — количество точек.

Алгоритм сравнения двух способов аппроксимации тороидальной генераторной катушки:

1. Решая уравнение (2) в электрической постановке, получаем распределение напряженности электрического поля во всей расчетной области.
2. Вычисляем напряженность магнитного поля по формуле (7).
3. Находим эффективный магнитный ток.
4. Решая уравнение (11) в магнитной постановке, получаем распределение напряженности магнитного поля во всей расчетной области.
5. Находим напряженность электрического поля по формуле (13).

Вычисление погрешности для напряженности магнитного поля выполняем по формуле (15) только для компоненты поля  $\mathbf{H}_\phi$ , для электрического поля (14) — компонент  $\mathbf{E}_\phi$  и  $\mathbf{E}_z$ . Вычисления производим в декартовой системе координат, и лишь результат моделирования рассматриваем в цилиндрической системе координат, аналогично для напряженности магнитного поля.

При использовании эффективной плотности магнитного тока наблюдается уменьшение погрешности вычисления напряженностей магнитного и электрического полей (табл. 9).

Рассмотрим параметры сеток и время решения СЛАУ для задачи с такими же электрофизическими характеристиками. При использовании магнитного тока наблюдается уменьшение времени решения СЛАУ в 1.5 раза. На грубой сетке обнаруживается ускорение в 2.5 раза, при этом точность численного решения сохраняется (табл. 10). Аппроксимация источника эффективным магнитным током требует меньше вычислительных ресурсов, чем аппроксимация на базе вычисления ротора напряженности электрического поля.

Т а б л и ц а 9. Погрешность вычислений в зависимости от разбиения сетки и источника, %  
Table 9. Calculation error depending on mesh division and source, %

Источник	Погрешность вычислений напряженности поля	
	электрического	магнитного
$\tilde{\mathbf{M}}_\phi$ (мелкое разбиение)	4.2	1
$\tilde{\mathbf{M}}_\phi$ (грубое разбиение)	5.1	1.6
$\text{rot}\mathbf{E}^h$ (мелкое разбиение)	6.4	2.7
$\text{rot}\mathbf{E}^h$ (грубое разбиение)	8.3	3.9

Т а б л и ц а 10. Размерность СЛАУ и время решения в зависимости от разбиения сетки и источника

Table 10. Linear system size and computational time depending on mesh division and source

Источник	Размерность СЛАУ	Время решения, с
<b>J</b>	536 498	2493
$\vec{M}_\phi$ (мелкое разбиение)	536 498	1984
$\vec{M}_\phi$ (грубое разбиение)	397 201	1038
$\text{rot}\vec{E}^h$ (мелкое разбиение)	536 498	2135
$\text{rot}\vec{E}^h$ (грубое разбиение)	397 201	1427

Т а б л и ц а 11. Базисные функции для аппроксимации правой части уравнения (10)

Table 11. Comparison between basis functions of different order used to approximate the right-hand side of equation (10)

Тип базисной функции	1-й порядок	1-й порядок	2-й порядок	2-й порядок
	1-й тип	2-й тип	1-й тип	2-й тип
Слабая дивергенция правой части	3.067E-8	8.122E-8	4.951E-7	7.549E-6

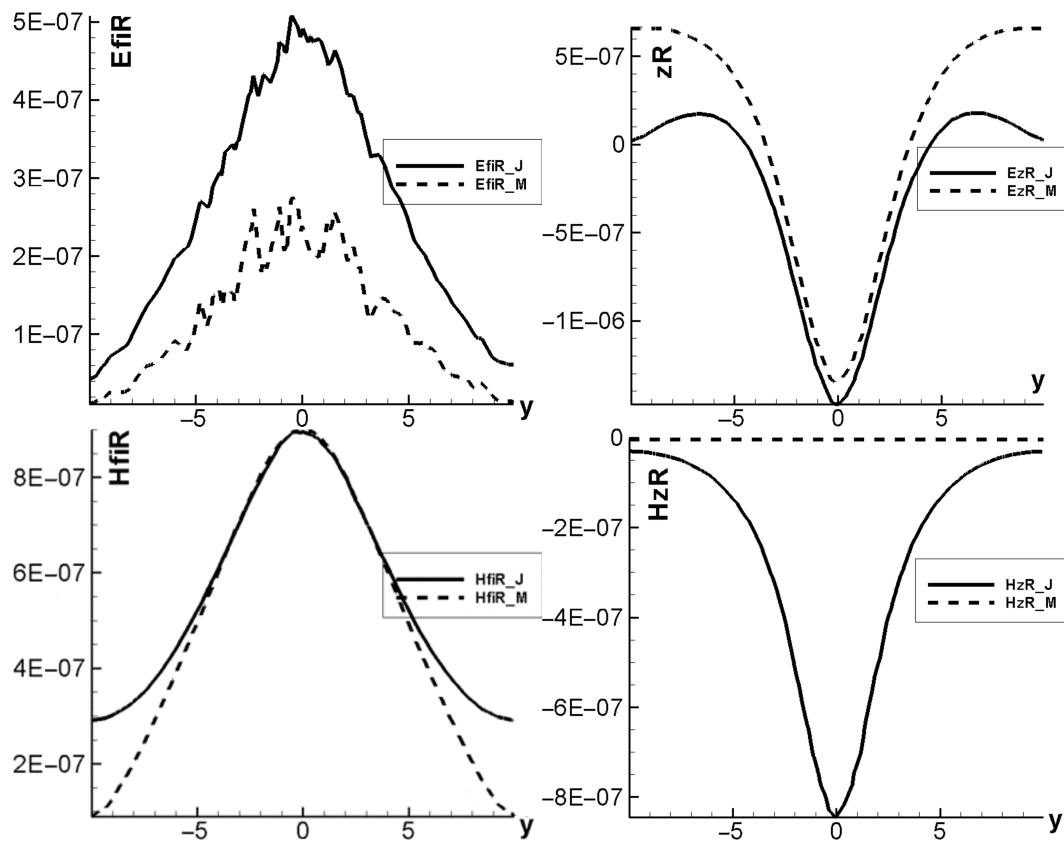


Рис. 3. Действительные компоненты напряженности электромагнитного поля вдоль прямой:  $x = 3; y = -10, \dots, 10; z = 0$ . Сердечник  $200\mu_0$ ,  $\sigma_{\text{вн. ср}} = 0.1 \text{ См/м}$ , число витков 30, частота 100 КГц

Fig. 3. Real parts of the electromagnetic field over the line  $x = 3; y = -10, \dots, 10; z = 0$ . Core parameters:  $200\mu_0$ ,  $\sigma_{\text{host}} = 0.1 \text{ Sm/m}$ , 30 winding turns, source frequency 100 kHz

Корректная аппроксимация правой части уравнения (10) характеризуется нулевой дивергенцией. Из табл. 11 видно, что на базисе первого порядка первого типа правая часть уравнения (10) аппроксимируется точнее.

На рис. 3 приведена зависимость напряженности электромагнитного поля для электрической и магнитной постановок. Компоненты  $E_\phi$ ,  $E_z$ ,  $H_\phi$  совпадают для обеих постановок, но для магнитной постановки компонента  $H_z$  всегда равна нулю.

## Заключение

Поведение электромагнитного поля для двух аппроксимаций тороидального источника электромагнитного поля: плотность электрического тока в обмотке катушки (6) и плотность эффективного магнитного тока в сердечнике катушки (8), (9) совпадают. Магнитная постановка обладает следующими преимуществами:

1. Сеточное разбиение тороидальной катушки строится независимо от токовой обмотки, следовательно, число витков не влияет на размер конечных элементов (размер тетраэдров возле источника определяется только геометрией его сердечника).
2. СЛАУ относительно напряженности магнитного поля решается быстрее, чем относительно напряженности электрического поля (это связано с возможностью более грубого конечно-элементного разбиения и тем, что плотность магнитного тока имеет более простую геометрическую структуру, чем плотность электрического тока).

Так как плотность магнитного тока зависит только от свойств источника, разработанный в данной работе подход позволяет рассчитать плотность магнитного тока в однородной среде и использовать ее для моделирования реальных задач геоэлектрики (скважинного каротажа, наземной электроразведки и др.)

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке проекта FWZZ-2022-0025.

## Список литературы

- [1] **Chave A.D.** On the electromagnetic fields produced by marine frequency domain controlled sources. *Geophysical Journal International*. 2009; 179(3):1429–1457.
- [2] **Bassanini P., Elcrat A.R.** Mathematical theory of eletromagnetism. SIMAI E-Lecture Notes. 2009: 384.
- [3] **Akbarzadeh-Sharbat A.** Finite-element time-domain solution of the vector wave equation in doubly dispersive media using Mobius transformation technique. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2013; 61(8):4158–4166.
- [4] **Webb J.P.** Edge elements and what they can do for you. *IEEE Transaction on magnetic*. 1993; (2):1460–1465.
- [5] **Haber E., Caudillo-Mata L.A.** A multiscale finite volume method with oversampling for geophysical electromagnetic simulations. 15th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. 2016: 674–679.
- [6] **Kirk T.** McDonald electromagnetic fields of a small helical toroidal antenna. Princeton, N.J.: Joseph Henry Laboratories, Princeton University; 2008; Vol. 9.
- [7] **Knoepfel H.** Magnetic fields: a comprehensive theoretical treatise for practical use. John Wiley & Sons; 2000; Vol. 647.

- [8] **Casati D., Hiptmair R., Smajic J.** Coupling finite elements and auxiliary sources for Maxwell's equations. Research Report No. 2018-13. Zurich, Switzerland; 2018: 10.
- [9] **Zagoskin A.M., Chipouline A., Il'ichev E., Johansson J.R., Nori F.** Toroidal qubits: naturally-decoupled quiet artificial atoms. Scientific Report. 2015; (5).
- [10] **Chew W.C.** Vector potential electromagnetics with generalized Gauge for inhomogeneous media: formulation. Progress In Electromagnetics Research. 2014; (149):69–84.
- [11] **Nedelec J.C.** Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . Numerische Mathematik. 1980; 35(3):315–341. DOI:10.1007/BF01396415.
- [12] **Marinos N. Vouvakis A.** Non-conformal domain decomposition method for solving large electromagnetic wave problems. Dis. Dr. Phil. Graduate School of The Ohio State Univ.; 2005: 190.
- [13] **Schwarzbach C.** Stability of finite element solutions to Maxwell's equations in frequency domain. Dis. Dr. Rer. Nat. Technische Universität Bergakademie Freiberg; 2009: 178. (In Germ.)
- [14] **Buffa A., Maday Y., Rapetti F.** The Mortar element method for 3D Maxwell's equations: analysis and application to magnetodynamics. 12th International Conference on Domain Decomposition Methods. 2001; 259–270.
- [15] **Haus H.A., Melcher J.R.** Electromagnetic fields and energy. N.J.: Prentice-Hall; 1989; (29).
- [16] **Иванова Т.В.** Численные методы в оптике. Учебное пособие. СПб: Университет ИТМО; 2017: 84.

## Analysis of the toroidal coil approximation technique for the electromagnetic simulations

АРКHIPOV DMITRY A.<sup>1</sup>, SHURINA ELLA P.<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Trofimuk Institute of Petroleum Geology of SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University, 630073, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Shurina Ella P., e-mail: shurina@online.sinor.ru

Received December 09, 2021, revised April 06, 2022, accepted April 14, 2022.

### Abstract

*Objective.* In well-logging applications, the electromagnetic field is generated by the toroidal or solenoidal coils. The physically correct and efficient approximation of these coils is of utmost importance. In this paper, we propose two techniques to approximate the toroidal coil: the electric source and the magnetic source.

*Methods.* In the frequency domain the electromagnetic field is governed by the second-order partial differential equation for the electric or magnetic fields. The computational scheme is based on the vector finite element method with a hierarchical basis of the complete second order. The tetrahedral discretization of the computational domain is non-uniform.

When approximating the toroidal coil as an electric current density in the coil winding, the finite element mesh must capture the geometry of the winding. For a coil with multiple winding turns, it results in an extremely fine mesh, which leads to large linear systems, hence, poor solver performance. To overcome this, we develop a new technique for approximating a toroidal coil as a magnetic current density in the core of the coil. This approach does not require including the

winding into the finite element mesh. Therefore, the size of the resulting linear system is independent of the number of turns in the coil winding.

*Results.* The article shows that the magnetic current density in the generator coil does not depend on the host medium, but is determined only by the geometric (core size and number of turns) and electrophysical characteristics of the toroidal source core. The paper presents the distribution of the electromagnetic field strength for both formulations in a homogeneous medium.

*Conclusion.* The behavior of the electromagnetic field is the same for both methods of source approximation, but the magnetic formulation does not depend on the geometry of the toroidal coil therefore the computational mesh does no.

*Keywords:* vector finite element method, electromagnetic field, toroidal coil, current density, Maxwell equations.

*Citation:* Arkhipov D.A., Shurina E.P. Analysis of the toroidal coil approximation technique for the electromagnetic simulations. Computational Technologies. 2022; 27(4):63–76. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.005. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The research was supported by project No. FWZZ-2022-0025.

### References

1. **Chave A.D.** On the electromagnetic fields produced by marine frequency domain controlled sources. Geophysical Journal International. 2009; 179(3):1429–1457.
1. **Bassanini P., Elcrat A.R.** Mathematical theory of eletromagnetism. SIMAI E-Lecture Notes. 2009: 384.
2. **Akbarzadeh-Sharbat A.** Finite-element time-domain solution of the vector wave equation in doubly dispersive media using Mobius transformation technique. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2013; 61(8):4158–4166.
3. **Webb J.P.** Edge elements and what they can do for you. IEEE Transaction on magnetic. 1993; (2):1460–1465.
4. **Haber E., Caudillo-Mata L.A.** A multiscale finite volume method with oversampling for geophysical electromagnetic simulations. 15th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. 2016: 674–679.
5. **Kirk T.** McDonald electromagnetic fields of a small helical toroidal antenna. Princeton, N.J.: Joseph Henry Laboratories, Princeton University; 2008; Vol. 9.
6. **Knoepfel H.** Magnetic fields: a comprehensive theoretical treatise for practical use. John Wiley & Sons; 2000; Vol. 647.
7. **Casati D., Hiptmair R., Smajic J.** Coupling finite elements and auxiliary sources for Maxwell's equations. Research Report No. 2018-13. Zurich, Switzerland; 2018: 10.
8. **Zagoskin A.M., Chipouline A., Il'ichev E., Johansson J.R., Nori F.** Toroidal qubits: naturally-decoupled quiet artificial atoms. Scientific Report. 2015; (5).
9. **Chew W.C.** Vector potential electromagnetics with generalized Gauge for inhomogeneous media: formulation. Progress in Electromagnetics Research. 2014; (149):69–84.
10. **Nedelec J.C.** Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . Numerische Mathematik. 1980; 35(3):315–341. DOI:10.1007/BF01396415.
11. **Marinos N. Vouvakis A.** Non-conformal domain decomposition method for solving large electromagnetic wave problems. Dis. Dr. Phil. Graduate School of The Ohio State University; 2005; 190.
12. **Schwarzbach C.** Stability of finite element solutions to Maxwell's equations in frequency domain. Dis. Dr. Rer. Nat. Freiberg: Technische Universität Bergakademie Freiberg; 2009: 178. (In German)
13. **Buffa A., Maday Y., Rapetti F.** The Mortar element method for 3D Maxwell's equations: analysis and application to magnetodynamics. 12th International Conference on Domain Decomposition Methods. 2001; 259–270.
14. **Haus H.A., Melcher J.R.** Electromagnetic fields and energy. N.J.: Prentice-Hall; 1989; (29).
15. **Ivanova T.V.** The numerical methods in optics. Textbook. St. Petersburg: ITMO University; 2017: 84. (In Russ.)