
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

DOI:10.25743/ICT.2024.29.2.003

Математическое моделирование конвекции в верхней мантии Земли с применением неявной версии метода расщепления по физическим процессам

В. В. ЧЕРВОВ¹, Г. Г. ЧЕРНЫХ^{2,*}

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

²Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Черных Геннадий Георгиевич, e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

Поступила 21 апреля 2023 г., доработана 15 мая 2023 г., принята в печать 22 мая 2023 г.

Для описания трехмерной конвекции в мантии Земли привлекается хорошо известная математическая модель, включающая уравнения Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска и геодинамическом приближении. Численная модель конвекции в настоящей работе основывается на неявной реализации метода расщепления по физическим процессам. Поля скорости и дефекта давления находятся методом стационарирования. На каждом слое по времени интегрируется уравнение температуропроводности. Авторы применяют в качестве схемы интегрирования неявную схему стабилизирующей поправки. Осуществляются итерации по нелинейности. Выполнено тестирование построенной численной модели путем решения модельной задачи о конвекции в единичном кубе в жидкости с нелинейной вязкостью, соответствующей конвекции в общей мантии Земли. Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами этого теста. Однако в сравнении с разработанной ранее численной моделью на основе неявного метода расщепления с коррекцией давления для достижения сопоставимой точности расчетов при использовании неявной реализации метода расщепления по физическим процессам требуется примерно в два раза большее компьютерное время. Построен тест для задач конвекции в верхней мантии Земли; приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие его надежность. Основные числовые параметры теста выбирались аналогичными параметрами в известном международном тесте для общемантийной конвекции. Задача решалась с применением трех численных моделей, основанных на неявных методах расщепления.

Ключевые слова: трехмерная конвекция в мантии Земли, неявные разностные схемы расщепления, тестирование.

Цитирование: Червов В.В., Черных Г.Г. Математическое моделирование конвекции в верхней мантии Земли с применением неявной версии метода расщепления по физическим процессам. Вычислительные технологии. 2024; 29(2):21–34.
DOI:10.25743/ICT.2024.29.2.003.

Введение

Конвективные процессы в мантии Земли обусловлены гравитационным воздействием на мантийный материал в совокупности с тепловой дифференциацией недр. Ключевым

вопросом при изучении недр планеты является выяснение причин и условий, влияющих на пространственно-временную эволюцию конвекции в мантии Земли, поскольку именно эта характеристика во многом определяет кинематику литосферных плит и геологическую историю развития континентальных областей. Численные модели трехмерной конвекции в мантии Земли представлены в целом ряде работ [1–22] (там же можно найти более подробную библиографию). Отметим работу [6], в которой для решения модельной задачи о конвективном течении высоковязкой жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, построен численный метод, основанный на введении векторного потенциала скорости и применении метода конечных элементов со специальным базисом из кубических сплайнов для расчета этого потенциала. Из недавно вышедших отметим также работу [16], в которой в двумерном приближении рассчитана модель мантийной конвекции с фазовыми переходами и неньютоновской вязкостью с внутренними источниками тепла. В работе [19] анализируется влияние сжимаемости вещества и сферичности мантии на распределение температуры в различных моделях мантийной конвекции. Приводится математическая модель, дающая усредненное по латерали распределение температуры по глубине в основной части мантии, согласующееся с данными о термодинамических параметрах вещества мантии и значениями температуры в реперных точках, связанных с фазовыми переходами. Вопросы математического моделирования общемантийной конвекции (до глубины порядка 2900 км) обсуждаются в [19, 21]. Отмечается, что в настоящее время остается существенная неопределенность граничных значений температуры мантии на глубинах 2700–2850 км. Построен класстер обработки геофизических данных в модели облачных технологий [20]. В качестве примера решена задача о сферической мантийной конвекции с использованием данных сейсмической томографии. Предложенная архитектура позволяет существенно сократить время расчетов.

Хорошо известно, что методы расщепления по физическим процессам и пространственным переменным по-прежнему являются эффективными при решении задач гидродинамики [23, 24]. В настоящей работе анализируется применение не рассмотренного авторами ранее неявного метода расщепления по физическим процессам к расчету модельных задач конвекции в мантии Земли в сопоставлении с неявным методом расщепления с коррекцией давления [23–27]. Продолжены численные эксперименты по разработке и тестированию численных моделей конвекции в мантии Земли. Осуществлено сопоставление с рядом не рассмотренных ранее вариантов расчетов международного теста [1]. Предложен тест для численных моделей конвекции в верхней мантии Земли.

1. Математическая постановка задачи

Для моделирования конвекции в верхней мантии Земли привлекается известная математическая модель, включающая в себя обезразмеренные уравнения Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска и геодинамическом приближении [28]:

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla p = \nabla \sigma + (\text{Ra } T) \mathbf{e}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\mathbf{V}T) = \nabla^2 T, \quad (3)$$

где $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$ — вектор скорости; p — дефект давления; σ — тензор вязких напряжений; $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ — безразмерный единичный вектор; $\text{Ra} = \alpha g_z \rho_0 d^3 \Delta T / \eta_0 \chi$ —

число Рэлея; α — температурный коэффициент расширения жидкости; g_z — z -компоненты вектора ускорения силы тяжести \mathbf{g} ; ΔT — разность между температурой на подошве верхней мантии и температурой на поверхности; d — расстояние от поверхности Земли до нижнemanтийной границы; χ — коэффициент температуропроводности; ρ_0 , η_0 — характерные значения плотности ρ и динамической вязкости η соответственно. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры.

В связи с тем, что ниже будут приведены результаты тестирования численных моделей, сформулируем постановку модельной задачи [1]. В декартовой прямоугольной системе координат в прямоугольном параллелепипеде

$$\Pi = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z] \quad (4)$$

для компонент вектора скорости и температуры ставились граничные условия

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = X, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad 0 \leq z \leq Z, \\ u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ y = 0, \quad y = Y, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq z \leq Z, \\ v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \\ z = 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y, \\ u = v = w = 0, \quad T = 1, \\ z = Z, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y, \\ u = v = w = T = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

К системе дифференциальных уравнений (1)–(3) необходимо также добавить начальное распределение температуры $T(x, y, z, 0) = \hat{T}(x, y, z)$. Ввиду стационарности уравнений (1), (2) давление и компоненты вектора скорости при $t = 0$ не задаются.

На рис. 1 схематически изображена расчетная область. Условия (5) можно прокомментировать следующим образом. Для вектора скорости на боковых гранях задаются

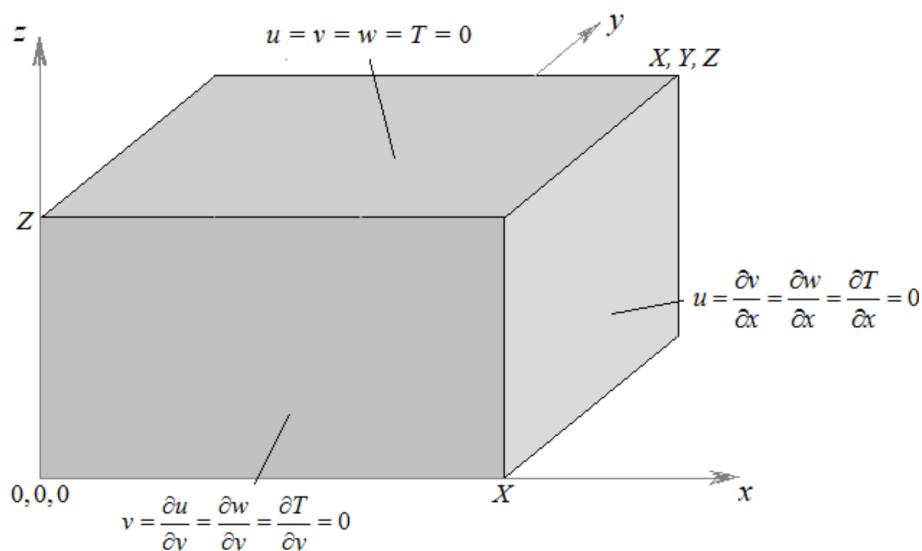


Рис. 1. Схема расчетной области

Fig. 1. Scheme of the calculation area

условия проскальзывания, а на нижней и верхней — условия прилипания. Для температуры на боковых гранях ставятся условия теплоизоляции (адиабатическая стена), т. е. первые нормальные производные на вертикальных стенках равны нулю. На верхней и нижней гранях ставятся условия Дирихле: нулевая температура на верхней и $T = T_0 = 1$ на нижней. Размерные значения T_0 : 1800 °C для верхней мантии и 2700 °C для всей мантии.

1. Численное моделирование, основанное на решении системы дифференциальных уравнений (1)–(3) с применением неявного метода расщепления по пространственным переменным с поправкой давления, осуществлялось по следующему алгоритму [12, 22–27]:

$$\frac{\tilde{v}_i - v_i^{m,n}}{\Delta\tau_v} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_h^{m,n} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \eta^m \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{m,n}}{\partial x_i} \right) \right)_h + \text{Ra}T^m e_i, \quad (6)$$

$$\nabla_h^2(\delta p) = \frac{(\nabla \tilde{\mathbf{V}})_h}{\Delta\tau_v}, \quad (7)$$

$$(\delta p) = p^{m,n+1} - p^{m,n}, \quad (8)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{m,n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\Delta\tau_v} = -\nabla_h(\delta p)^{m,n+1}, \quad (9)$$

$$T^{m+1} = T^m - \Delta t (\nabla(\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) - \nabla^2 T^{m+1})_h. \quad (10)$$

Здесь Δt — величина шага сетки по времени; m — номер временного слоя; n — номер итерации; $\Delta\tau_v$ — величина итерационного параметра для вычислений вектора скорости (6); $\Delta\tau_p$ — величина итерационного параметра для решения задачи Неймана при решении уравнения Пуассона для разности давления δp (7) (или давления p во втором случае — см. ниже формулу (11)), индекс h означает сеточный аналог выражения в скобках; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Численная реализация алгоритма сводится к выполнению следующих этапов (с применением схемы стабилизирующей поправки и как схемы интегрирования, и как итерационной схемы).

- На первом этапе находится промежуточное поле скорости из векторного уравнения (6).
- Методом стационирования из уравнения (7) рассчитывается поле разности давлений (δp)

$$\frac{(\delta p)^{s+1} - (\delta p)^s}{\Delta\tau_p} = \nabla_h^2(\delta p)^{s+1} - \frac{(\nabla \tilde{\mathbf{V}})_h}{\Delta\tau_v}$$

с условиями Неймана на границах до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости по внутреннему индексу s (расчет производится на слое m по времени и на слое n по фиктивному времени для компонент вектора скорости). Итерационный процесс заканчивается, если выполнено условие

$$\frac{\max_{i,j,k} |(\delta p)_{i,j,k}^{m,n,s+1} - (\delta p)_{i,j,k}^{m,n,s}|}{\max_{i,j,k} |(\delta p)_{i,j,k}^{m,n,s}|} < \epsilon, \quad (11)$$

где $\epsilon > 0$ — малая положительная величина ($\epsilon = 0.00001$). После выполнения условия сходимости (11) из уравнения (8) вычисляется давление на $(n+1)$ -м слое:

$$p^{m,n+1} = (\delta p)^{m,n,s+1} + p^{m,n}.$$

- Из уравнения (9) отыскивается окончательное поле скорости на итерационном слое $n + 1$ для временного слоя m .
 - Путем решения уравнения (10) с шагом по времени Δt вычисляется поле температуры на временном слое $m + 1$. Процесс повторяется до некоторого значения $t_M = M\Delta t$, $m = 1, 2, \dots, M$.
2. Расчеты с применением неявной версии метода расщепления по физическим процессам осуществляются по схеме [26]

$$\frac{\tilde{v}_i - v_i^{m,n}}{\Delta\tau_v} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \eta^m \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{m,n}}{\partial x_i} \right) \right]_h + \text{Ra} T^m e_i, \quad (12)$$

$$\nabla_h^2 p = \frac{(\nabla \tilde{\mathbf{V}})_h}{\Delta\tau_v}, \quad (13)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{m,n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\Delta\tau_v} = -\nabla_h p^{m,n+1}, \quad (14)$$

$$T^{m+1} = T^m - \Delta t (\nabla(\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) - \nabla^2 T^{m+1})_h.$$

На первом шаге (12) находится промежуточное значение вектора скорости без учета давления. На втором (13) — решается задача Неймана для уравнения Пуассона для давления:

$$\frac{(p)^{s+1} - (p)^s}{\Delta\tau_p} = \nabla_h^2(p)^{s+1} - \frac{(\nabla \tilde{\mathbf{V}})_h}{\Delta\tau_v}.$$

Здесь $\Delta\tau_p$ — величина итерационного параметра при решении задачи Неймана уравнения Пуассона (13). На следующем шаге (14) уточняются компоненты вектора скорости. По-прежнему схема стабилизирующей поправки используется и как итерационная, и как схема интегрирования.

Последовательность вычислений аналогична предыдущему случаю.

2. Некоторые результаты тестирования численных моделей трехмерных конвективных течений в мантии Земли

2.1. Общемантийная конвекция

Размерные значения (в системе СИ), которые использованы в [1] и в настоящей работе для всей мантии: $d = 2700\,000$ м, $\Delta T = 3700$ °C, $\chi = 10^{-6}$ м²/с, $\alpha = 10^{-5}$ (°C)⁻¹, $\rho = 3300$ кг/м³, $g_z = 10$ м/с², $\eta_0 = 1.2065 \cdot 10^{24}$ кг/(м·с).

В качестве начального распределения температуры \tilde{T} принято [1]:

$$\tilde{T}(x, y, z) = (1 - z) + 0.2 \left(\cos \frac{\pi x}{X} + \cos \frac{\pi y}{Y} \right) \sin(\pi z).$$

Поле обезразмеренной переменной вязкости задавалось формулой

$$\eta(T) = \exp \left(\frac{\theta}{T + \Theta} - \frac{\theta}{0.50 + \Theta} \right), \quad \theta = \frac{225}{\ln(q)} - 0.25 \ln(q), \quad \Theta = \frac{15}{\ln(q)} - 0.50, \quad q = \frac{\eta|_{T=0}}{\eta|_{T=1}} = 20.$$

При сопоставлении с [1] расчеты производились в прямоугольном параллелепипеде (4), в котором $X = Y = Z = 1$. Учитывая масштабный множитель при вязкости $\eta_0 = 1.2065 \cdot 10^{24}$ кг/(м·с), получим число Рэлея $\text{Ra} = 20\,000$. В задаче [1] с переменной вязкостью вычислялись характерные величины, приведенные в табл. 1. Вычисления проводились на равномерной сетке с числом узлов $33 \times 33 \times 65$. Результаты численных

Т а б л и ц а 1. Вычисляемые параметры тестирования

Table 1. Calculated test parameters

№ п/п	Параметр
1	Число Нуссельта по формуле $Nu = -(XY)^{-1} \iint_{S_{\text{top}}} \frac{\partial T}{\partial z} dx dy$, где S_{top} — верхняя поверхность параллелепипеда
2	Среднеквадратичная скорость $V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{XYZ} \iiint_A (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz}$, где A — объем параллелепипеда со сторонами $X, Y, Z = 1$
3	Значение вертикальной компоненты скорости w и температуры T в угловых точках среднего сечения конвективного слоя
4	Значение теплового потока $Q = -\partial T / \partial z$ в угловых точках верхней поверхности куба
5	Интегральный параметр, вычисляемый по формуле $\lambda(x, z) = \int_0^Y \frac{\partial T}{\partial z} dy$ вдоль линий, параллельных оси Y : от точки $(0, 0, 1/4)$ до точки $(0, 1, 1/4)$, от точки $(1/2, 0, 1/4)$ до $(1/2, 1, 1/4)$ и от точки $(1, 0, 1/4)$ до точки $(1, 1, 1/4)$
6	Средняя температура $T_m = \iint_{S_z} T dx dy$, вычисляемая на горизонтальных сечениях области $S_{z=0.75}$ и $S_{z=0.50}$ на глубинах $z = 3/4$ и $z = 1/2$
7	Значения высоты рельефа H_z в углах вычислительной области, м
8	Значение вертикальной компоненты вектора завихренности в точке $(3/4, 1/2, 3/4)$

экспериментов представлены в табл. 2, где Chr — расчетные данные Кристенсена (наиболее полные из [1]); MCP — расчеты авторов на основе алгоритма с коррекцией давления; MFP — расчеты авторов с применением неявной реализации метода расщепления по физическим процессам.

Ошибка Err вычислялась по формуле

$$\text{Err} = \left| \frac{\text{Test} - \text{Method}}{\text{Test}} \right| \cdot 100 \%,$$

где Method — это расчеты на основе MCP либо MFP; Test — на основе Chr (табл. 2) либо Che — результаты расчетов авторов с применением неявной версии метода искусственной сжимаемости (табл. 3 и 4). Результаты расчетов близки. Однако, как показали численные эксперименты, вычисления по неявной реализации метода расщепления по физическим процессам до достижения представленной точности требовали примерно в два раза больше компьютерного времени. Значительно уменьшились диапазоны варьирования шага по времени Δt и итерационных параметров $\Delta\tau_p$, $\Delta\tau_v$. По-видимому, такая ситуация обусловлена отсутствием свойства полной аппроксимации у неявного метода расщепления по физическим процессам.

В настоящей работе расчеты проводились также и в условиях теста М. Огавы (M. Ogawa), одного из соавторов статьи [1], который предложил для вычислений расширенную область с соотношениями по направлениям x и y , равными $3X$, $3Y$ и $Z = 1$.

На рис. 2 сопоставляются результаты расчетов авторов и М. Огавы для варианта переменной вязкости. Расчеты выполнены на равномерной сетке с числом узлов

Т а б л и ц а 2. Сопоставление результатов Busse при $d = 2700$ км, $\text{Ra} = 20\,000$ Table 2. Comparison of Busse results at $d = 2700$ km, $\text{Ra} = 20\,000$

Параметр	Chr	MCP	Err, %	MFP	Err, %
Nu	3.0393	3.0430	0.1219	3.0974	1.8760
V_{rms}	35.1300	35.0419	0.2515	35.6258	1.3918
$T(0, 0, 1/2)$	0.9053	0.9056	0.0388	0.9089	0.3970
$T(0, 1, 1/2)$	0.4957	0.4992	0.7179	0.4987	0.6047
$T(1, 1, 1/2)$	0.2393	0.2413	0.8305	0.2407	0.6207
$w(0, 0, 1/2)$	165.9000	164.3950	0.9154	168.4820	1.5328
$w(0, 1, 1/2)$	-26.7200	-26.1664	2.1159	-27.0296	1.1455
$w(1, 1, 1/2)$	-58.2300	-58.0118	0.3761	-59.0306	1.3563
$Q(0, 0)$	0.5059	0.5052	0.1385	-0.5079	0.3917
$Q(0, 1)$	0.1921	0.1895	1.3825	-0.1961	2.0191
$Q(1, 1)$	0.1388	0.1357	2.2977	-0.1377	0.8149
$T_m(3/4)$	0.5659	0.5638	0.3757	0.5690	0.5361
$T_m(1/2)$	0.5816	0.5824	0.1424	0.5840	0.4083
$\lambda(0, 1/4)$	5.8339	5.8056	0.4882	5.9550	2.0329
$\lambda(1/2, 1/4)$	1.7136	1.7332	1.1290	1.7216	0.4637
$\lambda(1, 1/4)$	0.7684	0.7792	1.3888	0.7668	0.2085
$\omega^z(3/4, 1/4, 3/4)$	-11.1250	-10.9808	1.3133	-11.4215	2.5958
$H_z(0, 0, 1)$	10 838.0000	10 795.2000	0.3967	10 597.7000	2.2679
$H_z(0, 1, 1)$	-3908.0000	-4101.3700	4.7147	-3972.1100	1.6140
$H_z(1, 1, 1)$	-12 480.0000	-12 745.0000	2.0791	-12 175.9000	2.4975

Т а б л и ц а 3. Сопоставление результатов авторов при $d = 700$ км, $\text{Ra} = 20\,000$ Table 3. Comparison of the authors' results at $d = 700$ km, $\text{Ra} = 20\,000$

Параметр	Che	MCP	Err, %	MFP	Err, %
Nu	2.0604	2.0598	0.0285	2.0972	1.7555
V_{rms}	13.7104	13.7075	0.0209	13.9715	1.8689
$T(0, 0, 1/2)$	0.7908	0.7894	0.1765	0.7956	0.5992
$T(0, 1, 1/2)$	0.2487	0.2487	0.0351	0.2476	0.4156
$T(1, 1, 1/2)$	0.1088	0.1088	0.0079	0.1076	1.1378
$w(0, 0, 1/2)$	63.4244	63.1805	0.3860	65.0906	2.5599
$w(0, 1, 1/2)$	-7.2279	-7.2096	0.2540	-7.4178	2.5596
$w(1, 1, 1/2)$	-10.2565	-10.2501	0.0625	-10.4727	2.0645
$Q(0, 0)$	-1.1540	-1.1542	0.0093	-1.1558	0.1508
$Q(0, 1)$	-1.5146	-1.5144	0.0105	-1.5099	0.3122
$Q(1, 1)$	-1.7274	-1.7271	0.0139	-1.7188	0.4996
$T_m(3/4)$	0.2923	0.2921	0.0732	0.2948	0.8557
$T_m(1/2)$	0.3123	0.3124	0.0431	0.3130	0.2135
$\lambda(0, 1/4)$	6.0523	6.0851	0.5381	6.2090	2.5225
$\lambda(1/2, 1/4)$	0.7369	0.7389	0.2820	0.7468	1.3369
$\lambda(1, 1/4)$	0.2161	0.2161	0.0161	0.2169	0.3664
$\omega^z(3/4, 1/4, 3/4)$	-4.8476	-4.8213	0.5465	-4.9173	1.4170
$H_z(0, 0, 1)$	1187.0800	1172.9800	1.2026	1168.7900	1.5651
$H_z(0, 1, 1)$	-361.9130	-355.1840	1.8946	-345.3380	4.7999
$H_z(1, 1, 1)$	-861.1850	-853.0450	0.9543	-834.3620	3.2148

$65 \times 65 \times 129$ с применением метода расщепления по физическим процессам. Можно видеть хорошее согласие. Ранее [29] отмечалось хорошее согласие расчетов М. Огавы [1] и расчетов авторов по схеме (6)–(10) с коррекцией давления. Неявная схема расщепления по физическим процессам требует примерно в два раза больше машинного времени в сравнении с неявным методом при коррекции давления.

Т а б л и ц а 4. Сопоставление результатов авторов при $d = 700$ км, $\text{Ra} = 200\,000$
Table 4. Comparison of the authors' results at $d = 700$ km, $\text{Ra} = 200\,000$

Параметр	Che	MCP	Err, %	MFP	Err, %
Nu	3.7140	3.6747	1.0582	3.7898	2.0409
V_{rms}	55.4932	54.6256	1.5634	56.3206	1.4910
$T(0, 0, 1/2)$	0.8149	0.8073	0.9326	0.8163	0.1718
$T(0, 1, 1/2)$	0.2020	0.2009	0.5446	0.2063	2.1287
$T(1, 1, 1/2)$	0.0944	0.0934	1.0593	0.0969	2.6483
$w(0, 0, 1/2)$	443.0000	433.9810	2.0359	446.7170	0.8391
$w(0, 1, 1/2)$	-21.0000	-20.8308	0.8057	-21.1528	0.7276
$w(1, 1, 1/2)$	-45.7566	-45.6074	0.3261	-46.8730	2.4399
$Q(0, 0)$	-1.3369	-1.3401	0.2394	-1.3554	1.3838
$Q(0, 1)$	-1.1035	-1.0953	0.7431	-1.0991	0.3987
$Q(1, 1)$	-0.9741	-0.9689	0.5338	-0.9657	0.8623
$T_m(3/4)$	0.2701	0.2700	0.0370	0.2767	2.4435
$T_m(1/2)$	0.2373	0.2345	1.1799	0.2408	1.4749
$\lambda(0, 1/4)$	15.0200	14.5908	2.8575	15.4558	2.9015
$\lambda(1/2, 1/4)$	1.1391	1.1315	0.6672	1.1677	2.5108
$\lambda(1, 1/4)$	0.3590	0.3707	3.2591	0.3537	1.4763
$\omega^z(3/4, 1/4, 3/4)$	-11.0000	-11.1332	1.2109	-11.3603	3.2755
$H_z(0, 0, 1)$	906.2890	883.8920	2.4713	900.5250	0.6360
$H_z(0, 1, 1)$	-274.7800	-279.3020	1.6457	-283.4540	3.1567
$H_z(1, 1, 1)$	-579.5500	-578.0870	0.2524	-587.0770	1.2988

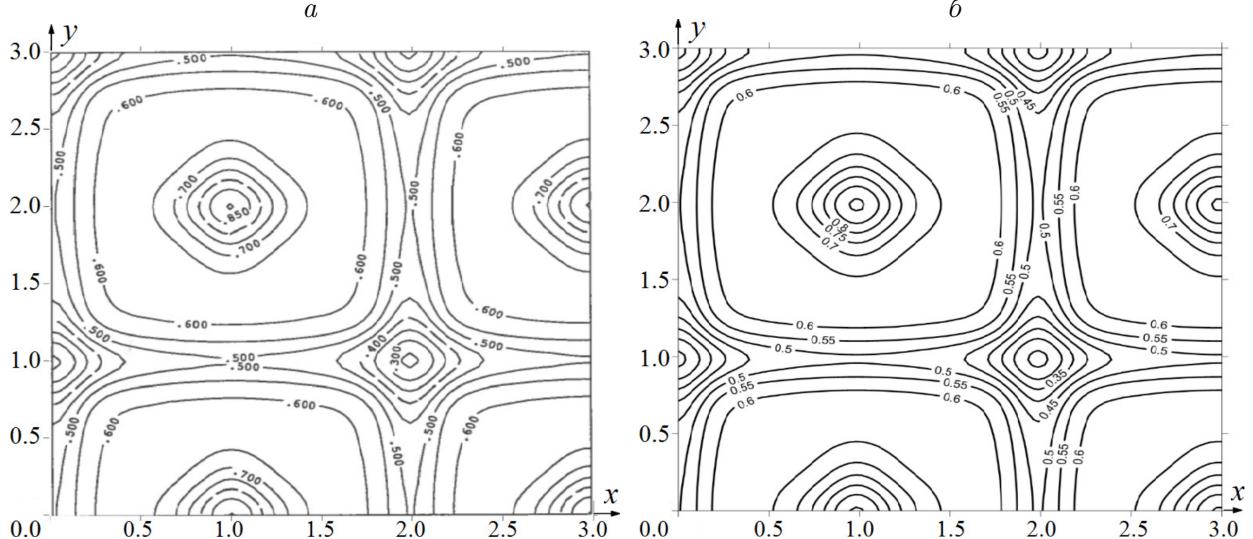


Рис. 2. Результаты расчетов варианта переменной вязкости: линии $T = \text{const}$ соответствуют $z = 0.5$; a — расчеты М. Огавы; b — результаты авторов

Fig. 2. The calculation results for case of the variable viscosity: lines $T = \text{const}$ corresponding to $z = 0.5$; a — calculations of M. Ogawa, b — the authors' results

2.2. Верхняя мантия Земли

Представим сформулированный по аналогии с [1] тест для верхней мантии. Основные параметры задачи в системе СИ для верхней мантии выбирались следующими:

$$\begin{aligned} d &= 700\,000 \text{ м}, \quad \Delta T = 1800 \text{ }^{\circ}\text{C}, \quad \chi = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \alpha = 2 \cdot 10^{-5} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}, \\ \rho_0 &= 3300 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad g_z = 10 \text{ м}/\text{с}^2, \quad \eta_0 = 1.01871 \cdot 10^{22} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}), \quad \text{Ra} = 20\,000. \end{aligned} \quad (15)$$

Образмеренная переменная вязкость для верхней мантии задавалась формулой (см. рис. 3)

$$\begin{aligned} \eta(x, y, z, t) &= \exp(b(1 - z) - aT(x, y, z, t)), \\ a &= 3.89, \quad b = 5.84. \end{aligned} \quad (16)$$

Основные характеристики задачи для верхней мантии (см. табл. 3, столбец 2) предварительно получены с помощью решения задачи неявной версией метода искусственной сжимаемости [13] на двух сетках ($65 \times 65 \times 129$ и $129 \times 129 \times 257$) с последующей экстраполяцией по Ричардсону по формуле

$$\Phi_{i,j,k}^{2,1} = \frac{4\Phi_{2i-1,2j-1,2k-1}^2 - \Phi_{i,j,k}^1}{3}, \quad i, j, k \text{ — номера узлов сетки.}$$

Эта новая задача решалась также методом $(\Psi - \Omega)$ [7–11] и неявным методом расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления [12, 22]. Все три вышеупомянутые численные модели дали практически совпадающие параметры из набора параметров теста [1] с переменной вязкостью (16). В настоящей работе для решения задачи привлекался также неявный метод расщепления по физическим процессам (12)–(14). Сопоставление результатов с результатами, полученными методом расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления, приведены в табл. 3.

Таким образом, в роли тестового решения выступает вышеупомянутое решение на последовательности двух сеток с экстраполяцией по Ричардсону. Согласие достаточно хорошее. В изложенных выше тестовых расчетах число Рэлея $\text{Ra} = 20\,000$, однако

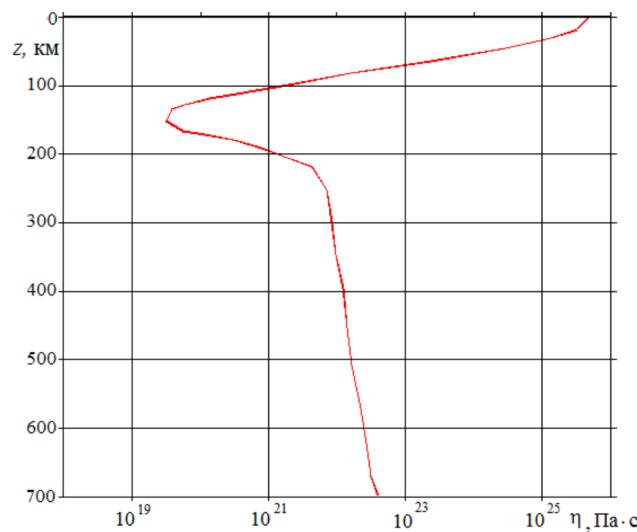


Рис. 3. Вязкость, вычисленная по (16) при $t = 0$, на горизонтальной оси, на вертикальной — глубина

Fig. 3. The viscosity calculated by (16) at $t = 0$ on the horizontal axis, on the vertical — the depth

при численном моделировании реальных задач [11] приходится проводить расчеты при $Ra = 200\,000$. В настоящей работе сформулирован тест и для этого числа Рэлея; такое число Ra достигалось в условиях (15), но при $\eta_0 = 1.01871 \cdot 10^{21}$ кг/(м·с). Тестовое решение (как и в табл. 3) формировалось на основе неявной версии метода искусственной сжимаемости на двух сетках с последующей экстраполяцией по Ричардсону. Результаты расчетов (см. табл. 4) с применением существенно различающихся методов близки, что свидетельствует о надежности числовых данных.

Заключение

Разработана численная модель конвекции в мантии Земли, основанная на неявном методе расщепления по физическим процессам. Результаты расчетов с ее применением хорошо согласуются с результатами известного международного теста по общемантийной конвекции и расчетами на основе других численных моделей авторов, однако требуется значительно (примерно в два раза) большее компьютерное время в сравнении с расчетами по неявному методу расщепления с коррекцией давления. Построен тест для численных моделей конвективных течений в верхней мантии Земли, соответствующий двум значениям числа Рэлея: $Ra = 20\,000$ и $Ra = 200\,000$.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Госзадания № 0331-2019-0010 ИНГГ им. А.А. Трофимука СО РАН и по теме “Разработка и исследование вычислительных технологий решения фундаментальных и прикладных задач аэро-, гидро- и волновой динамики” государственного задания ФИЦ ИВТ.

Список литературы

- [1] Busse F.H., Christensen U., Clever R., Cserepes L., Gable C., Giannandrea E., Guillou L., Houseman G., Nataf H.-C., Ogawa M., Parmentier M., Sotin C., Travis B.D. 3D convection at infinite Prandtl number in Cartesian geometry — a benchmark comparison. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*. 1993; (75):39–59.
- [2] Трубицын В.П., Бобров А.М., Кубышкин В.В. Влияние континентальной литосферы на структуру мантийной тепловой конвекции. *Физика Земли*. 1993; (5):3–11.
- [3] Рыков В.В., Трубицын В.П. Трехмерная модель мантийной конвекции с движущимися континентами. *Вычислительная сейсмология*. 1994; (27):21–41.
- [4] Трубицын В.П., Белавина Ю.Ф., Рыков В.В. Тепловая конвекция в мантии с переменной вязкостью и континентальной плитой конечных размеров. *Физика Земли*. 1994; (7–8):5–17.
- [5] Бобров А.М., Трубицын В.П. Времена перестроек структуры мантийных течений под континентами. *Физика Земли*. 1995; (7):5–13.
- [6] Исмаил-Заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2001; 41(9):1399–1415.
- [7] Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала. *Вычислительные технологии*. 2002; 7(1):114–125.

- [8] **Червов В.В.** Численное моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток. Вычислительные технологии. 2002; 7(3):85–92.
- [9] **Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г.** О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли. Доклады Академии наук. 2005; 402(2):248–254.
- [10] **Tychkov S.A., Chervov V.V., Chernykh G.G.** Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2005; 20(5):483–500.
- [11] **Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г.** Численная модель трехмерной конвекции в верхней мантии Земли. Физика Земли. 2005; (5):48–64.
- [12] **Червов В.В.** Моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам. Вычислительные технологии. 2006; 11(4):73–86.
- [13] **Червов В.В.** Моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода слабой сжимаемости. Вычислительные технологии. 2009; 14(3):86–92.
- [14] **Червов В.В., Черных Г.Г., Бушенкова Н.А., Кулаков И.Ю.** Численное моделирование трехмерной конвекции в верхней мантии Земли под литосферой Евразии. Вычислительные технологии. 2014; 19(5):101–114.
- [15] **Chervov V.V., Chernykh G.G.** Numerical modeling of three-dimensional convection in the upper mantle of the Earth beneath Eurasia lithosphere. Journal of Engineering Thermophysics. 2014; 23(2):105–111.
- [16] **Бобров А.М., Баранов А.А.** Модель мантийной конвекции с неньютоновской реологией и фазовыми переходами: структура течений и поля напряжений. Физика Земли. 2016; 52(1):133–148.
- [17] **Heister T., Dannberg J., Gassmoller R., Bangerth W.** High accuracy mantle convection through modern numerical methods. II: realistic models and problems. Geophysical Journal International. 2017; 210(2):833–851.
- [18] **Chervov V.V., Chernykh G.G.** Numerical modeling of convection in the zone of spreading and subduction. Journal of Engineering Thermophysics. 2019; 28(1):14–25.
- [19] **Трубицын А.П., Трубицын В.П.** Распределение температуры в мантии Земли. Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. 2020; 495(2):41–45.
- [20] **Чуваев А.В., Баранов А.А., Бобров А.М.** Численное моделирование конвекции в мантии Земли с использованием облачных технологий. Вычислительные технологии. 2020; 25(2):103–118. DOI:10.25743/ICT.2020.25.2.009.
- [21] **Трубицын А.П., Трубицын В.П.** Тепловой баланс Земли. Доклады Российской академии Наук. Науки о Земле. 2021; 500(1):47–52.
- [22] **Червов В.В., Бушенкова Н.А., Черных Г.Г.** Тектонические прогибы на Восточно-Европейской и Сибирской платформах: численное моделирование конвекции под Евразийским континентом. Геодинамика и тектонофизика. 2021; 12(1):84–99. DOI:10.5800/GT-2021-12-1-0514.
- [23] **Толстых А.И.** Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука; 1990: 230.
- [24] **Ковеня В.М.** Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН; 2014: 280. DOI:10.1134/S1990478918030080.

- [25] **Даниленко А.Ю., Толстых А.И.** Неявный метод для расчета нестационарных движений вязкой жидкости. Численные методы динамики вязкой жидкости. Труды IX Всесоюзной школы-семинара. Новосибирск; 1983: 110–114.
- [26] **Белоцерковский О.М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука; 1984: 520.
- [27] **Даниленко А.Ю., Костин В.И., Толстых А.И.** О неявном алгоритме расчета течений однородной и неоднородной жидкости. М.: ВЦ АН СССР; 1985: 30.
- [28] **Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А.** Глубинная геодинамика. 2-е изд. Новосибирск: СО РАН; 2001: 409.
- [29] **Chervov V.V., Chernykh G.G.** On mathematical modeling of convection in the upper mantle of Earth. Journal of Engineering Thermophysics. 2023; 32(1):36–48.

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2024.29.2.003

Mathematical modelling of convection in the upper mantle of the Earth with using an implicit method of splitting by physical processes

V. V. CHERVOV¹, G. G. CHERNYKH^{2,*}

¹Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

²Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Gennadiy G. Chernykh, e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

Received April 21, 2023, revised May 15, 2023, accepted May 22, 2023.

Abstract

To describe three-dimensional convection in the Earth's mantle, a well-known mathematical model is used, which includes the Navier – Stokes equations in the Oberbeck – Boussinesq approximation and the geodynamic approximation. The numerical model of convection in this paper is based on the implicit implementation of the splitting method by physical processes. The velocity field and the pressure defect on each layer are determined in time by the stationing method. At each layer, it is necessary to integrate the thermal conductivity equation over time. The authors use an implicit scheme of stabilizing correction as an integration scheme. Non-linearity iterations are performed. The constructed numerical model was tested by solving the model problem of convection in a unit cube in a liquid with a nonlinear viscosity corresponding to convection in the Earth's general mantle [1]. The calculation results are in good agreement with the results of this test. However, in comparison with the previously developed numerical model based on the implicit splitting method with pressure correction, it takes about twice as much computer time to achieve comparable calculation accuracy when using the implicit implementation of the splitting method for physical processes. A test for convection problems in the upper mantle of the Earth is constructed; the results of numerical experiments confirming its reliability are presented. The main numerical parameters of the test were chosen similar to the parameters in the well-known international test for general-party convection [1]. The problem was solved using three numerical models based on implicit splitting methods.

Keywords: three-dimensional convection in the Earth's mantle, implicit difference splitting schemes, testing.

Citation: Chervov V.V., Chernykh G.G. Mathematical modelling of convection in the upper mantle of the Earth with using an implicit method of splitting by physical processes. Computational Technologies. 2024; 29(2):21–34. DOI:10.25743/ICT.2024.29.2.003. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was carried out with partial financial support of the State Task No. 0331-2019-0010 of INGG im. Trofimuk SB RAS (of Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS) and on the topic “Development and research of computational technologies for solving fundamental and applied problems of aero-, hydro- and wave dynamics” of the state task of the FRC ICT.

References

1. Busse F.H., Christensen U., Clever R., Cserepes L., Gable C., Giannandrea E., Guillou L., Houseman G., Nataf H.-C., Ogawa M., Parmentier M., Sotin C., Travis B.D. 3D convection at infinite Prandtl number in Cartesian geometry — a benchmark comparison. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*. 1993; (75):39–59.
2. Trubitsyn V.P., Bobrov A.M., Kubyshkin V.V. The influence of the continental lithosphere on the structure of mantle thermal convection. *Fizika Zemli*. 1993; (5):3–11. (In Russ.)
3. Rykov V.V., Trubitsyn V.P. 3-D model of mantle convection with moving continents. *Vychislitel'naya Seismologiya*. 1994; (27):21–41. (In Russ.)
4. Trubitsyn V.P., Belavina Yu.F., Rykov V.V. Thermal convection inside the mantle with variable viscosity and a continental plate of finite dimensions. *Fizika Zemli*. 1994; (7–8):5–17. (In Russ.)
5. Bobrov A.M., Trubitsyn V.P. Rearrangement times of the mantle flow pattern beneath continents. *Fizika Zemli*. 1995; (7):5–13. (In Russ.)
6. Ismail-Zade A.T., Korotkii A.I., Naimark B.M., Tsepelev I.A. Numerical simulation of three-dimensional viscous flows with gravitational and thermal effects. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2001; 41(9):1331–1345.
7. Chervov V.V. Numerical modeling of three-dimensional problems on convection in Earth mantle with application of vorticity and vector potential. *Computational Technologies*. 2002; 7(1):114–125. (In Russ.)
8. Chervov V.V. Numerical modeling of three-dimensional convection problems in Earth mantle using the series of grids. *Computational Technologies*. 2002; 7(3):85–92. (In Russ.)
9. Tychkov S.A., Chervov V.V., Chernykh G.G. Numerical modeling of thermal convection in the Earth's mantle. *Doklady Earth Sciences*. 2005; 402(4):596–601.
10. Tychkov S.A., Chervov V.V., Chernykh G.G. Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2005; 20(5):483–500.
11. Tychkov S.A., Chervov V.V., Chernykh G.G. A numerical model of three-dimensional convection in the upper mantle. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2005; 41(5):383–398.
12. Chervov V.V. Modelling of 3-d convection in the Earth mantle using an implicit splitting method over the physical processes. *Computational Technologies*. 2006; 11(4):73–86. (In Russ.)
13. Chervov V.V. Modelling of a 3D convection in the Earth mantle using an implicit method with weak compressibility. *Computational Technologies*. 2009; 14(3):86–92. (In Russ.)
14. Chervov V.V., Chernykh G.G., Bushenkova N.A., Koulakov I.Yu. Numerical modelling of 3D convection in the upper Earth mantle under lithosphere of Eurasia. *Computational Technologies*. 2014; 19(5):101–114. (In Russ.)
15. Chervov V.V., Chernykh G.G. Numerical modeling of three-dimensional convection in the upper mantle of the Earth beneath Eurasia lithosphere. *Journal of Engineering Thermophysics*. 2014; 23(2):105–111.
16. Bobrov A.M., Baranov A.A. The mantle convection model with non-newtonian rheology and phase transitions: the flow structure and stress fields. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2016; 52(1):129–143.
17. Heister T., Dannberg J., Gassmoller R., Bangerth W. High accuracy mantle convection through modern numerical methods. II: realistic models and problems. *Geophysical Journal International*. 2017; 210(2):833–851.
18. Chervov V.V., Chernykh G.G. Numerical modeling of convection in the zone of spreading and subduction. *Journal of Engineering Thermophysics*. 2019; 28(1):14–25.
19. Trubitsyn A.P., Trubitsyn V.P. Temperature distribution in the Earth's mantle. *Doklady Earth Sciences*. 2020; 495(2):905–909.
20. Chuvaev A.V., Baranov A.A., Bobrov A.M. Numerical modelling of mantle convection in the Earth using cloud technologies. *Computational Technologies*. 2020; 25(2):103–118. DOI:10.25743/ICT.2020.25.2.009. (In Russ.)

21. **Trubitsyn A.P., Trubitsyn V.P.** The heat balance in the Earth. *Doklady Earth Sciences*. 2021; 500(1):746–750.
22. **Chervov V.V., Bushenkova N.A., Chernykh G.G.** Tectonic depressions on the East-European and Siberian platforms: numerical modeling of convection beneath the Eurasian continent. *Geodynamics & Tectonophysics*. 2021; 12(1):84–99. DOI:10.5800/GT-2021-12-1-0514. (In Russ.)
23. **Tolstykh A.I.** Kompaktnye raznostnye skhemy i ikh primenenie v zadachakh aerogidrodinamiki [Compact difference schemes and their application to fluid dynamics problems]. Moscow: Nauka; 1990: 230. (In Russ.)
24. **Kovenya V.M.** Algoritmy rasshchepleniya pri reshenii mnogomernykh zadach aerogidrodinamiki [Splitting algorithms for solving multidimensional problems of aerohydrodynamics]. Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN; 2014: 280. DOI:10.1134/S1990478918030080. (In Russ.)
25. **Danilenko A.Yu., Tolstykh A.I.** Neyavnyy metod dlya rascheta nestatsionarnykh dvizheniy vyazkoy zhidkosti. Chislennye metody dinamiki vyazkoy zhidkosti [An implicit method for calculating unsteady motions of a viscous fluid]. Numerical methods of viscous fluid dynamics. Proceedings of the IX All-Union School-Seminar. Novosibirsk; 1983: 110–114. (In Russ.)
26. **Belotserkovsky O.M.** Chislennoe modelirovaniye v mekhanike sploshnykh sred [Numerical modelling in continuum mechanics]. Moscow: Nauka; 1984: 520. (In Russ.)
27. **Danilenko A.Yu., Kostin V.I., Tolstykh A.I.** O neyavnom algoritme rascheta techeniy odnorodnoy i neodnorodnoy zhidkosti [On an implicit algorithm for calculating flows of homogeneous and inhomogeneous fluid]. Moscow: VTs AN SSSR; 1985: 30. (In Russ.)
28. **Dobretsov N.L., Kirdyashkin A.G., Kirdyashkin A.A.** Glubinnaya geodinamika [Deep geodynamics]. Novosibirsk: SO RAN; 2001: 409. (In Russ.)
29. **Chervov V.V., Chernykh G.G.** On mathematical modeling of convection in the upper mantle of Earth. *Journal of Engineering Thermophysics*. 2023; 32(1):36–48.