
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.003

Численное моделирование собственных колебаний покоящейся на упругом основании цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью

С. А. БОЧКАРЁВ

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614068, Пермь, Россия

Контактный автор: Бочкарёв Сергей Аркадьевич, e-mail: bochkarev@icmm.ru

Поступила 29 декабря 2021 г., доработана 10 июня 2022 г., принята в печать 25 июня 2022 г.

Представлены результаты исследований собственных колебаний круговых цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных неподвижной жидкостью и лежащих на упругом двухпараметрическом основании Пастернака. Поведение упругой конструкции и сжимаемой жидкости описывается в рамках классической теории оболочек и уравнений Эйлера. Уравнения движения оболочки, как и акустическое волновое уравнение, сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова. Проанализированы зависимости минимальных частот колебаний от характеристик упругой среды с разными вариантами неоднородности по длине тела при различных уровнях заполнения оболочки жидкостью. Продемонстрировано, что с повышением уровня заполнения оболочек жидкостью влияние упругого основания на частотный спектр конструкции снижается.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, сжимаемая жидкость, метод ортогональной прогонки Годунова, метод прямых, собственные колебания, упругая среда Пастернака.

Цитирование: Бочкарёв С.А. Численное моделирование собственных колебаний покоящейся на упругом основании цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью. Вычислительные технологии. 2022; 27(4):15–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.003.

Введение

Тонкостенные цилиндрические оболочки, в том числе содержащие жидкость, как неотъемлемая часть многообразных промышленных приложений находят применение в различных областях техники. В процессе эксплуатации они не только подвергаются разнообразным статическим и динамическим нагрузкам, но и контактируют с внешней окружающей средой. При моделировании этого взаимодействия широкое распространение получили приближенные модели (Винклера, Пастернака, Керра, упругого полупространства и т. п.), согласно которым действие окружающей среды заменяется упругим основанием [1–4]. При этом внешняя упругая среда оказывает существенное влияние на динамические характеристики взаимодействующей с ней конструкции. Этот факт послужил причиной появления значительного количества публикаций, где объектами исследований выступали тонкостенные тела, выполненные из разнообразных материалов,

находящиеся под действием различных температурных, механических, центробежных, аэро- и гидродинамических нагрузок, проанализированных с применением как аналитических, так и численных методов. Обзор публикаций, в которых осуществлен линейный анализ влияния упругого основания на спектр колебаний или границы устойчивости пустых круговых цилиндрических оболочек или прямолинейных труб, выполнен в [5].

В меньшей степени изучено воздействие упругого основания на динамические характеристики цилиндрических оболочек с жидкостью [6–16]. Изотропные и функционально-градиентные (ФГ) оболочки, свободно опертые на обоих краях, полностью заполненные неподвижной жидкостью и целиком погруженные в двухпараметрическую упругую среду, рассмотрены в [6, 7]. Решение динамических уравнений с учетом гидродинамической нагрузки, определенной из акустического волнового уравнения, основано на методе распространяющихся волн. Вертикальные ФГ-оболочки, частично заполненные несжимаемой потенциальной жидкостью, анализируются в [8, 9]. Здесь оболочки с различными комбинациями граничных условий также полностью размещаются на двухпараметрическом упругом основании. В первой работе с помощью метода Ритца, в котором полиномы Чебышёва используются для определения модальных функций в продольном направлении, оценено влияние коэффициентов основания на собственные частоты колебаний при различном уровне жидкости. В статье [9] численное решение строится на основе полуаналитического варианта метода конечных полос. Отмечается, что упругое основание Винклера оказывает большее воздействие на собственные частоты ФГ цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, чем основание Пастернака.

Влияние упругой среды на собственные частоты колебаний и границы гидроупругой устойчивости в случае текущей жидкости оценено в работах [10–12]. Колебательные характеристики ФГ цилиндрической оболочки с жидкостью, погруженной в упругую среду (модель Винклера) и подвергающейся воздействию механических и температурных нагрузок, исследуются с помощью метода модальных расширений в [10]. Продемонстрировано различное влияние упругого основания на частоты колебаний для пустых и заполненных текущей жидкостью оболочек. В [11] с применением метода обобщенных дифференциальных квадратур выявлено, что для углеродных нанотрубок с текущей внутри вязкой жидкостью, описываемой модифицированными соотношениями Навье — Стокса, повышение коэффициента постели в модели Винклера приводит к росту критических скоростей течения жидкости. Подземный нефтепровод моделируется в работе [12] в виде цилиндрической оболочки большого диаметра. Полученные аналитические соотношения для собственных частот конструкции учитывают влияние таких параметров, как скорость течения жидкости, глубина залегания и отклик однопараметрической упругой среды.

Оболочки с жидкостью, частично покоящиеся на упругом основании, изучены в статьях [13–16]. В этих работах анализируются симметричные и антисимметричные моды колебаний изотропных и ФГ цилиндрических оболочек, покоящихся как на одно- [13, 14], так и двухпараметрическом [15, 16] упругом основании, неоднородном как в окружном, так и меридиональном направлениях. При этом, как правило, применяются подходы, предложенные этими же авторами для анализа пустых оболочек. В [14] используется разработанный в [17] гибридный конечный элемент, в котором точные функции перемещений определяются непосредственно из уравнений теорий оболочек Сандерса. В перечисленных публикациях влияние упругого основания, являющегося однородным в окружном направлении и неоднородным в меридиональном, на собственные частоты

колебаний оболочек вращения, полностью или частично заполненных жидкостью, не исследовалось. Выполнение такого анализа, является одной из целей настоящей работы.

Для решения сформулированной краевой задачи используется метод ортогональной прогонки Годунова [18]. В монографии [19] среди достоинств этого метода, как и других алгоритмов, сводящих краевые задачи к задачам Коши, выделяются такие, как численная устойчивость и высокая точность вычислений. Для задач гидроупругости этот метод применяется редко и традиционно [20, 21] используется в различных реализациях. В первой из них в уравнения движения включается аналитическое выражение для гидродинамического давления, полученное из решения волнового уравнения и записанное в членах функций Бесселя [22, 23]. В комбинированном методе волновое уравнение тем или иным способом сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается совместно с системой уравнений для упругого тела. В частности, в [19, 24] для анализа вынужденных колебаний коаксиальных оболочек, содержащих жидкость в кольцевом канале, предложено использовать процедуры сведения к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на методе прямых и кубической сплайн-аппроксимации. Насколько известно автору, комбинированный подход в рамках ортогональной прогонки Годунова в случае одиночных оболочек, полностью или частично заполненных жидкостью, ранее не использовался.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругая вертикально расположенная цилиндрическая оболочка (рис. 1) длиной L , радиусом R и толщиной h , ее внутренняя область V_f полностью или частично на высоту H заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Оболочка целиком погружена в двухпараметрическое упругое основание с коэффициентами постели K_w и K_p , отвечающими за растяжение — сжатие (модель Винклера) и сдвиг (модель Пастернака) соответственно. В меридиональном направлении упругое основание является как однородным, так и неоднородным. В последнем случае оно представляет собой чередование участков с его наличием или отсутствием в виде трех различных комбинаций (рис. 2). В первом варианте оболочка разбивается на два участка, один из которых (l_1) содержит упругое основание, а его размер изменяется от нуля до L . Без-

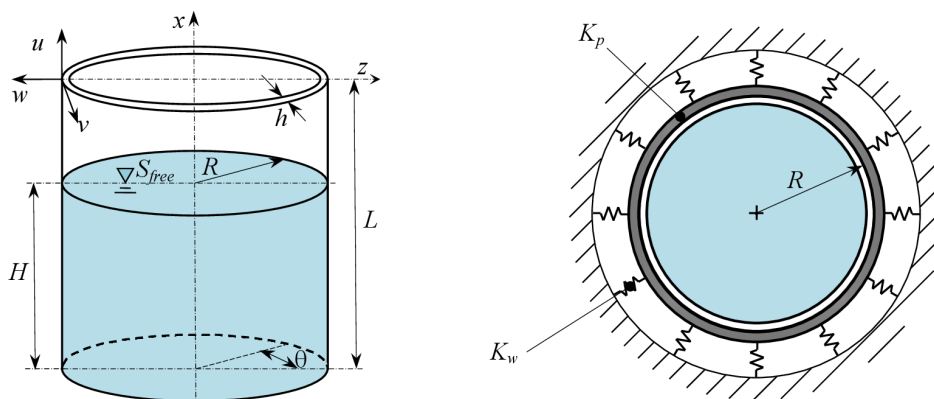


Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки с жидкостью, расположенной на упругом основании

Fig. 1. Computational scheme for a cylindrical shell with fluid embedded in an elastic foundation

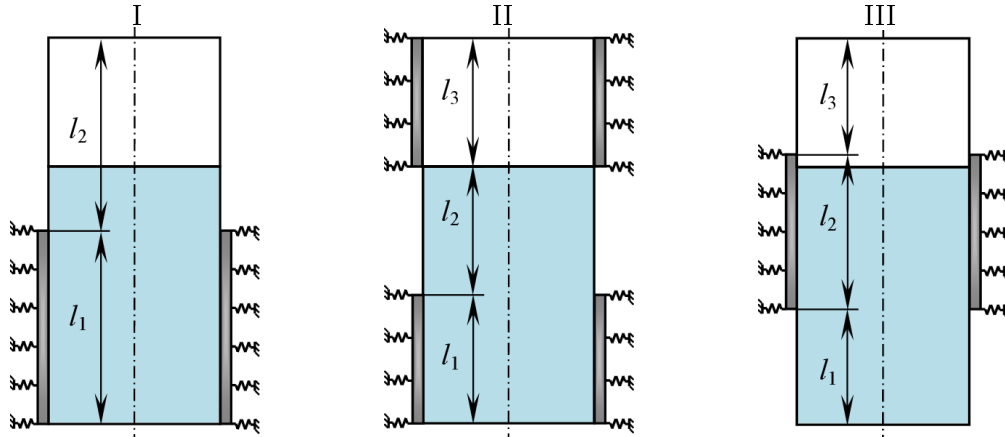


Рис. 2. Различные варианты неоднородного (по длине оболочки с жидкостью) упругого основания

Fig. 2. Different variants of elastic foundation heterogeneous along the length of the shell filled with fluid

размерный коэффициент длины ξ , характеризующий область контакта упругой среды и поверхности оболочки, определяется в этом случае как $\xi = l_1/L$. Во втором варианте оболочка разбивается на три участка, из которых два крайних содержат упругое основание и их размеры изменяются от нуля до $L/2$ ($\xi = [l_1 + l_3]/L$). Наконец, в третьем варианте оболочка также разбивается на три участка, из которых только центральный содержит упругое основание, а его размер равномерно увеличивается к обоим краям оболочки от ее середины ($\xi = l_2/L$). Необходимо проанализировать влияние упругого основания на собственные частоты колебаний оболочки с жидкостью при различных уровнях ее заполнения и разных вариантах граничных условий, задаваемых на краях конструкции.

2. Основные соотношения и метод решения

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, компоненты вектора деформации \mathbf{E}_{ij} в криволинейной системе координат (x, θ, z) могут быть записаны в виде [25]

$$\mathbf{E}_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad \mathbf{E}_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad \mathbf{E}_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta}, & \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} \right), & \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x}, & \theta_2 &= \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u , v и w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки; θ_i — углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H\}^T$ и вектором обобщенных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$, в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

где коэффициенты, входящие в матрицу жесткостей \mathbf{D} , определяются по формулам

$$(\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} = E/[1 - \nu^2], \quad \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = \nu\bar{Q}_{11}, \quad \bar{Q}_{33} = E/2/[1 + \nu].$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала оболочки.

Уравнения движения оболочки с учетом реакции упругой среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(Q_{22} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial Q_{11}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_{22} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K_w w + K_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + p = 0, \quad (3) \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} - Q_{11} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - Q_{22} = 0, \end{aligned}$$

где Q_{ii} — поперечные силы; $\rho_0 = \int_h \rho dz$, ρ — плотность материала; p — гидродинамическое давление, которое в области V_f в цилиндрической системе координат (x, θ, r) описывается акустическим волновым уравнением

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Здесь c — скорость звука в жидкости. На смоченной ($r = R$) и свободной ($x = H$) поверхностях, оси вращения оболочки ($r = 0$) и нижнем крае ($x = 0$) давление p удовлетворяет условиям

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{r=R} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{r=0} = 0, \quad (6)$$

$$x = 0 : \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x = H : \quad p = 0, \quad (7)$$

где \mathbf{n} — единичные внешние нормали к области жидкости V_f ; ρ_f — плотность жидкости. Граничное условие (7) при $x = H$ предполагает, что свободная поверхность жидкости S_{free} не перемещается, на ней отсутствуют динамическое давление и поверхностное натяжение.

Раскладывая все компоненты уравнений (1), (2) и (4) в ряды Фурье по окружной координате θ

$$X(x, \theta) = \sum_{j=0} X_j(x) \cos(j\theta), \quad Y(x, \theta) = \sum_{j=0} Y_j(x) \sin(j\theta),$$

$$X = \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, p\}, \quad Y = \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}\},$$

геометрические (1) и физические (2) соотношения, а также уравнения движения (3) сведем к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных (индекс j для простоты опущен) [25]

$$y_1 = T_{11}, \quad y_2 = S + \frac{2H}{R}, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + j_R H, \quad y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1.$$

Здесь j — номер гармоники при разложении в ряд Фурье, $j_R = j/R$. С учетом этого и принимая во внимание $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$, искомая система может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= j_R \left(\frac{2H}{R} - y_2 \right) - \omega^2 \rho_0 y_5, & f_2 &= j_R T_{22} - \frac{Q_{22}}{R} - \omega^2 \rho_0 y_6, & f_3 &= y_4 - 2j_R H, \\ f_4 &= \frac{T_{22}}{R} - j_R Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_7 + K_w y_7 + K_p (\kappa_{11} + j_R^2 y_7) - p, \\ f_5 &= \varepsilon_{11}, & f_6 &= \varepsilon_{12} + j_R y_5, & f_7 &= -y_8, & f_8 &= \kappa_{11}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ω — характеристический показатель; $i^2 = -1$. Входящие в выражения (9) величины вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} H &= \bar{b}_{33} \varepsilon_{12} + 2\bar{c}_{33} \kappa_{12}, & Q_{22} &= -j_R M_{22}, \\ \kappa_{11} &= \frac{\bar{a}_{11} (y_3 - \bar{b}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{c}_{12} \kappa_{22}) - \bar{b}_{11} (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{12} \kappa_{22})}{\bar{a}_{11} \bar{c}_{11} - \bar{b}_{11}^2}, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{11} \kappa_{11} - \bar{b}_{12} \kappa_{22}}{\bar{a}_{11}}, & T_{22} &= \bar{a}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{a}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{b}_{12} \kappa_{11} + \bar{b}_{22} \kappa_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{y_2 - 2 \left(\bar{b}_{33} + 2 \frac{\bar{c}_{33}}{R} \right) j_R \left(\frac{y_5}{R} + y_8 \right)}{\bar{a}_{33} + 4 \frac{\bar{b}_{33}}{R}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= j_R y_6 + \frac{y_7}{R}, & \kappa_{22} &= j_R \theta_2, & \theta_2 &= \frac{y_6}{R} - j_R y_7, \\ \kappa_{12} &= \frac{\varepsilon_{12} + j_R y_5}{R} - j_R y_8, & M_{22} &= \bar{b}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{b}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{c}_{12} \kappa_{11} + \bar{c}_{22} \kappa_{22}. \end{aligned}$$

Для сведения уравнения (4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений используем метод прямых (дифференциально-разностный метод) [26]. Для этого разделим область жидкости по радиусу на n равных частей и через внутренние точки деления проведем семейство параллелей $r = r_i$ ($i = 1, n-1$). На каждой такой прямой дифференциальное уравнение (4) заменим приближенным обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $p(x, r_i)$, предполагая, что она дважды непрерывно дифференцируема на рассматриваемом диапазоне. Для этого в уравнении (4) избавимся от частного дифференцирования по координате r с помощью формул численного дифференцирования

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_i} &\approx \frac{1}{2\tau} [p(x, r_{i+1}) - p(x, r_{i-1})], \\ \left. \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right|_{r=r_i} &\approx \frac{1}{\tau^2} [p(x, r_{i+1}) - 2p(x, r_i) + p(x, r_{i-1})], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tau = R/n$.

Для “крайних” прямых [27]:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} &\approx \frac{1}{2\tau} [4p(x, r_1) - p(x, r_2) - 3p(x, r_0)], \\ \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} &\approx \frac{1}{2\tau} [3p(x, r_n) - 4p(x, r_{n-1}) + p(x, r_{n-2})]. \end{aligned} \tag{11}$$

Вводя сокращенные обозначения

$$p(x, r_i) = p_i(x), \quad \frac{\partial p(x, r_i)}{\partial x} = p'_i(x), \quad \frac{\partial^2 p(x, r_i)}{\partial x^2} = p''_i(x),$$

подставляя формулы (10) в исходное уравнение (4), приходим к системе $(n - 1)$ уравнений в обыкновенных производных

$$p''_i(x) = \beta_1^i p_i(x) + \beta_2^i p_{i+1}(x) + \beta_3^i p_{i-1}(x), \tag{12}$$

где $\beta_1^i = \frac{2}{\tau^2} + \frac{j^2}{r_i^2} - \frac{\omega^2}{c^2}$, $\beta_2^i = -\frac{\tau + 2r_i}{2r_i\tau^2}$, $\beta_3^i = \frac{2r_i - \tau}{2r_i\tau^2}$. Эта система сводится к нормальному виду Коши следующим образом:

$$\begin{aligned} y_9 = p_1(x), \quad y'_9 = y_{10}, \quad y'_{10} = \beta_1^1 y_9 + \beta_2^1 y_{11} + \beta_3^1 p_0, \\ y_{11} = p_2(x), \quad y'_{11} = y_{12}, \quad y'_{12} = \beta_1^2 y_{11} + \beta_2^2 y_{13} + \beta_3^2 y_9, \\ \dots \dots \dots \tag{13} \\ y_{7+2(n-1)} = p_{n-1}(x), \quad y'_{7+2(n-1)} = y_{8+2(n-1)}, \\ y'_{8+2(n-1)} = \beta_1^{n-1} y_{7+2(n-1)} + \beta_2^{n-1} p_n + \beta_3^{n-1} y_{5+2(n-1)}. \end{aligned}$$

Значения p_0 и p_n в (13) определяются исходя из условий (5), (6) и уравнений для “крайних” прямых (11):

$$p_0 = \frac{1}{3}(4y_9 - y_{11}), \quad p_n = \frac{1}{3}(2\tau\rho_f\omega^2 y_7 + 4y_{7+2(n-1)} - y_{5+2(n-1)}).$$

Примем во внимание, что в соотношениях (9) $p = p_n$. Таким образом, совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (8) и (13), составляет $m = 8 + 2(n - 1)$ для заданной окружной гармоники.

На краях оболочки задаются однородные граничные условия

$$y_i|_{x=0} \delta_i + y_{i+4}|_{x=0} (1 - \delta_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \tag{14}$$

$$y_i|_{x=L} \delta_{i+4} + y_{i+4}|_{x=L} (1 - \delta_{i+4}) = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \tag{15}$$

$$y_i|_{x=0} = 0, \quad i = 10, 12, \dots, \frac{m}{2}, \tag{16}$$

$$y_i|_{x=H} = 0, \quad i = 9, 11, \dots, \frac{m}{2} - 1, \tag{17}$$

где $\delta_i = 0$, если заданы кинематические, и $\delta_i = 1$, если заданы статические граничные условия.

Объединенная система уравнений (8), (13) с граничными условиями (14)–(17) решается методом ортогональной прогонки Годунова с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности и ортогонализацией векторов по методу Грамма—Шмидта. Для этих целей общее решение системы (8), (13) представляется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{m/2} C_k \mathbf{y}_k,$$

где C_k — некоторые константы и \mathbf{u}_k — совокупность линейно независимых решений систем (8), (13), удовлетворяющих граничным условиям (14), (16). В результате интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничных условий (15), (17) для определения постоянных C_k получаем следующую алгебраическую систему:

$$\sum_{k=1}^{m/2} C_k f_{ik} = 0, \quad i = 1, \frac{m}{2}. \quad (18)$$

Решение задачи сводится к вычислению таких значений ω , при которых существует нетривиальное решение системы (18). Необходимым условием для этого является равенство нулю определителя матрицы $|f_{ik}(\omega)| = 0$. Для нахождения ω используется комбинация шагового метода, посредством которого вычисляются такие значения, при которых происходит смена знака определителя $|f_{ik}(\omega)|$, и метода, уточняющего ω в полученном диапазоне. В качестве последнего используется метод деления отрезка пополам. Численный алгоритм реализован в виде программного кода на языке Fortran.

3. Результаты численного моделирования

В численных примерах рассматривается цилиндрическая оболочка ($L/R = 3$, $R/h = 301.5$, $\nu = 0.3$), заполненная жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 300$ м/с) и имеющая следующие граничные условия: свободное опирание ($v = w = T_{11} = M_{11} = 0$, SS) или жесткое закрепление ($u = v = w = \theta_1 = 0$, CC) на обоих краях; консольное закрепление ($T_{11} = 0$, $S + 2H/R = 0$, $M_{11} = 0$, $Q_{11} + j_R H = 0$, CF). Численными экспериментами установлено [28], что для указанной конфигурации 25 прямых обеспечивают вычисление собственных частот с подходящей точностью и приемлемой вычислительной эффективностью. Для отображения полученных результатов используются безразмерные параметры частоты Ω , коэффициентов постели κ_w , κ_p [29] и уровня жидкости ζ :

$$\Omega = (\omega R \zeta) \cdot 10^2, \quad \kappa_w = K_w \frac{R^4}{D}, \quad \kappa_p = K_p \frac{R^2}{D}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E}}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \varsigma = \frac{H}{L}.$$

В представленных ниже расчетах используется модель упругого основания Пастернака, при которой $k = \frac{\kappa_w}{\kappa_w^{\max}} = \frac{\kappa_p}{\kappa_p^{\max}}$ и $\kappa_w^{\max} = \kappa_p^{\max} = 3600$.

Для верификации разработанного алгоритма осуществлено сравнение собственных частот колебаний заполненных жидкостью оболочек с учетом и без учета ($\xi = 0$) однородного упругого основания. Сопоставление низших собственных частот колебаний ω , определенных в рамках описанного алгоритма, с известными решениями для свободно опертой ($L = 30$ м, $R = 25$ м, $h = 0.03$ м, $E = 206$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7850$ кг/м³) и консольно закрепленной ($L = 0.231$ м, $R = 0.07725$ м, $h = 0.0015$ м, $E = 205$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³) цилиндрических оболочек, частично заполненных несжимаемой жидкостью, приведено в табл. 1 и 2 ($\xi = 0$). Здесь M — количество полуволн в меридиональном направлении. На основании данных, представленных в этих таблицах, можно заключить, что значения частот, полученных с использованием различных методов, разных теорий оболочек и моделей, описывающих поведение жидкости, достаточно близки друг к другу. Отметим также, что второй столбец с данными из работы [30] в табл. 1 отражает результаты, полученные с учетом гравитационных эффектов

Т а б л и ц а 1. Собственные частоты колебаний ω (рад/с) свободно опертой (SS) цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью: $j = 4, \xi = 0, \varsigma = 0.72$

Table 1. Natural frequencies of vibrations ω (rad/s) of a simply supported (SS) cylindrical shell partially filled with fluid: $j = 4, \xi = 0, \varsigma = 0.72$

M	Amabili et al. [30]	Amabili et al. [30]	Shahbazzabar et al. [8]	Kim et al. [31]	Расчет
1	13.658	13.64	14.04	14.054	14.022
2	34.441	34.434	34.65	34.672	34.563
3	49.692	49.688	49.57	49.629	49.330
4	61.877	61.874	61.63	61.556	61.115
5	71.804	71.802	71.95	71.476	70.794

Т а б л и ц а 2. Собственные частоты колебаний ω (Гц) консольно закрепленной (CF) цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью: $\xi = 0, \varsigma = 0.697$

Table 2. Natural frequencies of vibrations ω (Hz) of a cantilevered (CF) cylindrical shell partially filled with fluid: $\xi = 0, \varsigma = 0.697$

M	j	Maхúch et al., эксп. [32]	Maхúch et al. [32]	Бочкарёв и др. [33]	Ergin et al. [34]	Кашфутдинов и др. [35]	Расчет
1	1	—	1407.4	—	1407.3	1419.6	1399.5
	2	582.0	672.7	664.5	669.8	669.5	668.8
	3	522.0	543.1	538.0	542.0	541.4	539.8
	4	798.0	806.0	799.1	806.8	803.1	799.3
	5	1196.0	1188.4	1178.8	1195.5	1181.9	1172.6
	6	1679.7	—	1657.3	1693.6	1665.4	1648.5
2	3	1394.0	1425.3	1412.2	1434.0	1419.6	1417.7
	4	1244.0	1253.2	1239.2	1261.4	1250.3	1246.5
	5	1546.0	1553.8	1535.7	1557.7	1549.4	1544.4
	6	—	—	2092.0	2119.7	—	2092.7

на свободной поверхности жидкости (плескания). Минимальные расхождения с решением в более простой постановке подтверждает известный факт [22] о малости влияния гравитационных волн на свободной поверхности при осесимметричных колебаниях.

В табл. 3 представлены результаты работы [7], где с помощью метода распространяющихся волн выполнен анализ цилиндрических оболочек, имеющих аналогичные параметры, за исключением длины ($L = 0.41$ м), но полностью погруженных в упругое основание, однородное как в окружном, так и меридиональном направлении ($\xi = 1$). Здесь для шести окружных гармоник приведены низшие частоты ω (Гц), вычисленные как для пустой оболочки, так и оболочки с жидкостью ($\varsigma = 1$) при различных комбинациях коэффициентов постели (K_w, K_p). Из представленных данных следует, что получаемые в рамках разработанного алгоритма результаты идеально согласуются в случае пустых оболочек и имеют незначительные отличия для оболочек с жидкостью, которые снижаются с повышением номера окружной гармоники j .

На рис. 3, а приведены зависимости безразмерных минимальных частот колебаний Ω от безразмерного уровня заполнения оболочки жидкостью ς , полученные для оболочек с различными граничными условиями при отсутствии упругого основания. Представленные результаты демонстрируют известную закономерность — с увеличением уровня заполнения вследствие возрастания присоединенной массы жидкости собственные

Т а б л и ц а 3. Собственные частоты колебаний ω (Гц) свободно опертой (SS) пустой и полностью заполненной жидкостью цилиндрической оболочки, полностью лежащей на упругом основании с разными комбинациями коэффициентов постели (K_w, K_p): $\xi = 1, \varsigma = 1$

Table 3. Natural frequencies ω (Hz) of a simply supported (SS) empty or fluid-filled cylindrical shell completely resting on the elastic foundation at different combinations of foundation moduli (K_w, K_p): $\xi = 1, \varsigma = 1$

j	$(1.5 \cdot 10^7, 0)$				$(0, 1.5 \cdot 10^7)$			
	Shah et al. [7]		Расчет		Shah et al. [7]		Расчет	
	пустая	с жидкостью	пустая	с жидкостью	пустая	с жидкостью	пустая	с жидкостью
8	354.16	145.74	354.16	149.25	6026.2	2456.2	6026.2	2537.2
9	360.25	155.86	360.25	158.63	6737.2	2887.5	6737.2	2962.3
10	384.24	173.65	384.24	175.90	7452.5	3336.9	7452.6	3404.7
11	421.95	198.17	421.95	199.96	8170.9	3802.6	8170.9	3862.4
12	470.61	228.72	470.61	230.05	8891.7	4282.9	8891.8	4333.5
13	528.41	264.85	528.41	265.66	9614.6	4776.6	9614.6	4816.7

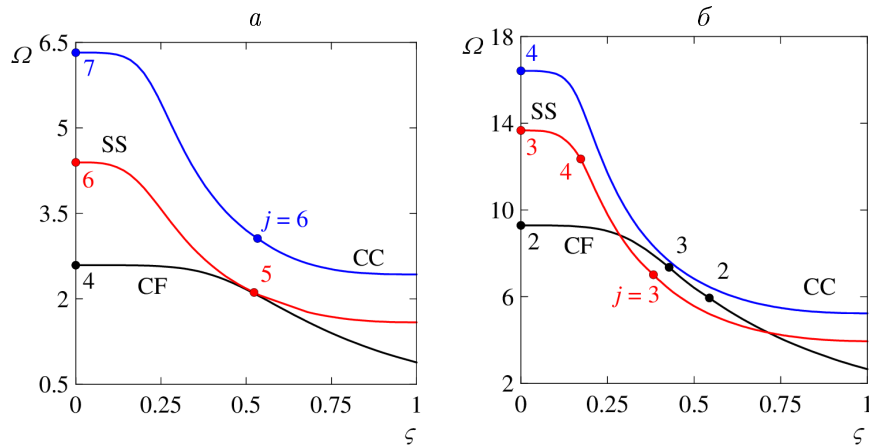


Рис. 3. Зависимости частот колебаний Ω от уровня жидкости ς , полученные для оболочек с различными вариантами граничных условий: a — без учета упругого основания; b — с учетом однородного упругого основания, $k = 0.278, \xi = 1$

Fig. 3. Dependences of vibration frequencies Ω versus the fluid level ς obtained for shells with various boundary conditions: a — without considering the elastic foundation; b — with consideration for homogeneous elastic foundation, $k = 0.278, \xi = 1$

частоты колебаний конструкции снижаются. При этом происходит изменение номера окружной гармоники j , отвечающей минимальной частоте. На графиках символами обозначены места смены формы колебаний с минимальной частотой, а цифрами указано число полуволн в окружном направлении j .

На рис. 3, b представлены аналогичные зависимости, но полученные в случае погружения оболочки в однородное упругое основание с безразмерными коэффициентами постели $k = 0.278$. Наличие упругого основания приводит к значительному росту частот. При этом минимальная частота колебаний смещается в область низших гармоник, а поведение оболочки с жидкостью становится подобным балке. Несмотря на это, снижение частот с ростом уровня жидкости становится более существенным, а следовательно, конструкция с жидкостью, расположенная на упругом основании, в большей степени подвержена изменению частотного спектра.

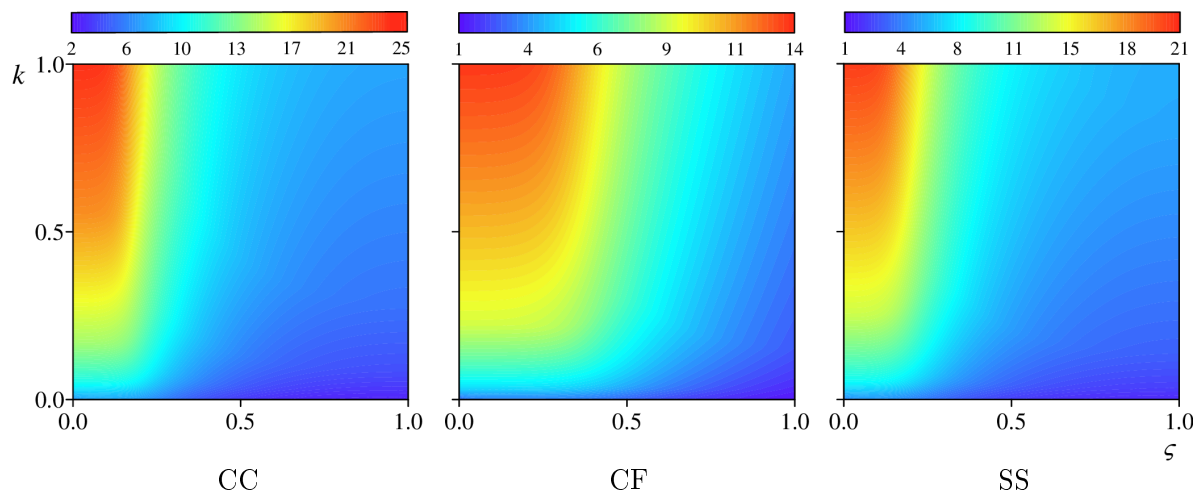


Рис. 4. Изоповерхности минимальной частоты колебаний Ω в зависимости от однородного упругого основания k и уровня жидкости ζ для оболочек с разными граничными условиями
 Fig. 4. Isosurfaces of minimum vibration frequency Ω as a function of homogeneous elastic foundation k and liquid level ζ for shells with different boundary conditions

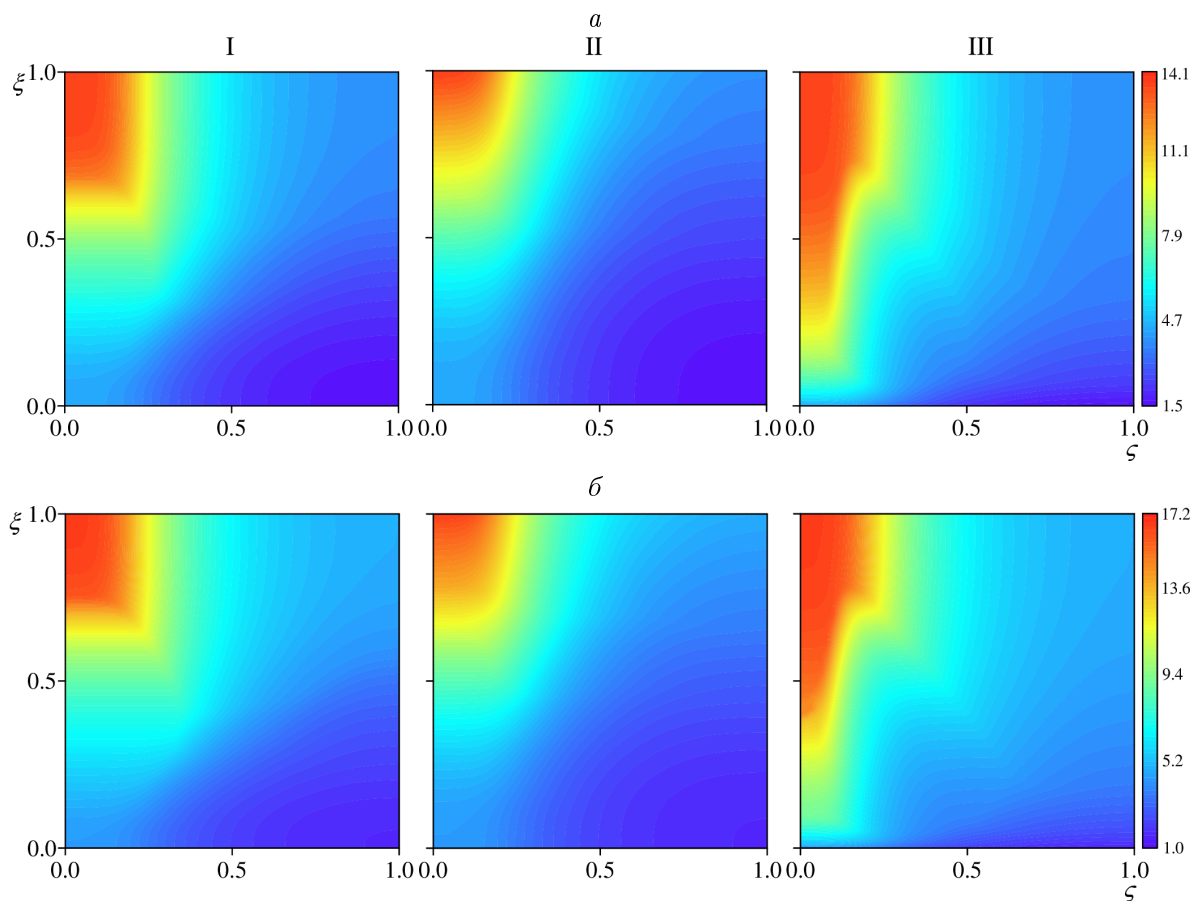


Рис. 5. Изоповерхности минимальной частоты колебаний Ω в зависимости от длины упругого основания ξ и уровня жидкости ζ для свободно опертой (SS) оболочки с разными вариантами неоднородности: $a - k = 0.278$; $б - k = 0.556$
 Fig. 5. Isosurfaces of minimum frequency Ω as a function of elastic foundation length ξ and fluid level ζ for simply supported shells (SS) with different variants of inhomogeneity: $a - k = 0.278$; $б - k = 0.556$

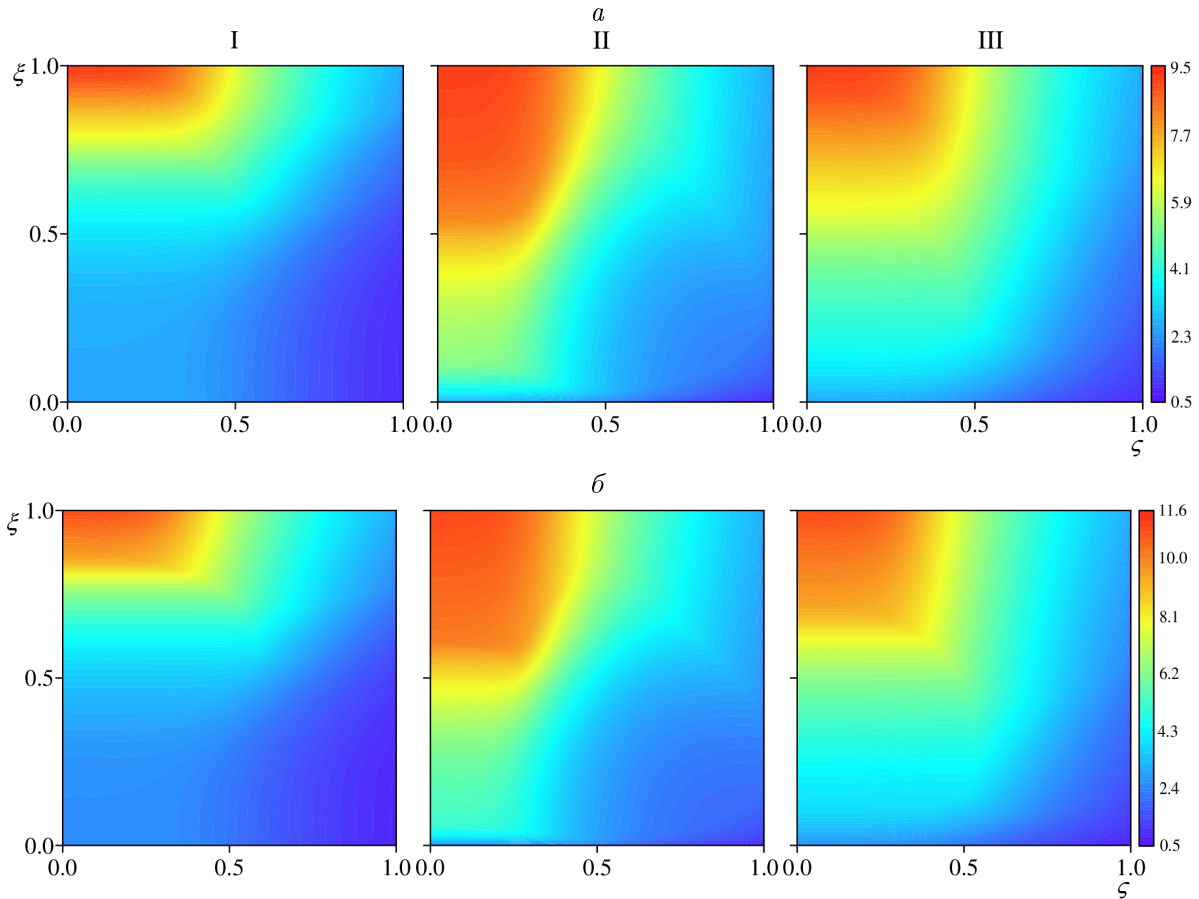


Рис. 6. Изоповерхности минимальной частоты колебаний Ω в зависимости от длины упругого основания ξ и уровня жидкости ζ для консольно закрепленной (CF) оболочки с разными вариантами неоднородности: $a - k = 0.278$; $б - k = 0.556$

Fig. 6. Isosurfaces of minimum vibration frequency Ω as a function of elastic foundation length ξ and fluid level ζ for cantilevered (CF) shell with different variants of heterogeneity: $a - k = 0.278$; $б - k = 0.556$

Наглядно обрисовать зависимость собственных частот колебаний Ω от величины однородного упругого основания k и высоты жидкости ζ в оболочках с разными комбинациями граничных условий дают возможности данные, показанные на рис. 4. Приведенные здесь изоповерхности предоставляют более полную информацию о распределении частотного спектра и в зависимости от требований минимизации или максимизации частоты позволяют подобрать подходящую совокупность параметров. Исходя из качественной близости результатов, получаемых для свободно опертых и жестко закрепленных оболочек, дальнейшие вычисления будут выполнены только для граничных условий, соответствующих свободному опиранию и консольному закреплению.

Оценить влияние неоднородного в меридиональном направлении упругого основания на динамические характеристики оболочек, частично заполненных жидкостью, позволяют результаты, представленные на рис. 5 и 6. Здесь приведены изоповерхности безразмерной минимальной частоты колебаний Ω , полученные при различной длине упругого основания ξ и разных уровнях жидкости ζ в свободно опертой (рис. 5) и консольно закрепленной (рис. 6) оболочках. Расчеты осуществлены для трех вариантов неоднородности упругой среды (см. рис. 2) и коэффициентов постели, равных $k = 0.278$ (рис. 5, a и 6, a) и $k = 0.556$ (рис. 5, $б$ и 6, $б$). Из рисунков видно, что в зависимости

от граничных условий и размера, занимаемого упругим основанием, а также объема жидкости эволюция минимальных частот колебаний к значениям, соответствующим однородному случаю ($\xi = 1$), существенно отличается для каждой из рассмотренных конфигураций. Если для некоторых из них наиболее значительные изменения в частотах происходят лишь тогда, когда уровень заполнения достигает половины длины оболочки, то для других требуется лишь незначительный объем жидкости. При этом рост обоих варьируемых параметров сопровождается интенсивным формоизменением, при котором минимальная частота колебаний, отвечающая различным окружным гармоникам, изменяется в широком интервале. Например, в случае свободно опертых краев окружная мода с минимальной частотой неоднократно чередуется в диапазоне от $j = 3$ до $j = 9$ для третьего варианта неоднородности.

Заключение

Представлены результаты численного исследования собственных частот колебаний вертикальных круговых цилиндрических оболочек, частично заполненных идеальной неподвижной жидкостью. Конструкция полностью окружена двухпараметрической упругой средой Пастернака, которая является неоднородной по длине и представляет собой различные комбинации участков, содержащих упругое основание, и участков, где оно отсутствует. Проанализировано влияние разных вариантов неоднородности на минимальные частоты колебаний оболочек, имеющих разнообразные граничные условия при различных значениях коэффициентов постели и уровнях жидкости. Численными экспериментами установлено, что с повышением уровня заполнения оболочек жидкостью влияние упругого основания на частотный спектр конструкции снижается. Продемонстрировано, что, изменяя местоположение, жесткость и размеры упругого основания, можно подобрать такую окружную форму гидроупругих колебаний конструкции, частично заполненной жидкостью, которая в большей степени будет соответствовать требуемым условиям ее эксплуатации.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания (номер гос. регистрационной темы АААА-А19-119012290100-8).

Список литературы

- [1] Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госстройиздат; 1954: 56.
- [2] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз; 1960: 491.
- [3] Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат; 1973: 627.
- [4] Kerr A.D. Elastic and viscoelastic foundation models. The Journal of Applied Mechanics. 1964; 31(3):491–498. DOI:10.1115/1.3629667.
- [5] Бочкарёв С.А. Собственные колебания цилиндрической оболочки, частично лежащей на упругом основании. Вычислительная механика сплошных сред. 2017; 10(4):406–415. DOI:10.7242/1999-6691/2017.10.4.32.
- [6] Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H. Vibrational study of fluid-filled functionally graded cylindrical shells resting on elastic foundations. ISRN Mechanical Engineering. 2011; (2011):892460. DOI:10.5402/2011/892460.

- [7] **Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H.** Vibration characteristics of fluid-filled cylindrical shells based on elastic foundations. *Acta Mechanica*. 2011; 216(1–4):17–28. DOI:10.1007/s00707-010-0346-1.
- [8] **Shahbazzabar A., Izadi A., Sadeghian M., Kazemi M.** Free vibration analysis of FGM circular cylindrical shells resting on the Pasternak foundation and partially in contact with stationary fluid. *Applied Acoustics*. 2019; (153):87–101. DOI:10.1016/j.apacoust.2019.04.012.
- [9] **Baghlani A., Khayat M., Dehghan S.M.** Free vibration analysis of FGM cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation in thermal environment considering fluid-structure interaction. *Applied Mathematical Modelling*. 2020; (78):550–575. DOI:10.1016/j.apm.2019.10.023.
- [10] **Sheng G.G., Wang X.** Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2008; 27(6):1075–1087. DOI:10.1016/j.euromechsol.2008.02.003.
- [11] **Mohammadi K., Barouti M.M., Safarpour H., Ghadiri M.** Effect of distributed axial loading on dynamic stability and buckling analysis of a viscoelastic DWCNT conveying viscous fluid flow. *The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2019; (41):93. DOI:10.1007/s40430-019-1591-4.
- [12] **Sokolov V., Razov I., Dmitriev A.** Influence of the length parameter of an underground oil pipeline on the frequency of free oscillation. *E3S Web of Conferences*. 2020; (164):03024. DOI:10.1051/e3sconf/202016403024.
- [13] **Amabili M., Garziera R.** Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part I: Empty and fluid-filled shells. *Journal of Fluids and Structures*. 2000; 14(5):669–690. DOI:10.1006/jffs.2000.0288.
- [14] **Tj H.G., Mikami T., Kanie S., Sato M.** Free vibrations of fluid-filled cylindrical shells on elastic foundations. *Thin-Walled Structures*. 2005; 43(11):1746–1762. DOI:10.1016/j.tws.2005.07.005.
- [15] **Kim Y.** Effect of partial elastic foundation on free vibration of fluid-filled functionally graded cylindrical shells. *Acta Mechanica Sinica*. 2015; (31):920–930. DOI:10.1007/s10409-015-0442-5.
- [16] **Park K.J., Kim Y.W.** Vibration characteristics of fluid-conveying FGM cylindrical shells resting on Pasternak elastic foundation with an oblique edge. *Thin-Walled Structures*. 2016; (106):407–419. DOI:10.1016/j.tws.2016.05.011.
- [17] **Lakis A.A., Sinno M.** Free vibration of axisymmetric and beam-like cylindrical shells, partially filled with liquid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1992; (33):235–268. DOI:10.1002/nme.1620330203.
- [18] **Годунов С.К.** Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. I: Краевые задачи. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ; 1994: 264.
- [19] **Юдин А.С., Сафроненко В.Г.** Виброакустика структурно-неоднородных оболочек. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ; 2013: 424.
- [20] **Païdoussis M.P.** Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1. 2nd ed. London: Academic Press; 2014: 888.
- [21] **Païdoussis M.P.** Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 2. 2nd ed. London: Academic Press; 2016: 942.
- [22] **Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н.** Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит; 2000: 591.
- [23] **Шмаков В.П.** Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2011: 287.

- [24] Юдин А.С., Амбалова Н.М. Вынужденные колебания коаксиальных подкрепленных цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостью. Прикладная механика. 1989; 25(12):63–68.
- [25] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение; 1975: 376.
- [26] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматлит; 1962: 620.
- [27] Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Е.З. Численные методы анализа. М.: Наука; 1967: 368.
- [28] Bochkarev S.A. Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2022; 22(6):2250071. DOI:10.1142/S0219455422500717.
- [29] Khalifa M.A. Natural frequencies and mode shapes of variable thickness elastic cylindrical shells resting on a Pasternak foundation. Journal of Vibration and Control. 2016; 22(1):37–50. DOI:10.1177/1077546314528229.
- [30] Amabili M., Païdoussis M.P., Lakis A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. Journal of Sound and Vibration. 1998; 213(2):259–299. DOI:10.1006/jsvi.1997.1481.
- [31] Kim Y.-W., Lee Y.-S., Ko S.-H. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. Journal of Sound and Vibration. 2004; 276(3–5):869–897. DOI:10.1016/j.jsv.2003.08.008.
- [32] Mařuch T., Horacek J., Trnka J., Vesely J. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement. Journal of Sound and Vibration. 1996; 193(3):669–690. DOI:10.1006/jsvi.1996.0307.
- [33] Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Численное моделирование пространственных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. Вычислительные технологии. 2013; 18(2):12–24.
- [34] Ergin A., Uğurlu B. Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method. Journal of Sound and Vibration. 2004; 275:489–513. DOI:10.1016/j.jsv.2003.07.034.
- [35] Кашфутдинов Б.Д., Щеглов Г.А. Валидация свободного программного обеспечения Code_Aster применительно к задаче модального анализа цилиндрической оболочки с жидкостью. Наука и Образование: Научное издание. 2017; (6):101–117. DOI:10.7463/0517.0001170.

Numerical simulation of natural vibrations of a cylindrical shell partially filled with fluid and embedded in an elastic foundation

BOCHKAREV SERGEY A.

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, 614068, Perm, Russia

Corresponding author: Bochkarev Sergey A., e-mail: bochkarev@icmm.ru

Received December 29, 2021, revised June 10, 2022, accepted June 25, 2022.

Abstract

The paper presents the results of studies on natural vibrations of circular vertical cylindrical shells completely or partially filled with a stationary compressible fluid and embedded in a Pasternak two-parameter elastic foundation. In the meridional direction, the elastic medium is both homogeneous and inhomogeneous, and is an alternation of areas, in which this medium is present or absent. The behavior of the elastic structure and compressible fluid is described within the framework of classical shell theory based on the Kirchhoff—Love hypotheses and the Euler equations. The equations of motion of the shell combined with the corresponding geometric and physical relations are reduced to a system of ordinary differential equations for new unknowns. The acoustic wave equation is also reduced to a system of ordinary differential equations using the straight line method. The formulated boundary value problem is solved by the Godunov orthogonal sweep method involving the numerical integration of differential equations by the fourth order Runge—Kutta method. The natural frequencies of vibrations are calculated using a combination of stepwise procedure and subsequent refinement by the half-division method. The validity of the obtained results is confirmed by comparing them with the known numerical-analytical solutions. The dependences of minimum vibration frequencies versus the level of fluid are analyzed for simply supported, clamped and cantilevered cylindrical shells of various types of inhomogeneity along the length of the body and with different stiffness. It is demonstrated that with increase in the level of filling of shells with fluid, the influence of the elastic foundation on the frequency spectrum of the structure decreases.

Keywords: classical shell theory, compressible fluid, Godunov orthogonal sweep method, method of lines, natural vibrations, elastic Pasternak's medium.

Citation: Bochkarev S.A. Numerical simulation of natural vibrations of a cylindrical shell partially filled with fluid and embedded in an elastic foundation. Computational Technologies. 2022; 27(4):15–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.003. (In Russ.)

Acknowledgements. The results were obtained within the framework of state task (state registration number of the topic AAAA-A19-119012290100-8).

References

1. **Pasternak P.L.** On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants [Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvuh koefitsientov posteli]. Moscow: Gosstroyizdat; 1954: 56. (In Russ.)
2. **Vlasov V.Z., Leont'ev N.N.** Beams, plates, shells on elastic foundation [Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii]. Moscow: Fizmatgiz; 1960: 491. (In Russ.)
3. **Gorbunov-Posadov M.I., Malikova T.A.** Calculation of structures on elastic foundation [Raschet konstruktsiy na uprugom osnovanii]. Moscow: Stroyizdat; 1973: 627. (In Russ.)
4. **Kerr A.D.** Elastic and viscoelastic foundation models. The Journal of Applied Mechanics. 1964; 31(3):491–498. DOI:10.1115/1.3629667.
5. **Bochkarev S.A.** Free vibrations of a cylindrical shell partially resting on elastic foundation. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018; 59(7):1242–1250. DOI:10.1134/S0021894418070039.
6. **Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H.** Vibrational study of fluid-filled functionally graded cylindrical shells resting on elastic foundations. ISRN Mechanical Engineering. 2011; (2011):892460. DOI:10.5402/2011/892460.
7. **Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H.** Vibration characteristics of fluid-filled cylindrical shells based on elastic foundations. Acta Mechanica. 2011; 216(1–4):17–28. DOI:10.1007/s00707-010-0346-1.
8. **Shahbazzabar A., Izadi A., Sadeghian M., Kazemi M.** Free vibration analysis of FGM circular cylindrical shells resting on the Pasternak foundation and partially in contact with stationary fluid. Applied Acoustics. 2019; (153):87–101. DOI:10.1016/j.apacoust.2019.04.012.
9. **Baghlani A., Khayat M., Dehghan S.M.** Free vibration analysis of FGM cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation in thermal environment considering fluid-structure interaction. Applied Mathematical Modelling. 2020; (78):550–575. DOI:10.1016/j.apm.2019.10.023.

10. **Sheng G.G., Wang X.** Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2008; 27(6):1075–1087. DOI:10.1016/j.euromechsol.2008.02.003.
11. **Mohammadi K., Barouti M.M., Safarpour H., Ghadiri M.** Effect of distributed axial loading on dynamic stability and buckling analysis of a viscoelastic DWCNT conveying viscous fluid flow. *The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2019; (41):93. DOI:10.1007/s40430-019-1591-4.
12. **Sokolov V., Razov I., Dmitriev A.** Influence of the length parameter of an underground oil pipeline on the frequency of free oscillation. *E3S Web of Conferences*. 2020; (164):03024. DOI:10.1051/e3sconf/202016403024.
13. **Amabili M., Garziera R.** Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part I: Empty and fluid-filled shells. *Journal of Fluids and Structures*. 2000; 14(5):669–690. DOI:10.1006/jfls.2000.0288.
14. **Tj H.G., Mikami T., Kanie S., Sato M.** Free vibrations of fluid-filled cylindrical shells on elastic foundations. *Thin-Walled Structures*. 2005; 43(11):1746–1762. DOI:10.1016/j.tws.2005.07.005.
15. **Kim Y.** Effect of partial elastic foundation on free vibration of fluid-filled functionally graded cylindrical shells. *Acta Mechanica Sinica*. 2015; (31):920–930. DOI:10.1007/s10409-015-0442-5.
16. **Park K.J., Kim Y.W.** Vibration characteristics of fluid-conveying FGM cylindrical shells resting on Pasternak elastic foundation with an oblique edge. *Thin-Walled Structures*. 2016; (106):407–419. DOI:10.1016/j.tws.2016.05.011.
17. **Lakis A.A., Sinno M.** Free vibration of axisymmetric and beam-like cylindrical shells, partially filled with liquid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1992; (33):235–268. DOI:10.1002/nme.1620330203.
18. **Godunov S.K.** Ordinary differential equations with constant coefficients. Providence: AMS; 1997: 283.
19. **Yudin A.S., Safronenko V.G.** Vibroakustika strukturno-neodnorodnykh obolochek [Vibroacoustics of structurally inhomogeneous shells]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU; 2013: 424. (In Russ.)
20. **Païdoussis M.P.** Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1. 2nd ed. London: Academic Press; 2014: 888.
21. **Païdoussis M.P.** Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 2. 2nd ed. London: Academic Press; 2016: 942.
22. **Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev V.I., Shklyarchuk F.N.** Aerogidrouprugost' konstruksiy [Aeroelasticity of structures]. Moscow: Fizmatlit; 2000: 591. (In Russ.)
23. **Shmakov V.P.** Izbrannye trudy po gidrouprugosti i dinamike uprugikh konstruksiy [Selected works on hydroelasticity and the dynamics of elastic structures]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman; 2011: 287. (In Russ.)
24. **Yudin A.S., Ambalova N.M.** Forced vibrations of coaxial reinforced cylindrical shells during interaction with a fluid. *International Applied Mechanics*. 1989; 25(12):1222–1227. DOI:10.1007/BF00887148.
25. **Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N.** Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksiy [The statics and dynamics of thin-walled shell structures]. Moscow: Mashinostroyeniye; 1975: 376. (In Russ.)
26. **Berezin I.S., Zhidkov N.P.** Computing methods. Vol. 2. N.Y.: Pergamon Press; 1965: 680.
27. **Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z.** Chislennyye metody analiza [Numerical methods of analysis. Approximation of functions, differential and integral equations]. Moscow: Nauka; 1967: 368. (In Russ.)
28. **Bochkarev S.A.** Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022; 22(6):2250071. DOI:10.1142/S0219455422500717.
29. **Khalifa M.A.** Natural frequencies and mode shapes of variable thickness elastic cylindrical shells resting on a Pasternak foundation. *Journal of Vibration and Control*. 2016; 22(1):37–50. DOI:10.1177/1077546314528229.
30. **Amabili M., Païdoussis M.P., Lakis A.A.** Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. *Journal of Sound and Vibration*. 1998; 213(2):259–299. DOI:10.1006/jsvi.1997.1481.
31. **Kim Y.-W., Lee Y.-S., Ko S.-H.** Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*. 2004; 276(3–5):869–897. DOI:10.1016/j.jsv.2003.08.008.

32. **Maxúch T., Horacek J., Trnka J., Vesely J.** Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement. *Journal of Sound and Vibration*. 1996; 193(3):669–690. DOI:10.1006/jsvi.1996.0307.
33. **Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P.** Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells, partially filled with fluid. *Computational Technologies*. 2013; 18(2):12–24. (In Russ.)
34. **Ergin A., Uğurlu B.** Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method. *Journal of Sound and Vibration*. 2004; 275:489–513. DOI:10.1016/j.jsv.2003.07.034.
35. **Kashfutdinov B.D., Shcheglov G.A.** Validation of the open source Code_Aster software used in the modal analysis of the fluid-filled cylindrical shell. *Science and Education of the Bauman MSTU*. 2017; (6):101–117. DOI:10.7463/0617.0001170. (In Russ.)