

# Использование геометрических свойств квадратичных функциональных интервалов для уменьшения области поиска минимума функции на интервале

Д. А. СКОРИК

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,  
630090, Новосибирск, Россия

Контактный автор: Скорик Дмитрий Александрович, e-mail: [dimakro2010@yandex.ru](mailto:dimakro2010@yandex.ru)

Поступила 11 ноября 2022 г., доработана 24 января 2023 г., принята в печать 08 февраля 2023 г.

Предложен метод уменьшения области поиска минимума функции на интервале, который основан на использовании геометрических свойств квадратичных функциональных интервалов. Доказано, что уменьшение достигается почти всюду, за исключением случая нулевого линейного члена. Проведен эксперимент, результаты которого показали перспективность применения предложенного метода в интервальных алгоритмах оптимизации, использующих адаптивное дробление.

*Ключевые слова:* минимум функции, интервальный анализ, функциональный интервал, уменьшение области поиска, двусторонняя оценка.

*Цитирование:* Скорик Д.А. Использование геометрических свойств квадратичных функциональных интервалов для уменьшения области поиска минимума функции на интервале. Вычислительные технологии. 2024; 29(1):32–44. DOI:10.25743/ICT.2024.29.1.004.

## Введение

В работе рассматривается практическое применение функциональных интервалов, границы которых представляют собой квадратичные полиномы одной переменной, для решения одной из классических задач вычислительной математики — нахождения безусловного минимума гладкой функции одной переменной на интервале. Эта задача решается различными способами. В частности, широкое распространение получили интервальные методы глобальной оптимизации, основанные на адаптивном дроблении области определения функции и оценивании ее значений по получающимся подобластям [1, 2].

Интервальные методы обеспечивают высокий порядок оценивания области значений функции на интервале, что дает преимущество по сравнению с методами более низкого порядка лишь при достаточно малой ширине интервала, на котором рассматривается функция (подробнее см. в разд. 3). Поэтому при использовании таких методов необходимо как можно быстрее удалять из рассмотрения такие области, где минимума функции заведомо быть не может. Алгоритмы, основанные на методе “ветвей-и-границ”, отсекают такие области при рассмотрении дерева дробления, основываясь на интервальных оценках области значений функции. Дополнительно, на каждой итерации дробления,

уменьшение области поиска достигается с помощью различных техник, например интервального метода Ньютона для поиска нулей производной исходной функции [2]. Применение этих техник требует дополнительных вычислений значений или интервальных оценок областей значений функции и/или ее производных.

Использование в интервальных алгоритмах дробления квадратичных функциональных интервалов позволит достигнуть третьего порядка точности (также как, например, и при использовании тейлоровских моделей [3–5]) интервальной оценки минимума функции [6]. Однако добиться уменьшения области поиска минимума можно и без дополнительных вычислений функции или ее производных.

В статье рассмотрен метод уменьшения области поиска минимума функции с помощью геометрической интерпретации квадратичных функциональных интервалов. Его использование может найти широкое применение в качестве составной части популярных интервальных алгоритмов глобальной оптимизации, основанных на адаптивном дроблении области определения исследуемой функции.

В статье использованы обозначения, принятые в интервальном анализе согласно неформальному международному стандарту [7]. В частности, интервалы и интервальные величины выделены жирным шрифтом, а семейство всех вещественных интервалов обозначено как  $\mathbb{IR}$ . Подчеркивание и надчеркивание —  $\underline{x}$  и  $\overline{x}$  — обозначают нижнюю и верхнюю границы вещественного интервала  $x$ , так что в целом  $x = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR}$ .

Помимо традиционных интервалов, которые представляют собой замкнутое связное подмножество  $\mathbb{R}$ , в работе применяются открытые интервалы, границы которых не входят в них. Они обозначены также жирным шрифтом, а границы таких интервалов — развернутыми вовне квадратными скобками [8]. Так, например, открытый интервал  $y$  обозначен  $]y, \overline{y}[$ . Шириной интервала  $x$  называем величину

$$\text{wid } x = \overline{x} - \underline{x},$$

а уравновешенным интервалом — интервал, для которого верно

$$\underline{x} = -\overline{x}.$$

Арифметические операции между интервалами понимаются ниже как операции классической интервальной арифметики [1, 2, 9, 10].

## 1. Понятие функционального интервала

В интервальном анализе рассматриваются различные виды интервалов. Однако на практике чаще всего применяется классический интервал, под которым понимается ограниченное замкнутое связное подмножество вещественной оси

$$x = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}.$$

Ранее автором статьи было предложено расширить понятие интервала таким образом, чтобы его границы выражались не постоянными числами, а некоторыми функциями, зависящими от параметров, которые могут принимать значения в интервалах [11]. Они названы функциональными интервалами. Чтобы определить такой функциональный интервал, зафиксируем интервалы изменений параметров  $x_1 \in \underline{x}_1, \dots, x_n \in \underline{x}_n$ .

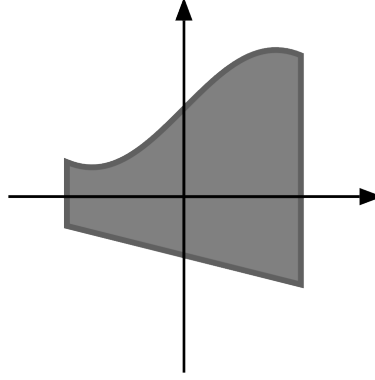


Рис. 1. Функциональный интервал (1)

Fig. 1. The functional interval (1)

Тогда функциональным интервалом будем называть интервал, нижняя и верхняя границы которого представляются соответствующими функциями

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \mathcal{U} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющими свойству

$$\forall x_i \in \mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) \leq \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n).$$

Функции  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{U}$  аналогично будем называть границами интервала. На письме функциональные интервалы обозначим так же, как и обычные числовые интервалы: на месте левого конца интервала будем писать функцию  $\mathcal{L}$ , а на месте правого конца — функцию  $\mathcal{U}$ . Так, например, рассмотрим однопараметрический функциональный интервал  $\mathbf{y}$ . Если его параметр  $x \in [-2, 2]$ ,  $\mathcal{L}(x) = -0.25x$ ,  $\mathcal{U}(x) = \sin x + 1.5$ , то этот интервал будет записываться как

$$\mathbf{y}(x, [-2, 2]) = [-0.25x - 1, \sin x + 1.5]. \quad (1)$$

Графическая интерпретация интервала (1) показана на рис. 1. Функциональный интервал, границы которого представляют собой квадратичные полиномы, будем называть квадратичным функциональным интервалом.

## 2. Уменьшение области поиска минимума функции

### 2.1. Идея

Пусть дан уравновешенный интервал  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$ . Рассмотрим на этом интервале дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $f(x)$ . Построим по  $f(x)$  квадратичный однопараметрический функциональный интервал  $\mathbf{g}(x, \mathbf{x})$ , используя разложение функции по формуле Тейлора [3, 4] на интервале  $\mathbf{x}$  (метод его построения указан в работе [6]).

Обозначим через  $M$  минимум функции на интервале  $\mathbf{x}$ , т. е.

$$M = \min_{\mathbf{x}} f(x). \quad (2)$$

Пусть также известен интервал  $\mathbf{M}$ , в котором содержится  $M$ :

$$M \in \mathbf{M} \subset \mathbb{R}. \quad (3)$$

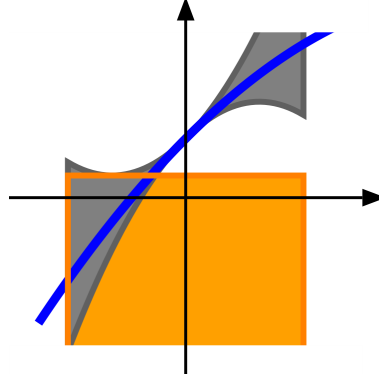


Рис. 2. Синей линией показана функция  $f(x)$ , серым цветом обозначен соответствующий этой функции квадратичный функциональный интервал  $\mathbf{g}(x, \mathbf{x})$ , оранжевым цветом — интервал  $\mathbf{M}$   
 Fig. 2. The blue line shows the function  $f(x)$ , the gray colour indicates the quadratic functional interval  $\mathbf{g}(x, \mathbf{x})$  corresponding to this function, the orange colour — the interval  $\mathbf{M}$

На рис. 2 показан пример функции  $f(x)$ , а также построенный для этой функции квадратичный функциональный интервал  $\mathbf{g}(x, \mathbf{x})$  и интервал  $\mathbf{M}$ . Видно, что в проиллюстрированном случае можно указать такой подынтервал исходного интервала  $\mathbf{x}$ , на котором область значений функции  $f(x)$  не содержит  $\mathbf{M}$ . Если можно оценить или несложно найти этот интервал, опираясь на имеющуюся информацию о функции, то тем самым уменьшим область поиска минимума функции, не используя дополнительных вычислений ее значений или ее производных.

Таким образом, мы рассмотрели частный случай, когда интервал  $\mathbf{x}$  — уравновешенный. Когда имеем интервал общего вида, его можно свести к уравновешенному путем линейного сдвига его центра в нуль.

Далее аналитически опишем метод для уменьшения области поиска минимума функции  $f(x)$ , а также ответим на вопрос: как часто встречаются такие случаи, в которых можно произвести такое уменьшение описанным методом.

## 2.2. Описание метода уменьшения области

Пусть нижняя и верхняя границы функционального интервала  $\mathbf{g}(x, \mathbf{x})$  представляются функциями  $\underline{g}(x)$  и  $\bar{g}(x)$  соответственно. По построению имеет место

$$\underline{g}(x) \leq f(x) \leq \bar{g}(x) \quad \text{для любого } x \in \mathbf{x}. \quad (4)$$

В силу того что  $\mathbf{g}(x, \mathbf{x})$  — квадратичный функциональный интервал,  $\underline{g}(x)$  и  $\bar{g}(x)$  представляют собой квадратичные полиномы и имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \bar{g}(x) &= \bar{a}x^2 + bx + c, \\ \underline{g}(x) &= \underline{a}x^2 + bx + c, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты  $\underline{a}$ ,  $\bar{a}$ ,  $b$ ,  $c$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{a} &\leq \min \{ f''(x) \mid x \in \mathbf{x} \}, \\ \bar{a} &\geq \max \{ f''(x) \mid x \in \mathbf{x} \}, \\ b &= f'(0), \\ c &= f(0). \end{aligned}$$

Желая найти те подобласти исходного интервала  $\mathbf{x}$ , в области значений функции на которых может содержаться  $M$ , мы должны разрешить относительно  $x$  включение

$$f(x) \in M. \quad (6)$$

Поскольку функция  $f(x)$  может иметь сложный вид, аналитически решить такое включение может быть трудно, а зачастую и невозможно. Поэтому вместо исходного включения будем решать более слабое, тем самым огрубляя множество решений в большую сторону, чтобы не исключать решения исходного неравенства из рассмотрения. Для ослабления используем функциональные границы  $\underline{g}(x)$  и  $\bar{g}(x)$  интервальной оценки функции  $f(x)$  вместо самой этой функции. Поскольку функции границ имеют заранее определенный вид квадратичных полиномов, ослабленное включение будет поддаваться аналитическому решению.

Включение (6) всегда имеет непустое решение. Чтобы обосновать этот факт, рассмотрим предельный случай, когда интервал, на котором ищется решение этого включения, представляет собой единственную точку  $x^* \in \mathbf{x}$ . Тогда  $g(x^*) = f(x^*) = \bar{g}(x^*)$ ,  $M = f(x^*)$ , а  $\mathbf{M} = [f(x^*), f(x^*)]$ . Включение  $f(x) \in [f(x^*), f(x^*)]$  имеет решение в виде  $x^*$ . В силу свойств естественного интервального расширения (см., к примеру, [1]) множество решений исходного включения (6) будет наверняка содержать  $x^*$ , а значит, иметь как минимум одно решение.

Интервальный анализ позволяет рассматривать включения как системы двусторонних неравенств, которые далее могут быть представлены в виде обычных систем неравенств. Так, например, включение (6) эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \leq \overline{M}, \\ f(x) \geq \underline{M}. \end{cases}$$

С учетом (2) и (3) данная система эквивалентна одному неравенству

$$f(x) \leq \overline{M}.$$

Используя (4), ослабим его до

$$\underline{g}(x) \leq \overline{M}. \quad (7)$$

Переписав (7) по развернутой формуле из (5), получим

$$\underline{a}x^2 + bx + c \leq \overline{M}.$$

Каждый из коэффициентов, который входит в это неравенство, т. е.  $\underline{a}$ ,  $\bar{a}$  (входит неявно в  $\overline{M}$ ),  $b$  и  $c$ , может быть меньше нуля, больше нуля или быть равным нулю. Таким образом, полный перебор всех этих вариантов будет состоять из  $81 (= 3^4)$  случаев, если не учитывать дополнительные требования на соотношения коэффициентов друг с другом. Как следствие, полное аналитическое решение трудоемко и громоздко для реализации. Поэтому пойдем от обратного и дадим ответ на вопрос: в каких случаях мы не сможем описанным выше методом уменьшить область поиска минимума функции  $f(x)$ ? Ответ на этот вопрос оформим в качестве теоремы.

**Теорема.** Если в неравенстве (7) выполнено  $b \neq 0$ , то для любого невырожденного уравновешенного интервала  $\mathbf{x}$  можно указать хотя бы один его непустой подынтервал, на котором это неравенство не имеет решений.

**Доказательство.** Так как  $\underline{x}$  — невырожденный, то

$$\underline{x} < 0 < \overline{x}.$$

Рассмотрим неравенство (7). Из формулы (4) следует, что в качестве интервала  $M$ , фигурирующего в (7) и определенного посредством (3), можно взять

$$M = \left[ \min_{\underline{x}} g(x), \min_{\underline{x}} \bar{g}(x) \right]. \quad (8)$$

Используя (5), можем заключить, что

$$\overline{M} = \min_{\underline{x}} \bar{g}(x) \leq \bar{g}(0) = c.$$

Как следствие, неравенство (7) может быть ослаблено до неравенства

$$\underline{g}(x) \leq c, \quad (9)$$

поэтому множество решений расширится. Переписав полученное неравенство, используя (5), получим

$$\underline{a}x^2 + bx + c \leq c, \quad (10)$$

что эквивалентно

$$\underline{a}x^2 + bx \leq 0.$$

Чтобы решением данного неравенства была вся числовая прямая, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} \underline{a} \leq 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если  $b \neq 0$ , то, значит, исходное, более сильное неравенство (7) также имеет отличное от всей числовой оси решение, коль скоро при этом более слабое неравенство (9) имеет решение, отличное от числовой оси.

Теперь докажем, что когда ослабленное неравенство (9) имеет решение, отличное от всей числовой оси, оно имеет как минимум один непустой подынтервал, на котором это неравенство не выполняется.

Итак, теперь рассмотрим случай  $b \neq 0$ . Вернемся к неравенству

$$\underline{a}x^2 + bx \leq 0.$$

Для начала рассмотрим случай  $\underline{a} = 0$ , при котором получаем

$$bx \leq 0. \quad (11)$$

Поскольку  $b \neq 0$ , возможны только случаи, когда  $b < 0$  и  $b > 0$ . Решение неравенства для каждого из этих случаев, а также непустые подынтервалы, на которых решение не достигается, представлены в табл. 1.

Далее полагаем, что  $\underline{a} \neq 0$ . Чтобы найти точки пересечения квадратичной параболы с осью абсцисс, решим уравнение

$$\underline{a}x^2 + bx = 0.$$

Т а б л и ц а 1. Решение неравенства (11) для различных знаков  $b$   
 Table 1. The solution of the inequality (11) for different signs of  $b$

$b$	Решение неравенства на $\mathbf{x}$	Подынтервал $\mathbf{x}$ без решений
Менее 0	$[0, \bar{\mathbf{x}}]$	$] \mathbf{x}, 0[$
Более 0	$[ \underline{\mathbf{x}}, 0]$	$] 0, \bar{\mathbf{x}}[$

Т а б л и ц а 2. Решение неравенства (10)

Table 2. The solution of the inequality (10)

$\underline{a}$	$x_2$	$x_2 \in \mathbf{x}$	$x_2 \notin \mathbf{x}$
$< 0$	$< 0$	$[ \underline{\mathbf{x}}, x_2 ] \cup [ 0, \bar{\mathbf{x}} ]$	$[ 0, \bar{\mathbf{x}} ]$
$< 0$	$> 0$	$[ \underline{\mathbf{x}}, 0 ] \cup [ x_2, \bar{\mathbf{x}} ]$	$[ \underline{\mathbf{x}}, 0 ]$
$> 0$	$< 0$	$[ x_2, 0 ]$	$[ \underline{\mathbf{x}}, 0 ]$
$> 0$	$> 0$	$[ 0, x_2 ]$	$[ 0, \bar{\mathbf{x}} ]$

Т а б л и ц а 3. Подынтервалы  $\mathbf{x}$ , на которых решений неравенства (10) не существует

Table 3. Subintervals of the  $\mathbf{x}$  where there are no solutions of (10)

$\underline{a}$	$x_2$	$x_2 \in \mathbf{x}$	$x_2 \notin \mathbf{x}$
$< 0$	$< 0$	$] x_2, 0[$	$] \underline{\mathbf{x}}, 0[$
$< 0$	$> 0$	$] 0, x_2[$	$] 0, \bar{\mathbf{x}}[$
$> 0$	$< 0$	$] \underline{\mathbf{x}}, x_2[ \cup ] 0, \bar{\mathbf{x}}[$	$] 0, \bar{\mathbf{x}}[$
$> 0$	$> 0$	$] \underline{\mathbf{x}}, 0[ \cup ] x_2, \bar{\mathbf{x}}[$	$] \underline{\mathbf{x}}, 0[$

Его корни

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -b/\underline{a}.$$

Заметим, что  $x_2 \neq 0$  в силу того, что  $b \neq 0$ . Для всех возможных случаев знаков  $\underline{a}$  и  $x_2$  решения неравенства представлены в табл. 2. Кроме того, для этих случаев в табл. 3 указаны непустые подынтервалы  $\mathbf{x}$ , в которых неравенство не имеет решений.

Во всех случаях, рассмотренных выше, мы получили, что при  $b \neq 0$  можно указать непустые подынтервалы  $\mathbf{x}$ , в которых решение неравенства (9) не существует. Отсюда следует, что более сильное неравенство (7) на этих подынтервалах также не будет иметь решений.  $\square$

Заметим, что в некоторых случаях множество решений неравенства из теоремы представляет собой объединение двух непересекающихся интервалов. Это значит, что если мы применяем описанный выше метод для уменьшения области поиска минимума функции в интервальных алгоритмах глобальной оптимизации, основанных на адаптивном дроблении области определения (см., например, [1, 2]), то в этом случае он автоматически производит разбиение интервала на подынтервалы.

### 3. Пример уменьшения области поиска

Рассмотрим функцию (рис. 3)

$$f(x) = \sin 3x + \cos x, \quad x \in [-2, 2] \quad (12)$$

и построим для нее однопараметрический функциональный интервал (по способу, указанному в работе [6]). Вычислим ее первую и вторую производные

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cos(3x) - \sin x, \\ f''(x) &= -9 \sin(3x) - \cos x \end{aligned}$$

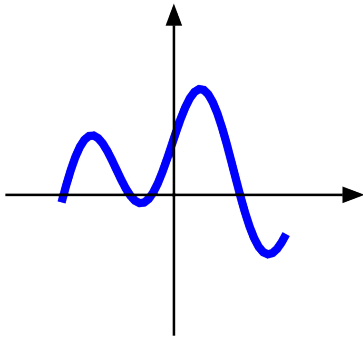


Рис. 3. График функции (12) на интервале  $[-2, 2]$

Fig. 3. The graph of the function (12) on the interval  $[-2, 2]$

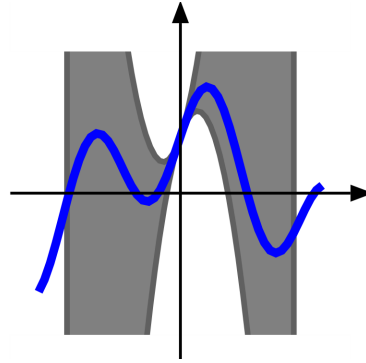


Рис. 4. Серым цветом показан функциональный интервал (13), синяя линия — график функции (12)

Fig. 4. The gray area shows the functional interval (13), the blue line — the function graph (12)

и проведем дополнительные вычисления значений функции и интервальной оценки производной:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 + \cos 0 = 1, \\ f'(0) &= 3 \cos 0 - \sin 0 = 3, \\ f''([-2, 2]) &= -9 \sin([-2, 2]) - \cos([-2, 2]) \subset [-9, 9] - [-1, 1] = [-10, 10]. \end{aligned}$$

Построенный функциональный интервал будет иметь вид (рис. 4)

$$[-5x^2 + 3x + 1, 5x^2 + 3x + 1]. \quad (13)$$

Заметим, что интервальная оценка области значений функции (12), полученная с помощью данного функционального интервала, равная  $[-25, 27]$ , будет шире, чем, например, оценка  $[-2, 2]$ , полученная при использовании классической интервальной арифметики для оценивания области значений функции на интервале  $[-2, 2]$ .

В качестве верхней границы минимума функции возьмем минимум верхней границы (см. формулу (8)) интервала (13) согласно известной формуле минимума квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом:

$$1 - \frac{3^2}{4 \cdot 5} = 1 - \frac{9}{20} = 0.55.$$

Несмотря на более широкую интервальную оценку значений функции с помощью функционального интервала (13), мы получили, в целом, более точную оценку на верхнюю границу интервала минимума функции из-за локального характера формулы Тейлора. При использовании интервала оценки с помощью классической интервальной арифметики можно получить даже более узкую интервальную оценку для минимума в виде  $[-2, 0.55]$ . Но для получения такой оценки требуется дополнительное вычисление функции, которое может оказаться трудоемким.

Решим неравенство

$$-5x^2 + 3x + 1 \leq 0.55$$

на интервале  $[-2, 2]$ . Решением будут интервалы

$$[-2, 0.1 \cdot (3 - 3\sqrt{2})] \quad \text{и} \quad [0.1 \cdot (3 + 3\sqrt{2}), 2],$$

которые можно округить для облегчения вычислений до

$$[-2, -0.12] \quad \text{и} \quad [0.72, 2].$$

Величину уменьшения области поиска минимума будем характеризовать с помощью числового показателя  $K$ , который определяется по формуле

$$\begin{aligned} K &= 1 - \frac{\text{Ширина области после уменьшения}}{\text{wid } \mathbf{x}} = \\ &= 1 - \frac{(-0.12 - (-2)) + (2 - 0.72)}{2 - (-2)} = \frac{3.16}{4} = 1 - 0.79 = 0.21. \end{aligned} \quad (14)$$

То есть область поиска минимума уменьшилась на 21 %. Величина  $K$  в действительности больше, но мы использовали довольно грубые округления при решении неравенства и при нахождении интервальной оценки второй производной функции, тем самым расширив множество решений неравенства.

Заметим, что для  $K \in ]0, 1]$  чем  $K$  ближе к 1, тем меньше по ширине получилась область поиска после применения метода уменьшения области поиска. Случай  $K = 0$  соответствует тому, что ширина области не изменилась (для невырожденного интервала это невозможно по теореме из разд. 2), а случай  $K = 1$  соответствует сжатию области решений в единственную точку.

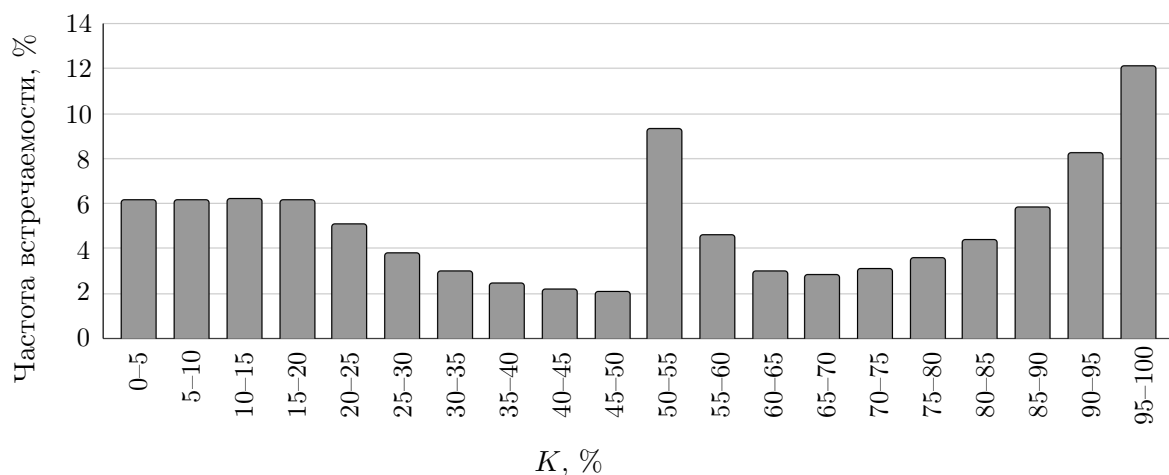
Кроме того, решение неравенства состоит из двух непересекающихся интервалов, т. е. при реализации описанного выше сценария в алгоритмах дробления не нужно предпринимать дополнительных действий по разбиению интервала поиска на подынтервалы.

#### 4. О величине уменьшения области поиска минимума

В разд. 2 указано, что уменьшение области поиска будет происходить почти всюду — исключение составляет только случай  $b = 0$ . Важным остается вопрос о величине  $K$  (14), которая характеризует уменьшение области поиска минимума.

Для того чтобы показать характер распределения величины  $K$  в случае, когда все коэффициенты  $\underline{a}$ ,  $\bar{a}$ ,  $b$ ,  $c$  равномерно распределены, проведем статистический эксперимент из  $10^8$  испытаний. Каждое испытание будет состоять из следующих шагов.

1. Величины  $b$  и  $c$  случайно генерируем по равномерному распределению на интервале  $[-10, 10]$ .
2. Случайно генерируем величину  $l$  по равномерному распределению на интервале  $[-10, 10]$ . Зададим интервал  $\mathbf{x}$  величиной  $[-|l|, |l|]$ .
3. Случайно генерируем величины  $\underline{a}$  и  $\bar{a}$  по равномерному распределению на интервале  $[-10, 10]$ . Если в результате генерации оказалось, что  $\underline{a} > \bar{a}$ , то меняем эти величины между собой. В случае  $\underline{a} = \bar{a}$  повторяем процесс случайной генерации.
4. Вычисляем значение минимума квадратичного полинома  $\bar{a}x^2 + bx + c$  на интервале  $\mathbf{x}$  и присваиваем его  $\overline{M}$ .
5. Находим множество решений неравенства  $\underline{a}x^2 + bx + c \leq \overline{M}$ .
6. Для полученного множества решений найдем величину уменьшения области поиска  $K$  по формуле (14). Запишем в результирующий список это число.

Рис. 5. Гистограмма значений  $K$ Fig. 5. The histogram of  $K$  values

После проведения всех испытаний по полученному списку чисел  $K$  построим гистограмму с шагом в 0.05 (рис. 5). По ней можно сказать, что при равномерном распределении коэффициентов  $a$ ,  $\bar{a}$ ,  $b$ ,  $c$  величина  $K$  также будет распределена почти равномерно. Это хорошее качество построенного метода уменьшения области поиска минимума, которое показывает, что на таких данных нет тенденции к только лишь небольшому сжатию.

Однако при решении практических задач поиска минимума функции распределение значений коэффициентов будет иное, как и интервалы возможных значений этих величин. Так, например, при уменьшении интервала поиска минимума ширина интервальной оценки области значений второй производной исходной функции будет линейно уменьшаться [1]. Поэтому естественно следует ожидать, что чем уже будет интервал поиска (и тем больше функциональный квадратичный интервал похож на квадратичную параболу), тем больше процедура уменьшения будет давать области, похожие либо на вершину параболы, либо на один или оба конца ее ветвей (в зависимости от того, выпукла или вогнута параболы).

Таким образом, применение процедуры, описанной в работе, перспективно к встраиванию в интервальные алгоритмы “ветвей-и-границ”, и дальнейшее изучение эффективности такого встраивания стоит продолжить.

## Заключение

Одна из главных проблем, с которыми сталкиваются на практике при использовании интервальных методов оптимизации высокого порядка, — тот факт, что они начинают проявлять свое преимущество по сравнению с методами малого порядка лишь при довольно малой ширине интервала. Поэтому при решении практических задач необходимо как можно быстрее уменьшать область поиска до интервалов таких размеров, где методы высокого порядка обнаружат свою эффективность.

Общий подход интервальных методов адаптивного дробления решает эту проблему путем разбиения исходной области поиска на подынтервалы. Однако при изначально широкой области поиска и появлении эффекта “застоя” интервальных оценок [1] коли-

чество подынтервалов может стать очень большим и тем самым замедлить процедуру нахождения минимума либо переполнить память ЭВМ.

В работе рассмотрены квадратичные функциональные интервалы, которые позволяют оценить минимум функции на интервале с третьим порядком точности [6]. Преимущество интервалов такого вида заключается в том, что они позволяют с использованием уже имеющейся информации отсекал бесперспективные области поиска, тем самым сокращая дробление интервалов (несмотря на не очень эффективное интервальное оценивание области значений функции на широком интервале).

Показано, что рассмотренный в работе способ уменьшения области поиска минимума перспективен для использования, например, при решении задачи глобальной оптимизации методом “ветвей-и-границ”. Однако эффективность применения этого метода следует подробнее исследовать на практике при решении конкретных задач.

## Список литературы

- [1] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: “XYZ”; 2022: 654. Адрес доступа: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
  - [2] Хансен Э., Уолстер Дж.У. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа. М.; Ижевск: Издательство “РХД”; 2012: 615.
  - [3] Berz M., Bischof C., Griewank A., Corliss G. Computational differentiation: techniques, applications, and tools. Philadelphia: SIAM; 1996: 421.
  - [4] Griewank A., Corliss G. Automatic differentiation of algorithms. Philadelphia: SIAM; 1992: 353.
  - [5] Griewank A., Walther A. Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2008: 460.
  - [6] Скорик Д.А., Шарый С.П. Об интервальном оценивании с высоким порядком минимума функции. Вычислительные технологии. 2022; 27(4):77–83. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.006.
  - [7] Кирфотт Б., Накао М., Ноймайер А., Румп З., Шарый С.П., ван Хентенрик П. Стандартизация обозначений в интервальном анализе. Вычислительные технологии. 2010; 15(1):7–13.
  - [8] Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М.: Издательство “Наука”; 1965: 424.
  - [9] Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press; 1991: 256.
  - [10] Ratschek H., Rokne J. Computer methods for the range of functions. Chichester, N.Y.: Ellis Horwood, Halsted Press; 1984: 168.
  - [11] Скорик Д.А. Развитие линейной функциональной арифметики и ее приложение к решению задач интервального анализа. Адрес доступа: <https://arxiv.org/abs/2210.14782>.
-

**Using the geometric properties of quadratic functional intervals to reduce the search area for the minimum of a function on an interval**

D. A. SKORIK

Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

Corresponding author: Dmitry A. Skorik, e-mail: [dimakro2010@yandex.ru](mailto:dimakro2010@yandex.ru)*Received November 11, 2022, revised January 24, 2023, accepted February 08, 2023.***Abstract**

The paper addresses the practical application of functional intervals, whose boundaries are quadratic polynomials of one variable, in order to solve one of the classical problems of computational mathematics — finding the absolute minimum of a smooth function of one variable on an interval.

Currently, this problem is solved in various ways. In particular, interval methods of global optimization based on adaptive fragmentation of the domain of function definition and estimation of its values by the resulting sub-domains have become widespread.

The interval methods, which provide a high order of estimation for the range of values of the function on the interval, are more advantageous over the lower-order methods only when the width of the functional interval is small. Therefore, when using such methods, it is necessary to quickly remove from consideration the areas in which cannot be a minimum of the considered function.

Algorithms based on the “branches-and-bounds” method cut off such areas when considering the splitting tree, based on interval estimates for the range of values of the function. Additionally, at each iteration of the crushing, the reduction of the search area is achieved using various techniques. The application of these techniques requires additional calculations of values or interval estimates for the areas of values of the function and/or its derivatives.

The article proposes a method for reducing the search area of the minimum function, which uses a geometric interpretation of quadratic functional intervals. The method can be widely applied as an integral part of popular interval algorithms of global optimization based on adaptive fragmentation for the domain of definition of the considered function.

It was shown that the method of reducing the minimum search area indicated in the work is promising for use, for example, for solving the problem of global optimization by the “branches-and-bounds” method.

*Keywords:* minimum of a function, interval analysis, functional interval, search area reduction, two-sided estimate.

*Citation:* Skorik D.A. Using the geometric properties of quadratic functional intervals to reduce the search area for the minimum of a function on an interval. Computational Technologies. 2024; 29(1):32–44. DOI:10.25743/ICT.2024.29.1.004. (In Russ.)

**References**

1. **Shary S.P.** Konechnomernyy interval'nyy analiz [Interval analysis with finite dimensions]. Novosibirsk: “XYZ”; 2022: 654. Available at: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
2. **Hansen E., Walster G.W.** Global optimization using interval analysis. Boca Raton: CRC Press; 2003: 728.
3. **Berz M., Bischof C., Griewank A., Corliss G.** Computational differentiation: techniques, applications, and tools. Philadelphia: SIAM; 1996: 421.
4. **Griewank A., Corliss G.** Automatic differentiation of algorithms. Philadelphia: SIAM; 1992: 353.

5. **Griewank A., Walther A.** Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2008: 460.
6. **Skorik D.A., Shary S.P.** On a high order interval estimation of the minimum of a function. Computational Technologies. 2022; 27(4):77–83. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.006. (In Russ.)
7. **Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.** Standardized notation in interval analysis. Computational Technologies. 2010; 15(1):7–13.
8. **Bourbaki N., Spain P.** Functions of a real variable. Heidelberg: Springer Berlin; 2004: 338.
9. **Neumaier A.** Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press; 1991: 256.
10. **Ratschek H., Rokne J.** Computer methods for the range of functions. Chichester, N.Y.: Ellis Horwood, Halsted Press; 1984: 168.
11. **Skorik D.A.** Razvitie lineynoy funktsional'noy arifmetiki i ee prilozhenie k resheniyu zadach interval'nogo analiza [Development of linear functional arithmetic and its application for solving problems of interval analysis]. Available at: <https://arxiv.org/abs/2210.14782>. (In Russ.)