

Полулагранжевы аппроксимации оператора конвекции в симметричной форме

В. В. ШАЙДУРОВ^{1,*}, О. М. ЧЕРЕДНИЧЕНКО²

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Россия

²Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, Россия

*Контактный автор: Шайдуров Владимир Викторович, e-mail: shaidurov04@mail.ru

Поступила 05 апреля 2023 г., доработана 20 апреля 2023 г., принята в печать 27 апреля 2023 г.

Рассмотрены два полулагранжевых численных метода для одномерного (по пространству) уравнения переноса с оператором в симметричной форме: эйлерово-лагранжев и лагранжево-эйлеров. Оба метода монотонны и свободны от ограничения Куранта на соотношение шагов по времени и пространству. При этом во втором методе достигнут второй порядок аппроксимации для гладких решений и продемонстрировано отсутствие численной вязкости для разрывных решений.

Ключевые слова: оператор конвекции, симметричная форма, полулагранжевы аппроксимации, устойчивость, сходимость.

Цитирование: Шайдуров В.В., Чередниченко О.М. Полулагранжевы аппроксимации оператора конвекции в симметричной форме. Вычислительные технологии. 2023; 28(3):101–116. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.007.

Введение

Рассмотрим полулагранжевы численные методы для одномерного (по пространству) уравнения переноса с оператором в симметричной форме [1]. Для уравнений с оператором в дивергентной форме и с оператором материальной производной имеются сотни работ по разнообразным численным методам (см. [2] и литературу в ней). Для уравнений с оператором в симметричной форме таких работ практически не встречается. Вместе с тем эта форма оператора переноса описывает закон локального интегрального сохранения квадрата решения. Это свойство оказывается полезным для (локального) контроля кинетической энергии, когда решением является скорость, как и в уравнениях Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. В работе использована аналогия с уравнением неразрывности, описывающим закон сохранения массы.

Что касается полулагранжевых методов, то нами рассмотрены два разных приема. Эйлерово-лагранжев метод опирается на фиксированные (здесь равномерные) сетки по времени $t_k = \tau k$ с шагом τ и по пространству $x_i = ih$ с шагом h . А для лагранжево-эйлерова метода разностная сетка строится путем пересечения характеристических кривых (вычисленных приближенно) с прямыми $t = t_k$, порождая неравномерные разностные сетки по пространству на каждом слое по времени.

Оба метода монотонны и свободны от ограничения Куранта на соотношение шагов по времени и пространству. Но лагранжево-эйлеров метод обладает двумя дополнительными полезными свойствами. Во-первых, у него отсутствует численная вязкость по

пространству, что вытекает из исследования полученной разностной схемы путем первого дифференциального приближения [3]. В результате разностная схема применима к задачам с разрывными решениями без разглаживания разрывов. Во-вторых, достигается второй порядок аппроксимации по времени и пространству. На первый взгляд это приходит в противоречие с известным результатом С.К. Годунова [4] о недостижимости порядка аппроксимации выше первого для линейных монотонных разностных схем. Но предварительная подготовка разностных сеток с учетом коэффициента уравнения, по видимому, выводит построенную разностную схему из класса линейных схем, хотя построенная лагранжево-эйлерова схема алгоритмически выглядит вполне линейной. Оба свойства подтверждены численными примерами.

1. Постановка дифференциальной задачи

Рассмотрим аппроксимацию уравнения с оператором в симметричной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (au)}{\partial x} \right) = f(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \quad (1)$$

с коэффициентом $a(t, x)$, представляющим скорость потока субстанции с плотностью $u(t, x)$. Для упрощения изложения предположим непрерывность $a(t, x)$ ее первых и вторых производных на $[0, T] \times [0, 1]$, а также условие непротекания

$$a(t, x) = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = 1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2)$$

Совместно с начальным условием

$$u(t, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, 1] \quad (3)$$

условие (2) обеспечивает однозначную разрешимость задачи (1), (3) [5].

2. Эйлерово-лагранжева аппроксимация

Умножим уравнение (1) на $2u(t, x)$ и проведем некоторые преобразования. В итоге получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (av)}{\partial x} = g \quad (4)$$

с функцией $v = u^2$ и правой частью $g = 2uf$. Дополним его начальным условием

$$v(t, x) = u_0^2(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

и получим задачу с хорошо изученным оператором в дивергентной форме [1, 6].

Приближенное решение задачи на каждом временном слое t_k будем искать, как и в работе [5], в виде кусочно-постоянной функции $u^h(t, x)$, постоянной на каждом отрезке $w_0 = [0, x_{1/2})$, $w_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \quad \forall i = 1, \dots, N-1$, $w_N = [x_{N-1/2}, 1]$. Таким образом, на каждом временном шаге функция $u^h(t_k, x)$ полностью определяется своими дискретными значениями $u_{k,i}^h \equiv u^h(t_k, x_i)$, $i = 0, \dots, N$, на сетке $\bar{w}_x = \{x_i = ih; i = 0, \dots, N\}$ с целыми узлами. Введем также сетку $\hat{w}_x = \{x_{i+1/2} = (i+1/2)h; i = 0, \dots, N-1\}$ с промежуточными узлами.

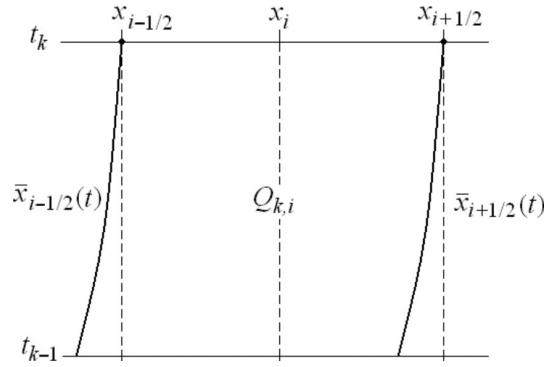


Рис. 1. Криволинейная трапеция $Q_{k,i}$, соответствующая узлу (t_k, x_i)

Fig. 1. Curvilinear trapezoid $Q_{k,i}$ corresponding to node (t_k, x_i)

В целях упрощения геометрических иллюстраций используем ограничение на временной шаг

$$\tau \max_{[0,T] \times [0,1]} |a| \leq h/2. \tag{5}$$

Из каждого узла $(t_k, x_{i+1/2})$ сетки $\omega_t \times \hat{\omega}_x$ на k -м слое по времени опустим криволинейную характеристику $\bar{x}_{i+1/2}(t)$ на предыдущий временной слой t_{k-1} . Таким образом, каждому внутреннему узлу $x_i \in \bar{\omega}_x$ соответствует криволинейная трапеция $Q_{k,i}$, ограниченная сверху отрезком $\{t_k\} \times w_i$, сбоку кривыми $\bar{x}_{i-1/2}(t)$ и $\bar{x}_{i+1/2}(t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и снизу отрезком $\{t_{k-1}\} \times [\bar{x}_{i-1/2}(t_{k-1}), \bar{x}_{i+1/2}(t_{k-1})]$ (рис. 1).

Проинтегрируем уравнение (4) по области $Q_{k,i}$ и применим формулу Гаусса – Остроградского:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(t_k, x) dx - \int_{\bar{x}_{i-1/2}(t_{k-1})}^{\bar{x}_{i+1/2}(t_{k-1})} v(t_{k-1}, x) dx = \int_{Q_{k,i}} g(t, x) dt dx.$$

Левая часть аппроксимируется довольно просто с учетом кусочно-постоянной структуры приближенного решения. В правой части сначала возьмем квадратурную формулу прямоугольника по времени с узлом t_k , а затем квадратурную формулу центрального прямоугольника по x . В итоге получаем разностное уравнение

$$hv_{k,i}^h = \int_{\bar{x}_{i-1/2}(t_{k-1})}^{\bar{x}_{i+1/2}(t_{k-1})} v^h(t_{k-1}, x) dx + \tau hg_{k,i}. \tag{6}$$

Теоретически точки $\bar{x}_{i\pm 1/2}(t_{k-1})$ находятся из точного решения характеристического уравнения. Но по аналогии с работой [5] для достижения первого порядка аппроксимации возьмем их приближенные значения в виде результата одного шага явного метода Эйлера обратно по времени:

$$x_{i\pm 1/2}^* = x_{i\pm 1/2} - \tau a(t_{k-1}, x_{i\pm 1/2}).$$

В результате после этой замены уравнение (6) примет вид

$$hv_{k,i}^h - (\alpha_{k-1,i} v_{k-1,i-1}^h + \beta_{k-1,i} v_{k-1,i}^h + \gamma_{k-1,i} v_{k-1,i+1}^h) = \tau hg_{k,i}, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{k-1,i} &= \text{meas}(w_{i-1} \cap [x_{i-1/2}^*, x_{i+1/2}^*]) \geq 0, & \beta_{k-1,i} &= \text{meas}(w_i \cap [x_{i-1/2}^*, x_{i+1/2}^*]) \geq 0, \\ \gamma_{k-1,i} &= \text{meas}(w_{i+1} \cap [x_{i-1/2}^*, x_{i+1/2}^*]) \geq 0, & k &= 1, \dots, M \text{ и } i = 1, \dots, N-1.\end{aligned}$$

Отметим, что уравнения (7) для узлов x_0^* и x_N^* ввиду вдвое меньшего шага имеют другие коэффициенты:

$$\begin{aligned}hv_{k,0}^h/2 - (\beta_{k-1,0}v_{k-1,0}^h + \gamma_{k-1,0}v_{k-1,1}^h) &= \tau hg_{k,0}/2, \\ hv_{k,N}^h/2 - (\alpha_{k-1,N}v_{k-1,N-1}^h + \beta_{k-1,N}v_{k-1,N}^h) &= \tau hg_{k,N}/2,\end{aligned}\tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}\beta_{k-1,0} &= \text{meas}(w_0 \cap [0, x_{1/2}^*]) \geq 0, & \gamma_{k-1,0} &= \text{meas}(w_1 \cap [0, x_{1/2}^*]) \geq 0, \\ \alpha_{k-1,N} &= \text{meas}(w_{N-1} \cap [x_{N-1/2}^*, 1]) \geq 0, & \beta_{k-1,N} &= \text{meas}(w_N \cap [x_{N-1/2}^*, 1]) \geq 0.\end{aligned}$$

Для соответствия обозначениям уравнения (7) положим

$$\alpha_{k-1,0} = \alpha_{k-1,N+1} = 0, \quad \gamma_{k-1,N} = \gamma_{k-1,-1} = 0.$$

Любой отрезок w_i , $i = 0, \dots, N$, на слое $t = t_{k-1}$ полностью исчерпывается коэффициентами уравнений (7), (8). Это влечет важное равенство

$$\alpha_{k-1,i+1} + \beta_{k-1,i} + \gamma_{k-1,i-1} = \text{meas}(w_i), \quad i = 0, \dots, N.\tag{9}$$

С учетом принятых обозначений уравнения (7), (8) можно записать в единой форме

$$\text{meas}(w_i)v_{k,i}^h - (\alpha_{k-1,i}v_{k-1,i-1}^h + \beta_{k-1,i}v_{k-1,i}^h + \gamma_{k-1,i}v_{k-1,i+1}^h) = \tau \text{meas}(w_i)g_{k,i}, \quad i = 0, \dots, N.\tag{10}$$

Эти уравнения позволяют найти сеточную функцию $v_{k,i}^h \equiv v^h(t_k, x_i)$ последовательно для всех $k = 1, \dots, M$ при условии какой-либо аппроксимации значений $u_{k,i}$ в правой части $g_{k,i} = 2u_{k,i}f_{k,i}$. Первое, что приходит в голову

$$u_{k,i} \approx u_{k,i}^h = \sqrt{v_{k,i}^h}.$$

Отметим, что в этой формуле возникает первая альтернатива с выбором знака у квадратного корня. В результате получаются два квадратных уравнения относительно $u_{k,i}^h$, что приводит к выбору из четырех возможных корней. Другая возможность состоит в том, чтобы взять приближенное значение, отбросив в (10) правую часть порядка $O(\tau h)$:

$$u_{k,i} \approx \tilde{u}_{k-1,i}^h = \sqrt{\frac{\alpha_{k-1,i}v_{k-1,i-1}^h + \beta_{k-1,i}v_{k-1,i}^h + \gamma_{k-1,i}v_{k-1,i+1}^h}{\text{meas}(w_i)}}.$$

Эта ситуация тоже неявно содержит выбор из четырех возможностей, поскольку помимо корня в этом выражении потом придется выбирать из двух значений для вычисления $u_{k,i}^h = \sqrt{v_{k,i}^h}$. Возьмем полусумму двух упомянутых значений, получая разностные уравнения непосредственно для $u_{k,i}^h$. Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\tilde{u}_{k-1,i}^h = \sqrt{\frac{\alpha_{k-1,i}(u_{k-1,i-1}^h)^2 + \beta_{k-1,i}(u_{k-1,i}^h)^2 + \gamma_{k-1,i}(u_{k-1,i+1}^h)^2}{\text{meas}(w_i)}}, \quad i = 0, \dots, N.$$

Для аппроксимации в правой части $g_{k,i} = 2u_{k,i}f_{k,i}$ в (10) используем замену

$$u_{k,i} \approx \frac{u_{k,i}^h + \tilde{u}_{k-1,i}^h}{2}.$$

С ее учетом разделим обе части уравнения (10) на $\tau \text{meas}(w_i) (u_{k,i}^h + \tilde{u}_{k-1,i}^h)$. В итоге получим явные уравнения для $u_{k,i}^h$:

$$\frac{1}{\tau} (u_{k,i}^h - \tilde{u}_{k-1,i}^h) = f_{k,i} \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (11)$$

Добавив к ним начальные условия

$$u_{0,i}^h = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad (12)$$

получим явную разностную схему по определению сеточной функции $u^h(t_k, x_i)$ на сетке $\omega_t \times \bar{\omega}_x$.

Свойства коэффициентов (9) обеспечивают “сильную монотонность”: неотрицательность приближенного решения $u^h(t_k, x_i)$ на сетке $\omega_t \times \bar{\omega}_x$ при неотрицательном начальном условии $u_{0,i}^h$ и неотрицательной правой части $f_{k,i} \geq 0$, в сущности, позволяя реализовать численное решение без риска получить отрицательное число под знаком квадратного корня. Эти же свойства обеспечивают пошаговую устойчивость в норме

$$\|u^h\|_{2, \bar{\omega}_x} = \sqrt{\sum_{i=0}^N (u_i^h)^2 \text{meas}(w_i)} = \sqrt{(u_0^h)^2 h/2 + \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^h)^2 h + (u_N^h)^2 h/2},$$

определяемой для сеточной функции $u^h(x)$ на сетке $\bar{\omega}_x$. Эта норма порождается скалярным произведением

$$(u^h, z^h)_{\bar{\omega}_x} = \sum_{i=0}^N u_i^h z_i^h \text{meas}(w_i) = u_0^h z_0^h h/2 + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^h z_i^h h + u_N^h z_N^h h/2.$$

Докажем эти утверждения.

Лемма 2.1. *При выполнении (5), а также условий*

$$u_{0,i}^h \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, N \quad \text{и} \quad f_{k,i} \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N$$

решение разностной схемы (11), (12) с учетом положительного квадратного корня является неотрицательным:

$$u_{k,i}^h \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (13)$$

Более того, при нулевой правой части $f_{k,i} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N$ выполняется закон сохранения

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} = \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}. \quad (14)$$

Доказательство. Учитывая неотрицательность $u_{0,i}^h \geq 0$ на начальном слое по времени, применим метод математической индукции для $k = 1, \dots, M$. Для этого предположим выполнение (13) на слое $k - 1$. Тогда неотрицательность $u_{k,i}^h$ следует из (11) с учетом неотрицательных значений $\alpha_{k-1,i}, \beta_{k-1,i}, \gamma_{k-1,i}, f_{k,i}$.

Для доказательства второго утверждения уравнение (11) с нулевой правой частью умножим на τ , перенесем $\tilde{u}_{k-1,i}^h$ в правую часть и возведем обе части в квадрат. В итоге приходим к равенствам

$$(u_{k,i}^h)^2 = \frac{\alpha_{k-1,i}(u_{k-1,i-1}^h)^2 + \beta_{k-1,i}(u_{k-1,i}^h)^2 + \gamma_{k-1,i}(u_{k-1,i+1}^h)^2}{\text{meas}(w_i)}.$$

Суммируя их с весами $\text{meas}(w_i)$, получаем

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}^2 = \sum_{i=0}^N (\alpha_{k-1,i} v_{k-1,i-1}^h + \beta_{k-1,i} v_{k-1,i}^h + \gamma_{k-1,i} v_{k-1,i+1}^h).$$

Используя свойство коэффициентов (9), приходим к равенству

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}^2 = \sum_{i=0}^N v_{k-1,i}^h \text{meas}(w_i),$$

из которого следует (14). \square

Лемма 2.2. *Для решения явной разностной схемы (11), (12) при выполнении условия (5) справедлива оценка устойчивости*

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \leq \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} + \tau \|f(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (15)$$

Доказательство. Умножим (11) на $\tau (u_{k,i}^h + \tilde{u}_{k-1,i}^h)$:

$$(u_{k,i}^h)^2 - (\tilde{u}_{k-1,i}^h)^2 = \tau (u_{k,i}^h + \tilde{u}_{k-1,i}^h) f_{k,i}.$$

Проведем суммирование этих равенств по всем $i = 0, \dots, N$ с весами $\text{meas}(w_i)$:

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}^2 - \|\tilde{u}^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}^2 = \tau (u^h(t_k, \cdot), f(t_k, \cdot))_{\bar{\omega}_x} + \tau (\tilde{u}^h(t_{k-1}, \cdot), f(t_k, \cdot))_{\bar{\omega}_x}. \quad (16)$$

Теперь используем неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} (u^h(t_k, \cdot), f(t_k, \cdot))_{\bar{\omega}_x} &\leq \|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \|f(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}, \\ (\tilde{u}^h(t_{k-1}, \cdot), f(t_k, \cdot))_{\bar{\omega}_x} &\leq \|\tilde{u}^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \|f(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}. \end{aligned}$$

Применим их к правой части (16) и проведем сокращение на сумму $\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} + \|\tilde{u}^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}$. В итоге приходим к неравенству

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} - \|\tilde{u}^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \leq \tau \|f(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}.$$

Используя свойство коэффициентов (9) для перехода от $\|\tilde{u}^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}^2$ к $\|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x}^2$ (как в предыдущей лемме), получаем неравенство (15). \square

Для доказательства сходимости привлечем запись разностной схемы в виде (11). Подставляя в нее точное решение $u_{k,i}$, получаем равенства

$$\frac{1}{\tau} (u_{k,i} - \tilde{u}_{k-1,i}) = f_{k,i} + \varepsilon_{k,i} \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N$$

с погрешностью аппроксимации $\varepsilon_{k,i}^h$. Путем разложения в ряд Тейлора в точке (t_{k-1}, x_i) получаем равенство

$$\frac{u_{k,i} - \tilde{u}_{k-1,i}}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial (au)}{\partial x} \right)_{k,i} + O(\tau + h).$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\varepsilon_{k,i}^h| \leq (\hat{A}_1 \tau + \hat{c}_2 h)$$

с некоторыми константами, не зависящими от τ, h равномерно на разностной сетке $\omega_t \times \bar{\omega}_x$ при достаточной гладкости данных задачи (1), (3). С учетом этой оценки погрешности аппроксимации получаем сходимость того же порядка.

Теорема 2.1. *При выполнении условия (5) для достаточно гладких данных задачи (1), (3) имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (11), (12):*

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \leq \tau k (\hat{A}_1 \tau + \hat{c}_2 h) \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (17)$$

откуда

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \leq T (\hat{A}_1 \tau + \hat{c}_2 h). \quad (18)$$

Доказательство. Для доказательства (17) воспользуемся принципом математической индукции. На начальном слое ввиду условия (12) оценка (17) выполняется с нулевой правой частью. Пусть теперь она выполнена для некоторого $k-1$. Докажем ее для $k \geq 1$. На основании леммы 2.2 имеем оценку

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \leq \|u(t_{k-1}, \cdot) - u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} + \tau \|\varepsilon(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \quad \forall k = 1, \dots, M.$$

Используем ее с предположением (17) на слое $k-1$:

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x} \leq (k-1)\tau(\hat{A}_1 \tau + \hat{c}_2 h) + \tau(\hat{A}_1 \tau + \hat{c}_2 h) = \tau k (\hat{A}_1 \tau + \hat{c}_2 h).$$

В итоге (17) справедлива на слое k .

Для доказательства оценки (18) возьмем максимум от обеих частей (17). □

3. Лагранжево-эйлерова аппроксимация

Рассмотрим лагранжево-эйлеров подход. Из каждой точки $(0, x_i)$, $x_i \in \bar{\omega}_x$ и $(0, x_{i+1/2})$, $x_{i+1/2} \in \hat{\omega}_x$ нижнего слоя $t = 0$ построим характеристические кривые $(t, \bar{x}_i(t))$ и $(t, \bar{x}_{i+1/2}(t))$ с начальными условиями соответственно $\bar{x}_i(0) = x_i$ и $\bar{x}_{i+1/2}(0) = x_{i+1/2}$. В результате пересечения этих характеристических кривых с прямыми $t = t_k$, $0 \leq k \leq M$, на каждом слое по времени получают две неравномерные сетки по пространству: $\bar{\omega}_x^k = \{\bar{x}_{k,i}, i = 0, \dots, N\}$ и $\hat{\omega}_x^k = \{\bar{x}_{k,i+1/2}, i = 0, \dots, N-1\}$.

Приближенное решение задачи на каждом временном слое t_k будем искать в виде кусочно-постоянной функции $u^h(t, x)$, постоянной на каждом отрезке $w_0^k = [0, \bar{x}_{k,1/2})$, $w_i^k = [\bar{x}_{k,i-1/2}, \bar{x}_{k,i+1/2}) \forall i = 1, \dots, N-1$, $w_N^k = [\bar{x}_{k,N-1/2}, 1]$. Положим $h_{k,i} = \text{meas}(w_i^k) \forall i = 0, \dots, N$. Таким образом, на каждом временном шаге функция $u^h(t_k, x)$ полностью определяется своими дискретными значениями $u_{k,i}^h \equiv u^h(t_k, \bar{x}_{k,i})$, $i = 0, \dots, N$.

Из каждого узла $(t_k, \bar{x}_{k,i+1/2})$ сетки $\omega_t \times \hat{\omega}_x^k$ на k -м слое по времени выходит криволинейная характеристика $\bar{x}_{i+1/2}(t)$ на предыдущий временной слой t_{k-1} . Таким образом,

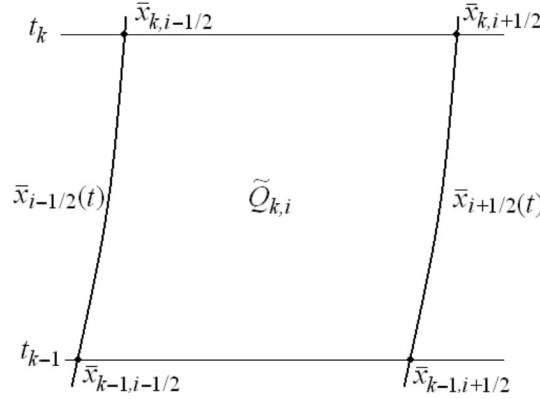


Рис. 2. Криволинейная трапеция $\tilde{Q}_{k,i}$, соответствующая узлу $(t_k, \bar{x}_{k,i})$
 Fig. 2. Curvilinear trapezoid $\tilde{Q}_{k,i}$ corresponding to node $(t_k, \bar{x}_{k,i})$

каждому внутреннему узлу $\bar{x}_{k,i} \in \bar{\omega}_x^k$ соответствует криволинейная трапеция $\tilde{Q}_{k,i}$, сверху ограниченная отрезком $\{t_k\} \times w_i^k$, сбоку кривыми $\bar{x}_{i-1/2}(t)$ и $\bar{x}_{i+1/2}(t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и снизу отрезком $\{t_{k-1}\} \times w_i^{k-1}$ (рис. 2).

Начнем с аппроксимации уравнения (4). Проинтегрируем его по области $\tilde{Q}_{k,i}$, соответствующей внутреннему узлу $\bar{x}_{k,i}$:

$$\int_{\tilde{Q}_{k,i}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(av)}{\partial x} \right) dt dx = \int_{\tilde{Q}_{k,i}} g(t, x) dt dx.$$

Применяя формулу Гаусса–Остроградского к левой части этого равенства, получаем, что интеграл по области $\tilde{Q}_{k,i}$ сводится к двум одномерным интегралам по верхней и нижней границам:

$$\int_{\bar{x}_{k,i-1/2}}^{\bar{x}_{k,i+1/2}} v(t_k, x) dx - \int_{\bar{x}_{k-1,i-1/2}}^{\bar{x}_{k-1,i+1/2}} v(t_{k-1}, x) dx = \int_{\tilde{Q}_{k,i}} g(t, x) dt dx.$$

Его левая часть аппроксимируется довольно просто с учетом кусочно-постоянной структуры приближенного решения. А в правой части сначала возьмем квадратурную формулу центрального прямоугольника по t и x . В итоге получаем разностное уравнение

$$h_{k,i} v_{k,i}^h - h_{k-1,i} v_{k-1,i}^h = \tau h_{k-1/2,i} g_{k-1/2,i}. \quad (19)$$

Для перехода к сеточному уравнению для функции $u_{k,i}^h$ введем условное выражение $2\sqrt{h_{k-1/2,i}} \tilde{u}_{k-1/2,i}^h = \sqrt{h_{k,i}} u_{k,i}^h + \sqrt{h_{k-1,i}} u_{k-1,i}^h$ и поделим на него обе части (19). В левой части получим выражение $\sqrt{h_{k,i}} u_{k,i}^h - \sqrt{h_{k-1,i}} u_{k-1,i}^h$. Напомним, что $g = 2uf$. В правой части (19) заменим выражение $h_{k-1/2,i} g_{k-1/2,i} = 2h_{k-1/2,i} u_{k-1/2,i} f_{k-1/2,i}$ приближенным значением $2\sqrt{h_{k-1/2,i}} \tilde{u}_{k-1/2,i}^h \sqrt{h_{k-1/2,i}} \tilde{f}_{k-1/2,i}^h$, где $\sqrt{h_{k-1/2,i}} \tilde{f}_{k-1/2,i}^h = (\sqrt{h_{k,i}} f_{k,i}^h + \sqrt{h_{k-1,i}} f_{k-1,i}^h) / 2$. Тогда деление на $2\sqrt{h_{k-1/2,i}} \tilde{u}_{k-1/2,i}^h$ приводит приближенную правую часть к виду $\tau \sqrt{h_{k-1/2,i}} \tilde{f}_{k-1/2,i}^h$. В итоге получается следующее разностное уравнение:

$$\frac{\sqrt{h_{k,i}} u_{k,i}^h - \sqrt{h_{k-1,i}} u_{k-1,i}^h}{\tau} = \frac{\sqrt{h_{k,i}} f_{k,i} + \sqrt{h_{k-1,i}} f_{k-1,i}}{2} \quad \forall i = 1, \dots, N-1.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{\sqrt{h_{k,i}}u_{k,i}^h - \sqrt{h_{k-1,i}}u_{k-1,i}^h}{\tau} = \frac{\sqrt{h_{k,i}}f_{k,i}^h + \sqrt{h_{k-1,i}}f_{k-1,i}^h}{2} \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (20)$$

Заметим, что эта запись справедлива как для внутренних узлов, так и для граничных при условии

$$f_{k,i}^h = \begin{cases} f(t_k, \bar{x}_{k,1/4}) & \text{для } i = 0, \\ f(t_k, \bar{x}_{k,i}) & \text{для } i = 1, \dots, N-1, \\ f(t_k, \bar{x}_{k,N-1/4}) & \text{для } i = N, \end{cases} \quad (21)$$

где $\bar{x}_{k,1/4}$ и $\bar{x}_{k,N-1/4}$ представляют собой точки пересечения характеристик $\bar{x}_{1/4}(t)$ и $\bar{x}_{N-1/4}(t)$ с линией $t = t_k$.

Возьмем эти уравнения совместно с начальными условиями

$$u_{0,i}^h = u_0(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (22)$$

В итоге получим явную разностную схему (20), (22) для последовательного определения сеточной функции $u^h(t, x)$ на сетке

$$\bar{\omega}_{t,x} = \left\{ \bigcup_{0 \leq k \leq M} (t_k, x) : x \in \bar{\omega}_x^k \right\}.$$

Вместе с тем поиск точных значений узлов этой сетки представляет некоторые трудности. Поэтому заменим точные решения характеристических уравнений на приближенные $\bar{x}_{k,i}^\tau$ путем использования метода Рунге–Кутты второго порядка:

$$\begin{aligned} k_1 &= \tau a(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}^\tau), \\ k_2 &= \tau a(t_{k-1} + \tau, \bar{x}_{k-1,i}^\tau + k_1), \\ \bar{x}_{k,i}^\tau &= \bar{x}_{k-1,i}^\tau + 1/2(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Приближенное решение на каждом временном слое t_k будем искать в узлах полученных сеток $\bar{\omega}_x^{\tau,k} = \{\bar{x}_{k,i}^\tau, i = 0, \dots, N\}$. Соответствующим образом переопределяются отрезки $w_i^{k,\tau}$ и шаги $h_{k,i}^\tau$. Таким образом, на шаге t_k (20) переходит в уравнение

$$\frac{\sqrt{h_{k,i}^\tau}u_{k,i}^h - \sqrt{h_{k-1,i}^\tau}u_{k-1,i}^h}{\tau} = \frac{\sqrt{h_{k,i}^\tau}f_{k,i}^\tau + \sqrt{h_{k-1,i}^\tau}f_{k-1,i}^\tau}{2} \quad \forall i = 0, \dots, N, \quad (23)$$

справедливое как для внутренних узлов, так и для граничных при условии

$$f_{k,i}^\tau = \begin{cases} f(t_k, \bar{x}_{k,1/4}^\tau) & \text{для } i = 0, \\ f(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) & \text{для } i = 1, \dots, N-1, \\ f(t_k, \bar{x}_{k,N-1/4}^\tau) & \text{для } i = N. \end{cases} \quad (24)$$

Простой вид коэффициентов в (23) и (24) обеспечивает “сильную монотонность”: неотрицательность приближенного решения $u^h(t_k, x_i)$ на сетке $\bar{\omega}_{t,x}^\tau$ при неотрицательном начальном условии $u_{0,i+1/2}^h$ и неотрицательной правой части $f \geq 0$. Эти же свойства обеспечивают пошаговую устойчивость, на этот раз в нормах, различающихся на временных слоях:

$$\|u^h\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} = \sqrt{\sum_{i=0}^N (u^h(\bar{x}_{k,i}^\tau))^2 h_{k,i}^\tau}$$

определяемых для сеточных функций $u(x)$, $z(x)$ на сетках $\bar{\omega}_x^{\tau,k}$ и порожденных скалярным произведением

$$(u^h, z^h)_{\bar{\omega}_x^{\tau,k}} = \sum_{i=0}^N u^h(\bar{x}_{k,i}^{\tau}) z^h(\bar{x}_{k,i}^{\tau}) h_{k,i}^{\tau}.$$

Первое утверждение приведем без доказательства, поскольку оно в упрощенной форме копирует доказательство из предыдущей части, а второе обоснуем подробнее.

Лемма 3.1. *При выполнении условий*

$$u_{0,i}^h \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, N \quad \text{и} \quad f \geq 0 = 0 [0, T] \times [0, 1]$$

решение разностной схемы (22)–(24) является неотрицательным:

$$u_{k,i}^h \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Лемма 3.2. *Для решения разностной схемы (22)–(24) при выполнении условия (2) справедлива оценка устойчивости*

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} \leq \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k-1}} + \frac{\tau}{2} \|f^{\tau}(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} + \frac{\tau}{2} \|f^{\tau}(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k-1}} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (25)$$

Более того, если $f \equiv 0$ на $[0, T] \times [0, 1]$, то

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} = \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k-1}} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (26)$$

Доказательство. Для доказательства (25) умножим уравнение (20) на введенную ранее величину $2\sqrt{h_{k-1/2,i}^{\tau}} \tilde{u}_{k-1/2,i}^h = \sqrt{h_{k,i}^{\tau}} u_{k,i}^h + \sqrt{h_{k-1,i}^{\tau}} u_{k-1,i}^h$. В итоге запишем равенство

$$\frac{h_{k,i}^{\tau} (u_{k,i}^h)^2 - h_{k-1,i}^{\tau} (u_{k-1,i}^h)^2}{\tau} = \frac{(\sqrt{h_{k,i}^{\tau}} f_{k,i}^{\tau} + \sqrt{h_{k-1,i}^{\tau}} f_{k-1,i}^{\tau}) (\sqrt{h_{k,i}^{\tau}} u_{k,i}^h + \sqrt{h_{k-1,i}^{\tau}} u_{k-1,i}^h)}{2}.$$

Эти же равенства получаются и для граничных интервалов с учетом равенств (21). Просуммируем их по всем $i = 0, \dots, N$ и умножим на τ :

$$\begin{aligned} \|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k}}^2 - \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau,k-1}}^2 &= \frac{\tau}{2} \left(\left(\hat{f}^{\tau}(t_k, \cdot), \hat{u}^h(t_k, \cdot) \right) + \left(\hat{f}^{\tau}(t_k, \cdot), \hat{u}^h(t_{k-1}, \cdot) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\hat{f}^{\tau}(t_{k-1}, \cdot), \hat{u}^h(t_k, \cdot) \right) + \left(\hat{f}^{\tau}(t_{k-1}, \cdot), \hat{u}^h(t_{k-1}, \cdot) \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь использовано обычное евклидово (не взвешенное) скалярное произведение для сеточных функций $\hat{u}^h(t_k, \bar{x}_{k,i}) = \sqrt{h_{k,i}^{\tau}} u^h(t_k, \bar{x}_{k,i})$ и

$$\hat{f}^{\tau}(t_k, \bar{x}_{k,i}) = \sqrt{h_{k,i}^{\tau}} f_{k,i}^{\tau} \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

К слагаемым правой части применим неравенство Коши – Буняковского:

$$\begin{aligned} & \|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}}^2 - \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}}^2 \leq \\ & \leq \frac{\tau}{2} \left(\|f^\tau(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} + \|f^\tau(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} + \right. \\ & \left. + \|f^\tau(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} \|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} + \|f^\tau(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} \right) = \\ & = \frac{\tau}{2} \left(\|f^\tau(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} + \|f^\tau(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} \right) \left(\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} + \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} \right). \end{aligned}$$

После деления на $\|u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} + \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}}$ получаем неравенство (25). Равенство (26) прямо следует из (27). \square

При подстановке точного решения в уравнение (23) запишем равенство

$$\frac{\sqrt{h_{k,i}^\tau} u_{k,i} - \sqrt{h_{k-1,i}^\tau} u_{k-1,i}}{\tau} = \frac{\sqrt{h_{k,i}^\tau} f_{k,i} + \sqrt{h_{k-1,i}^\tau} f_{k-1,i}}{2} + \varepsilon_{k,i}^h$$

с погрешностью аппроксимации второго порядка

$$|\varepsilon_{k,i}^h| \leq \left(\sqrt{h_{k,i}^\tau} + \sqrt{h_{k-1,i}^\tau} \right) \left(\hat{A}_1 \tau^2 + \hat{c}_2 h^2 \right),$$

где константы не зависят от τ , h при достаточной гладкости данных задачи (1)–(3). Оставляем это обоснование в виде упражнения с учетом отклонения точных и приближенных значений $\bar{x}_{k,i}$. С учетом оценки (25) получаем сходимость того же порядка.

Теорема 3.1. *Для достаточно гладких данных задачи (1)–(3) имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (22)–(24):*

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \leq k\tau(\hat{A}_1 \tau^2 + \hat{c}_2 h^2) \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (28)$$

откуда

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \leq T(\hat{A}_1 \tau^2 + \hat{c}_2 h^2). \quad (29)$$

Доказательство. Для доказательства (28) воспользуемся принципом математической индукции. На начальном слое ввиду условия (22) оценка (28) выполняется с нулевой правой частью. Пусть теперь (28) выполнена для некоторого $k - 1$. Докажем ее для $k \geq 1$. На основании леммы 3.2 имеем оценку

$$\begin{aligned} & \|u^h(t_k, \cdot) - u(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \leq \|u^h(t_{k-1}, \cdot) - u(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} + \\ & + \frac{\tau}{2} (\hat{A}_1 \tau^2 + \hat{c}_2 h^2) \|\mathbf{1}^h(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} + \frac{\tau}{2} (\hat{A}_1 \tau^2 + \hat{c}_2 h^2) \|\mathbf{1}^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}^h(t_k, \cdot)$ и $\mathbf{1}^h(t_{k-1}, \cdot)$ — сеточные функции, тождественно равные единице на $\bar{\omega}_x^{\tau, k}$ и $\bar{\omega}_x^{\tau, k-1}$ соответственно. Их нормы на отрезке $[0, 1]$ равны единице. Поэтому

$$\|u^h(t_k, \cdot) - u(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \leq \|u^h(t_{k-1}, \cdot) - u(t_{k-1}, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k-1}} + \tau(\hat{A}_1 \tau^2 + \hat{c}_2 h^2) \leq k\tau(\hat{A}_1 \tau^2 + \hat{c}_2 h^2).$$

Возьмем максимум от (28) и получим (29). \square

4. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим уравнение (1) на $[0, 1] \times [0, 1]$ с условиями

$$a(t, x) = x \frac{1-x}{2-t}, \quad u(0, x) = u_0(x) = \sin(\pi x^2), \quad (30)$$

$$f(t, x) = 2t \exp(t^2) \sin(\pi x^2) + 2\pi x \exp(t^2) \cos(\pi x^2) x \frac{1-x}{2-t} + 0.5 \exp(t^2) \sin(\pi x^2) \frac{1-2x}{2-t}.$$

Точное решение задачи задается формулой

$$u(t, x) = \exp(t^2) \sin(\pi x^2).$$

Возьмем последовательность убывающих шагов $\tau_0 = h_0 = 1/10$, $\tau_n = \tau_0/2^n$, $h_n = h_0/2^n$, $i = 1, \dots, 5$. Обозначим через $u^{h_n}(t_k, x_i)$ приближенное решение, полученное на разностной сетке с шагами τ_n , h_n . На равномерной эйлеровой сетке положим

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{2, \hat{\omega}_x}.$$

Результаты расчетов эйлерово-лагранжевой разностной схемой (11), (12) приведены в табл. 1.

На лагранжевой сетке обозначим

$$\bar{\varepsilon}_n = \max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{2, \bar{\omega}_x^{\tau, k}}.$$

Скорость сходимости для лагранжево-эйлеровой схемы (22)–(24) приведена в табл. 2. Расчеты подтверждают второй порядок сходимости.

Теперь сопоставим оба метода аппроксимации для задачи с разрывными начальными данными. Рассмотрим уравнение (1) с нулевой правой частью, коэффициентом (30) и разрывным начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} x/2 & \text{для } x \leq 1/2, \\ 1/8 & \text{для } x > 1/2. \end{cases}$$

Точное решение этой задачи задается формулами

Т а б л и ц а 1. Сходимость разностной схемы (11), (12)

Table 1. Convergence of the difference scheme (11), (12)

n	ε_n	$\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n$	$\log_2(\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n)$
0	0.279403	—	—
1	0.141163	1.98	0.98
2	0.071176	1.98	0.99
3	0.035752	1.99	0.99
4	0.017906	2.00	1.00
5	0.008955	2.00	1.00

Т а б л и ц а 2. Сходимость разностной схемы (22)–(24)

Table 2. Convergence of the difference scheme (22)–(24)

n	$\bar{\varepsilon}_n$	$\bar{\varepsilon}_{n-1}/\bar{\varepsilon}_n$	$\log_2(\bar{\varepsilon}_{n-1}/\bar{\varepsilon}_n)$
0	0.007790	—	—
1	0.001949	4.00	2.00
2	0.000488	4.00	2.00
3	0.000122	4.00	2.00
4	0.000030	4.00	2.00
5	0.000007	4.00	2.00

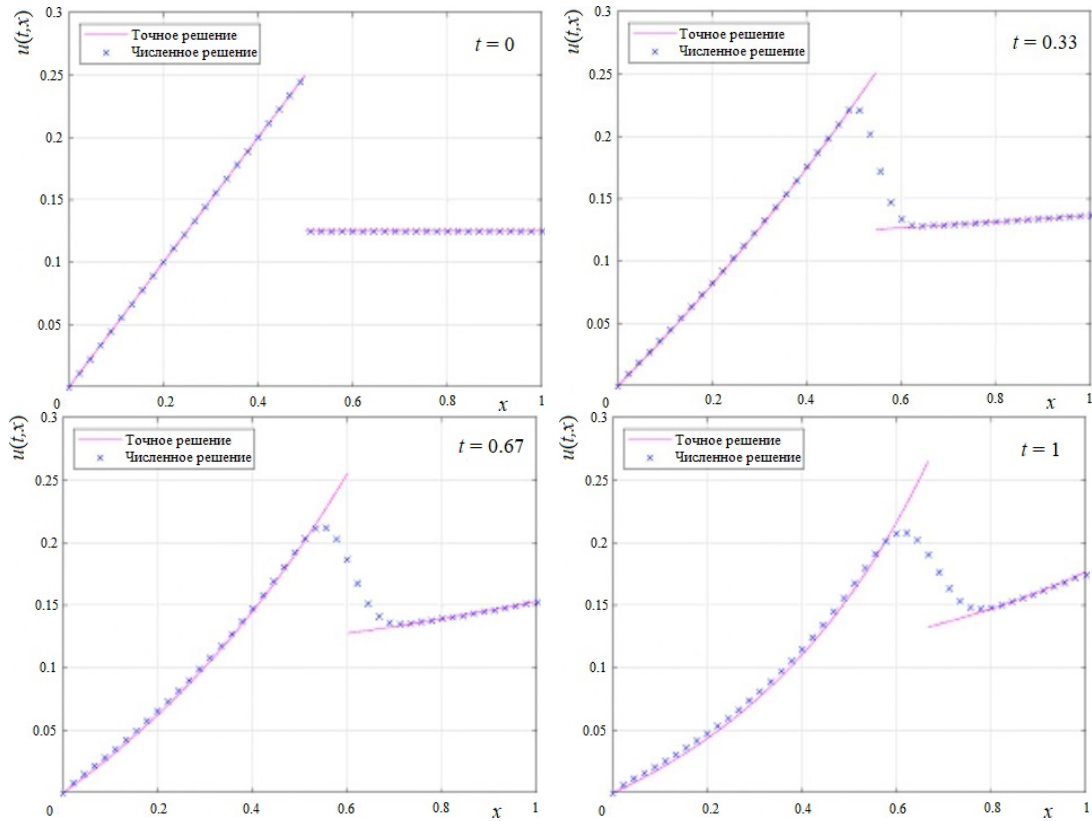


Рис. 3. Графики решения эйлерово-лагранжевой разностной схемы (11), (12) для $\tau = h = 1/45$
 Fig. 3. Solution graphs of Euler – Lagrange difference scheme (11), (12) for $\tau = h = 1/45$

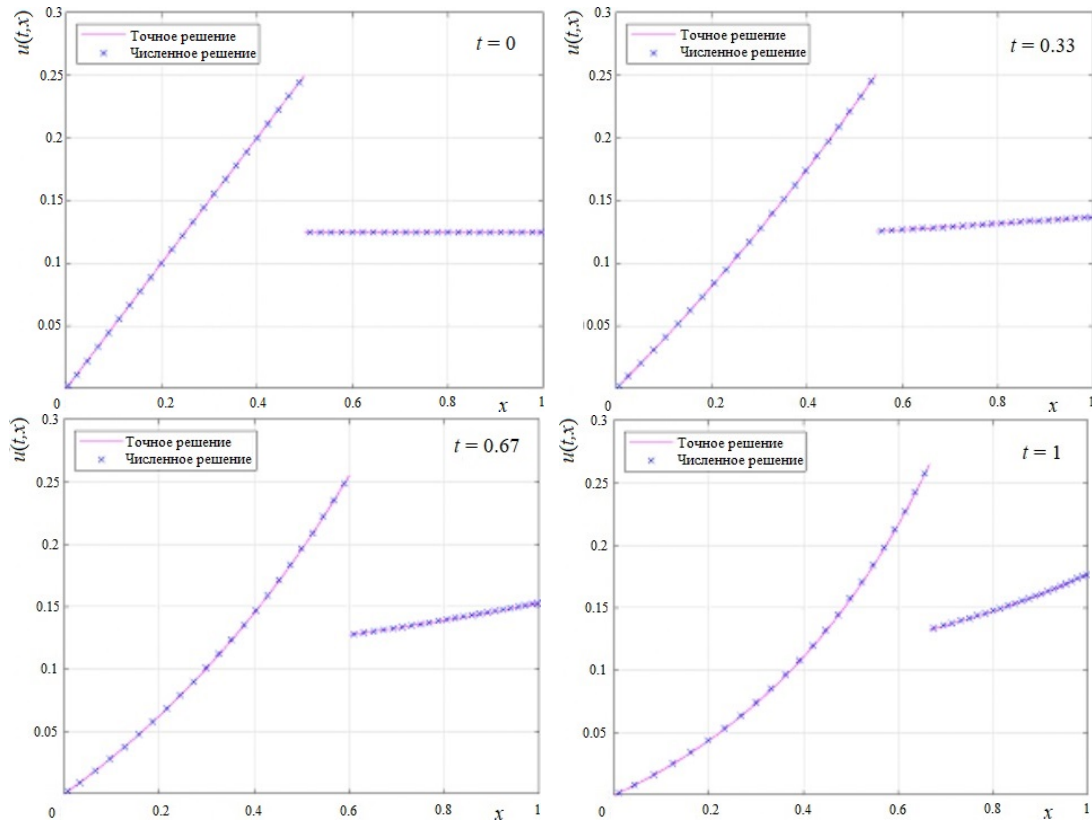


Рис. 4. Графики решения лагранжево-эйлеровой разностной схемы (22)–(24) для $\tau = h = 1/45$
 Fig. 4. Solution graphs of Lagrange – Euler difference scheme (22)–(24) for $\tau = h = 1/45$

$$u(t, x) = \frac{x(2-t)\sqrt{4-2t}}{2(2-xt)^2} \quad \text{при } x \leq \frac{2}{4-t},$$

$$u(t, x) = \frac{\sqrt{4-2t}}{8(2-xt)} \quad \text{при } x > \frac{2}{4-t}.$$

Приведем графики решений разностных схем (11), (12) и (22)–(24) с шагами $\tau = h = 1/45$ в моменты времени $t = 0, 1/3, 2/3, 1$. На рис. 3 и 4 отчетливо видно, что эйлерово-лагранжева схема разглаживает разрыв, в то время как лагранжево-эйлерова схема распространяет разрыв без сглаживания.

Заключение

Продемонстрирована конструктивная разница между эйлерово-лагранжевым и лагранжево-эйлеровым подходами к аппроксимации оператора переноса, которые оба называются полулагранжевыми в зарубежной литературе. Рассмотрен оператор переноса в симметричной форме. Дело в том, что для такой формы оператора работ по аппроксимации практически не встречается. Между тем в случае скорости субстанции как искомой функции такая форма оператора переноса дает локальный закон сохранения кинетической энергии.

Отметим, что в случае постоянной скорости $a(t, x) = \text{const}$ на некоторых участках вычислительной области все три формы оператора переноса (дивергентная, симметричная и материальная производные) совпадают. Но выполнение соответствующих локальных законов сохранения на дискретном уровне приводит к разным сеточным уравнениям в эйлерово-лагранжевой постановке. В лагранжево-эйлеровой постановке ввиду совпадения шагов сетки $h_{k,i} = \text{const}$ между характеристиками на этом участке сеточные уравнения совпадают с точностью до множителя для всех трех форм оператора переноса с сеточным уравнением Кранка–Николсон для обыкновенного дифференциального уравнения вдоль характеристики.

Представленная эйлерово-лагранжева разностная схема хорошо зарекомендовала себя на численных решениях одного знака. При переключениях знака численного решения вдоль x для повышения точности рекомендуется положительное смещение значений в (1) и (11) с соответствующей корректировкой правой части. Для лагранжево-эйлеровой схемы в этом нет необходимости.

Благодарности. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение № 075-02-2023-912).

Список литературы

- [1] Вабищевич П.Н. Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД; 2021: 464.
- [2] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Юрайт; 2017: 313.
- [3] Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука; 1979: 224.
- [4] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Математический сборник. 1959; 47(3):271–306.

- [5] **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука; 1978: 688.
- [6] **Shaidurov V.V., Vyatkin A.V., Kuchunova E.V.** Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2018; 33(2):123–135.

Вычислительные технологии, 2023, том 28, № 3, с. 101–116. © ФИЦ ИВТ, 2023
Computational Technologies, 2023, vol. 28, no. 3, pp. 101–116. © FRC ICT, 2023

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.007

Semi-Lagrangian approximations of the convection operator in symmetric form

SHAYDUROV VLADIMIR V.^{1,*}, CHEREDNICHENKO OL'GA M.²

¹Institute of Computational Modelling SB RAS, 660041, Krasnoyarsk, Russia

²Siberian Federal University, 660041, Krasnoyarsk, Russia

*Corresponding author: Shaydurov Vladimir V., e-mail: vadimtpv@gmail.com

Received April 05, 2023, revised April 20, 2023, accepted April 27, 2023.

Abstract

Purpose. The purpose of the study is the development and comparison of two numerical semi-Lagrangian methods with fulfillment of the conservation law at a discrete level. The approach is applied for the transport equation in the symmetric form, reflecting the law of conservation for the square of the transferred substance. The article presents the Euler–Lagrangian method, built on a rectangular difference grid that uses local values of characteristics to calculate the coefficients of difference equations. Lagrange–Eulerian method is built on a spatial non-uniform grid obtained by crossing the characteristic trajectories of the equation with lines in time.

Methodology. The integro-interpolation method is applied to derive approximations for the differential operator which allowed obtaining simple formulas connecting values of the grid function at the neighboring layers in time. Numerical calculations of characteristic trajectories are held by the Euler method or the Runge–Kutta method of the second order, depending on the required accuracy.

Findings. Numerical methods with the mentioned properties are developed and numerically confirmed, convergence and discrete conservation laws for them are mathematically proved. The first order convergence for both time and space is proved for the Euler–Lagrange method. The second order convergence also in time and space is proved for the Lagrange–Euler method.

Originality/value. The Euler–Lagrange and Lagrange–Euler methods for the numerical solution of the convection equation are developed. These methods are monotone and induce differential conservation law at discrete level. The first and the second order of convergence correspondingly are mathematically proved for them. The Lagrange–Euler method has showed two improved aspects: firstly, it has greater order of convergence than the Euler–Lagrange one and secondly, it allows solving problems with the discontinuous solutions without smoothing them.

Keywords: convection operator, symmetric form, semi-Lagrangian approximations, stability, convergence.

Citation: Shaydurov V.V., Cherednichenko O.M. Semi-Lagrangian approximations of the convection operator in symmetric form. Computational Technologies. 2023; 28(3):101–116. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.007. (In Russ.)

Acknowledgements. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (agreement No 075-02-2023-912).

References

1. **Vabishevich P.N.** Chislennye metody resheniya nestatsionarnykh zadach [Numerical methods of solving nonstationary problems]. Moscow: LENAND; 2021: 464. (In Russ.)
2. **Magomedov K.M., Kholodov A.S.** Setochno-harakteristicheskie chislennye metody [Meshcharacteristic numerical methods]. Moscow: Yurayt; 2017: 313. (In Russ.)
3. **Shokin Yu.I.** The method of differential approximation. Berlin: Springer; 1983: 298.
4. **Godunov S.K.** Raznostnyy metod chislennogo resheniya razryvnykh resheniy uravneniy gidrodinamiki [Difference method of numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamics equations]. Matematicheskiy Sbornik. 1959; 47(3):271–306. (In Russ.)
5. **Roždestvenskiĭ B.L., Yanenko N.N.** Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics. Providence: American Mathematical Society; 1983: 676.
6. **Shaidurov V.V., Vyatkin A.V., Kuchunova E.V.** Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2018; 33(2):123–135.