

## Анализ различных модификаций схемы CABARET, аппроксимирующей уравнения газовой динамики

В. А. Колотиллов<sup>1,2,\*</sup>, В. В. Остапенко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор: Колотиллов Вадим Алексеевич, e-mail: kolotilov1992@gmail.com

Поступила 26 июня 2023 г., доработана 23 октября 2023 г., принята в печать 20 ноября 2023 г.

На основе метода квазиинвариантов построены различные модификации схемы CABARET, аппроксимирующие систему уравнений газовой динамики неизоэнтропических течений. Проведен сравнительный анализ точности этих модификаций при расчете трех различных задач Римана (в частности, задач Сода и Лакса) о распаде начального разрыва в политропном газе. Показано, что некоторые модификации схемы CABARET могут иметь существенные преимущества по сравнению с другими модификациями этой схемы относительно различных критериев, связанных с оптимальной локализацией сильных и слабых разрывов точного решения.

*Ключевые слова:* схема CABARET, метод квазиинвариантов, уравнения газовой динамики.

*Цитирование:* Колотиллов В.А., Остапенко В.В. Анализ различных модификаций схемы CABARET, аппроксимирующей уравнения газовой динамики. Вычислительные технологии. 2024; 29(3):52–69. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.005.

## Введение

Стандартный алгоритм схемы CABARET [1, 2], аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения [3], предполагает, что эта система допускает запись в форме инвариантов. В этом случае монотонные модификации схемы CABARET [4–8] позволяют с высокой точностью локализовать сильные и слабые разрывы точного решения. Однако, если гиперболическая система не допускает записи в форме инвариантов, то для построения схемы CABARET, аппроксимирующей эту систему, необходимо применять квазиинварианты [2], которые в общем случае определяются неоднозначно.

В [9] приводится метод построения квазиинвариантов на основе некоторой недивергентной формы записи аппроксимируемой гиперболической системы законов сохранения. Дана классификация квазиинвариантов относительно их нелинейной зависимости от искоемых функций этой недивергентной системы и описан способ получения квазиинвариантов заданного порядка нелинейности. В качестве примера для системы уравнений газовой динамики неизоэнтропических течений [3], которая замыкается уравнением состояния

$$p = p(\rho, S), \quad (1)$$

где  $p$ ,  $\rho$  и  $S$  — давление, плотность и энтропия, построены три различных семейства квазиинвариантов, получаемые из классической недивергентной формы записи этой системы относительно функций  $\rho$ ,  $u$ ,  $S$ , где  $u$  — скорость газа. Поскольку каждому семейству квазиинвариантов соответствует своя модификация схемы CABARET, то в [9] проведен сравнительный анализ точности этих модификаций при расчете задачи Сода о распаде начального разрыва в политропном газе.

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [9], для системы уравнений газовой динамики неизоэнтропических течений, которая замыкается одним из следующих уравнений состояния

$$p = p(\rho, \varepsilon), \quad (2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, p), \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — внутренняя энергия, построены различные семейства квазиинвариантов, получаемые из двух недивергентных форм записи этой системы относительно функций  $\rho$ ,  $u$ ,  $\varepsilon$ , что соответствует уравнению состояния (2), и относительно функций  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ , что соответствует уравнению состояния (3). Каждому из этих семейств квазиинвариантов соответствует своя модификация схемы CABARET. Проведен сравнительный анализ точности этих модификаций при расчете трех различных задач Римана (в частности, задач Сода и Лакса) о распаде начального разрыва в политропном газе. Показано, что некоторые модификации схемы CABARET могут иметь существенные преимущества по сравнению с другими модификациями этой схемы относительно критериев, связанных с оптимальной локализацией сильных и слабых разрывов точного решения.

## 1. Гиперболическая система законов сохранения

Рассмотрим строго гиперболическую систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x = 0 \quad (4)$$

и некоторую недивергентную форму ее записи

$$\hat{\mathbf{u}}_t + \hat{A}(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}_x = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{u}(x, t)$  — искомая, а  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  — заданная гладкая вектор-функция, содержащие  $m$  компонент;  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$  — невырожденное преобразование вектора базисных переменных  $\mathbf{u}$ ,

$$\hat{A}(\mathbf{u}) = G^{-1}(\mathbf{u})A(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u}))G(\mathbf{u}), \quad A(\mathbf{u}) = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}), \quad G(\mathbf{u}) = \mathbf{g}_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{u}),$$

$G^{-1}$  — матрица, обратная к матрице  $G$ ;  $\mathbf{g}^{-1}$  — вектор-функция, обратная к  $\mathbf{g}$ . При  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  и  $\hat{A}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u})$  уравнение (5) представляет собой стандартную недивергентную форму записи системы (4).

Систему (5) можно записать в характеристической форме

$$\hat{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}_t + \hat{\lambda}_i(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}_x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

где  $\hat{\lambda}^i$  и  $\hat{\mathbf{l}}^i$  — собственные значения и левые собственные векторы матрицы  $\hat{A}$ . При  $m \geq 3$  дифференциальные формы  $\hat{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{u}})d\hat{\mathbf{u}}$  системы (6) в общем случае неинтегрируемы [3], в силу чего система (4) не имеет полного набора инвариантов. В этом случае

в алгоритме схемы CABARET необходимо использовать квазиинварианты системы (6), метод построения и классификация которых приведены в [9]. Для краткого описания этого метода зафиксируем некоторую дифференциальную форму  $\hat{\mathbf{I}}^i(\hat{\mathbf{u}})d\hat{\mathbf{u}}$ , при ее записи далее в этом разделе значок “тильда” над переменными будем для краткости опускать.

Если дифференциальная форма  $\mathbf{I}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  неинтегрируема, то может существовать такой вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_s^i)$ , где  $s \leq m$ , состоящий из некоторых компонент вектора  $\mathbf{u}$ , что интегрируемой является дифференциальная форма  $\mathbf{I}^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \tilde{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}])d\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}_c$  — произвольный постоянный вектор, а  $\tilde{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_{m-s}^i)$  — вектор, состоящий из тех компонент вектора  $\mathbf{u}$ , которые не вошли в вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}]$ . Функцию  $w_i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \mathbf{u})$ , получаемую в результате такого интегрирования, будем называть квазиинвариантом системы (5) порядка  $s$ . При этом система (5) может иметь  $C_m^s$  различных квазиинвариантов порядка  $s$ , где  $C_m^s$  — биномиальный коэффициент. В [9] показано, что при  $m \geq 2$  система (5) всегда допускает квазиинварианты порядков  $s = m, m-1, m-2$ .

Если дифференциальная форма  $\mathbf{I}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  интегрируема и система (5) имеет классический инвариант  $w_i$ , то для единообразия формулировок будем называть его квазиинвариантом нулевого порядка. Для каждого  $i$ -го характеристического направления системы (5), где  $i = \overline{1, m}$ , зададим квазиинвариант  $w_i$ , в результате чего формируется вектор квазиинвариантов

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m) = \mathbf{W}(\mathbf{u}),$$

относительно которого будем предполагать, что преобразование  $\mathbf{W}(\mathbf{u})$  является невырожденным, т.е.  $|\mathbf{W}_{\mathbf{u}}| \neq 0$ . В [9] приводится детальное описание алгоритма схемы CABARET, использующего данный метод квазиинвариантов.

## 2. Система уравнений газовой динамики

В качестве конкретной гиперболической системы (4) выберем систему уравнений газовой динамики неизоэнтропических течений [3], где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$e = \varepsilon + u^2/2$  — полная энергия газа, которая замыкается одним из трех уравнений состояния (1)–(3). Используя уравнение состояния (1) и применяя основное термодинамическое тождество

$$TdS = d\varepsilon + pdV,$$

где  $T$  — температура и  $V = 1/\rho$  — удельный объем, систему (4), (7) можно записать [3] в классической недивергентной форме (5), где

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ S \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(\hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ a & u & b \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$a = a(\rho, S) = p_\rho(\rho, S)/\rho, \quad b = b(\rho, S) = p_S(\rho, S)/\rho.$$

При условиях  $\rho > 0$ ,  $p > 0$  и  $p_\rho(\rho, S) > 0$  система (1), (5), (8) является строго гиперболической и допускает запись в характеристической форме (6), где

$$\hat{\lambda}_1 = u - c, \quad \hat{\lambda}_2 = u, \quad \hat{\lambda}_3 = u + c \quad (9)$$

— собственные значения матрицы  $\hat{A}(\hat{\mathbf{u}})$ ,  $c = \sqrt{p_\rho(\rho, S)}$  — скорость звука в газе. В [9] из соответствующих системе (1), (5), (8) характеристических уравнений (6) получены три различных семейства квазиинвариантов, для каждого из которых построена своя модификация схемы CABARET. Проведен сравнительный анализ точности этих модификаций при расчете задачи Сода о распаде начального разрыва в политропном газе.

В настоящей работе для получения других семейств квазиинвариантов, которые используются при построении новых модификаций схемы CABARET, рассмотрим две недивергентные формы записи (5) системы (4), (7), первая из которых получается при уравнении состояния (2) и для нее  $\hat{\mathbf{u}} = (\rho, u, \varepsilon)$ , а вторая — при уравнении состояния (3) и для нее  $\hat{\mathbf{u}} = (\rho, u, p)$ .

### 2.1. Недивергентная система (5), для которой $\hat{\mathbf{u}} = (\rho, u, \varepsilon)$

Используя уравнение состояния (2), систему (4), (7) можно записать в недивергентной форме (5), где

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(\hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ a & u & b \\ 0 & d & u \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$a = a(\rho, \varepsilon) = p_\rho(\rho, \varepsilon)/\rho, \quad b = b(\rho, \varepsilon) = p_\varepsilon(\rho, \varepsilon)/\rho, \quad d = d(\rho, \varepsilon) = p(\rho, \varepsilon)/\rho.$$

При выполнении неравенств

$$\rho > 0, \quad p > 0, \quad p_\rho(\rho, \varepsilon) + p(\rho, \varepsilon)p_\varepsilon(\rho, \varepsilon)/\rho^2 > 0 \quad (11)$$

система (2), (5), (10) является строго гиперболической и допускает запись в характеристической форме (6), в которой собственные значения матрицы  $\hat{A}(\hat{\mathbf{u}})$  определяются по формулам (9), а соответствующие им левые собственные векторы имеют вид

$$\hat{\mathbf{l}}^1 = (-\alpha, 1, -\beta), \quad \hat{\mathbf{l}}^2 = (\theta, 0, 1), \quad \hat{\mathbf{l}}^3 = (\alpha, 1, \beta), \quad (12)$$

$$\alpha = p_\rho/(\rho c), \quad \beta = p_\varepsilon/(\rho c), \quad \theta = -p/\rho^2, \quad c = \sqrt{p_\rho + pp_\varepsilon/\rho^2}. \quad (13)$$

Из формул (9) и (12) следует, что дифференциальные формы, соответствующие характеристическим уравнениям (6) системы (2), (5), (10), имеют вид

$$du \mp \alpha(\rho, \varepsilon)d\rho \mp \beta(\rho, \varepsilon)d\varepsilon, \quad \theta(\rho, \varepsilon)d\rho + d\varepsilon. \quad (14)$$

Поскольку коэффициенты дифференциальных форм (14) не зависят от скорости газа  $u$ , эти дифференциальные формы интегрируемы и система (2), (5), (10) имеет полный набор инвариантов. Однако эти инварианты не допускают записи в явном виде, в силу чего их нельзя использовать в алгоритме схемы CABARET. Поэтому далее применяются квазиинварианты системы (2), (5), (10), которые записываются следующим образом:

$$w_1 = u - w, \quad w_2 = f, \quad w_3 = u + w, \quad (15)$$

где  $w$  и  $f$  — искомые функции, определяемые ниже.

Применим три вида квазиинвариантов (15): квазиинварианты второго порядка  $w_i = \mathbf{l}^i(\rho_c, \varepsilon_c)\hat{\mathbf{u}}$ , для которых

$$w = \alpha(\rho_c, \varepsilon_c)\rho + \beta(\rho_c, \varepsilon_c)\varepsilon, \quad f = \theta(\rho_c, \varepsilon_c)\rho + \varepsilon, \quad (16)$$

и два вида нелинейных квазиинвариантов первого порядка, для одного из которых

$$w = \alpha(\rho_c, \varepsilon)\rho + A(\rho_c, \varepsilon), \quad f = \rho + B(\rho_c, \varepsilon), \quad (17)$$

$$A(\rho_c, \varepsilon) = \int \beta(\rho_c, \varepsilon)d\varepsilon, \quad B(\rho_c, \varepsilon) = \int \frac{d\varepsilon}{\theta(\rho_c, \varepsilon)}, \quad (18)$$

а для другого

$$w = C(\rho, \varepsilon_c) + \beta(\rho, \varepsilon_c)\varepsilon, \quad f = D(\rho, \varepsilon_c) + \varepsilon, \quad (19)$$

$$C(\rho, \varepsilon_c) = \int \alpha(\rho, \varepsilon_c)d\rho, \quad D(\rho, \varepsilon_c) = \int \theta(\rho, \varepsilon_c)d\rho. \quad (20)$$

Предполагая, что собственные значения (9) удовлетворяют неравенствам

$$\hat{\lambda}_1 < 0, \quad \hat{\lambda}_2 \geq 0, \quad \hat{\lambda}_3 > 0, \quad (21)$$

что согласуется с параметрами течений рассматриваемых далее задач Римана, запишем алгоритм схемы CABARET [9] на последнем шаге второго этапа, когда в результате решения алгебраической системы

$$\widehat{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1}) = \mathbf{w}_j^{n+1} \quad (22)$$

в каждом пространственном узле  $x_j = jh$  разностной сетки, где  $h$  — пространственный шаг сетки, вычисляется вектор искомых переменных  $\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1} = (\rho, u, \varepsilon)_j^{n+1}$  по известному вектору квазиинвариантов  $\mathbf{w}_j^{n+1} = (w_1, w_2, w_3)_j^{n+1}$ , задаваемому формулами (15)–(20).

Если применяются линейные квазиинварианты (15), (16), то система (22) является линейной и имеет вид

$$u_j^{n+1} - \alpha_{j+1/2}^{n+1/2} \rho_j^{n+1} - \beta_{j+1/2}^{n+1/2} \varepsilon_j^{n+1} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (23)$$

$$\theta_{j-1/2}^{n+1/2} \rho_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1} = (w_2)_j^{n+1}, \quad (24)$$

$$u_j^{n+1} + \alpha_{j-1/2}^{n+1/2} \rho_j^{n+1} + \beta_{j-1/2}^{n+1/2} \varepsilon_j^{n+1} = (w_3)_j^{n+1}, \quad (25)$$

где

$$\alpha_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \alpha(\rho_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, \varepsilon_{j\pm 1/2}^{n+1/2}), \quad \theta_{j-1/2}^{n+1/2} = \theta(\rho_{j-1/2}^{n+1/2}, \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2}).$$

Система (23)–(25) имеет определитель

$$\Delta_j^{n+1/2} = (\beta_{j-1/2}^{n+1/2} + \beta_{j+1/2}^{n+1/2}) \theta_{j-1/2}^{n+1/2} - \alpha_{j-1/2}^{n+1/2} - \alpha_{j+1/2}^{n+1/2}. \quad (26)$$

Предполагая, что на разностной сетке

$$\alpha_{j+1/2}^{n+1/2} = \alpha_{j-1/2}^{n+1/2} + O(h), \quad \beta_{j+1/2}^{n+1/2} = \beta_{j-1/2}^{n+1/2} + O(h), \quad (27)$$

с учетом формул (13) и последнего неравенства (11) из формулы (26) с точностью  $O(h)$  получаем

$$\Delta_j^{n+1/2} = 2(\beta\theta - \alpha)_{j-1/2}^{n+1/2} = -2 \left( \frac{1}{\rho c} (p_\rho + p p_\varepsilon / \rho^2) \right)_{j-1/2}^{n+1/2} < 0.$$

Таким образом, при достаточно малом  $h$  система (23)–(25) однозначно разрешима во всех пространственных узлах  $x_j = jh$  численной сетки.

Если применяются нелинейные квазиинварианты (15), (17), (18), то система (22) является нелинейной и имеет вид

$$u_j^{n+1} - \alpha \left( \rho_{j+1/2}^{n+1/2}, \varepsilon_j^{n+1} \right) \rho_j^{n+1} - A \left( \rho_{j+1/2}^{n+1/2}, \varepsilon_j^{n+1} \right) = (w_1)_j^{n+1}, \quad (28)$$

$$\rho_j^{n+1} + B \left( \rho_{j-1/2}^{n+1/2}, \varepsilon_j^{n+1} \right) = (w_2)_j^{n+1}, \quad (29)$$

$$u_j^{n+1} + \alpha \left( \rho_{j-1/2}^{n+1/2}, \varepsilon_j^{n+1} \right) \rho_j^{n+1} + A \left( \rho_{j-1/2}^{n+1/2}, \varepsilon_j^{n+1} \right) = (w_3)_j^{n+1}. \quad (30)$$

Если применяются нелинейные квазиинварианты (15), (19), (20), то система (22) также является нелинейной и имеет следующий вид:

$$u_j^{n+1} - C \left( \rho_j^{n+1}, \varepsilon_{j+1/2}^{n+1/2} \right) - \beta \left( \rho_j^{n+1}, \varepsilon_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \varepsilon_j^{n+1} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (31)$$

$$D \left( \rho_j^{n+1}, \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2} \right) + \varepsilon_j^{n+1} = (w_2)_j^{n+1}, \quad (32)$$

$$u_j^{n+1} + C \left( \rho_j^{n+1}, \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2} \right) + \beta \left( \rho_j^{n+1}, \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2} \right) \varepsilon_j^{n+1} = (w_3)_j^{n+1}. \quad (33)$$

В случае уравнения состояния (2) общего вида численные решения нелинейных алгебраических систем (28)–(30) и (31)–(33), возникающих при использовании систем нелинейных квазиинвариантов (15), (17), (18) и (15), (19), (20), представляют собой самостоятельные достаточно трудоемкие задачи, которые существенно усложняют алгоритмы соответствующих модификаций схемы CABARET. Поэтому при численном решении уравнений газовой динамики (4), (7) с такими уравнениями состояния необходимо применять модификацию схемы CABARET, в которой используются линейные квазиинварианты (15), (16). Для этой модификации схемы CABARET будем использовать аббревиатуру CABARET-E1.

Предположим, что газ является политропным и уравнение состояния (2) имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (34)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. В этом случае величины (13) и интегралы (18), (20) определяются по формулам

$$\alpha = \frac{\sqrt{\varphi\varepsilon}}{\rho}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\varphi}{\varepsilon}}, \quad \varphi = \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad \theta = -\frac{(\gamma - 1)\varepsilon}{\rho}, \quad c = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon}, \quad (35)$$

$$A(\rho, \varepsilon) = 2\sqrt{\varphi\varepsilon}, \quad B(\rho, \varepsilon) = -\frac{\rho \ln \varepsilon}{\gamma - 1}, \quad C(\rho, \varepsilon) = \sqrt{\varphi\varepsilon} \ln \rho, \quad D(\rho, \varepsilon) = -(\gamma - 1)\varepsilon \ln \rho. \quad (36)$$

С учетом формул (35) и (36) система (28)–(30) принимает вид

$$u_j^{n+1} - \left( \rho_j^{n+1} / \rho_{j+1/2}^{n+1/2} + 2 \right) \sqrt{\varphi\varepsilon_j^{n+1}} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (37)$$

$$\rho_j^{n+1} - \frac{1}{\gamma - 1} \rho_{j-1/2}^{n+1/2} \ln \varepsilon_j^{n+1} = (w_2)_j^{n+1}, \quad (38)$$

$$u_j^{n+1} + \left( \rho_j^{n+1} / \rho_{j-1/2}^{n+1/2} + 2 \right) \sqrt{\varphi\varepsilon_j^{n+1}} = (w_3)_j^{n+1}, \quad (39)$$

а система (31)–(33) — следующий вид:

$$u_j^{n+1} - \sqrt{\varphi \varepsilon_{j+1/2}^{n+1/2}} \ln \rho_j^{n+1} - \sqrt{\varphi / \varepsilon_{j+1/2}^{n+1/2}} \varepsilon_j^{n+1} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (40)$$

$$\varepsilon_j^{n+1} - (\gamma - 1) \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2} \ln \rho_j^{n+1} = (w_2)_j^{n+1}, \quad (41)$$

$$u_j^{n+1} + \sqrt{\varphi \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2}} \ln \rho_j^{n+1} + \sqrt{\varphi / \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2}} \varepsilon_j^{n+1} = (w_3)_j^{n+1}. \quad (42)$$

Поскольку система (37)–(39) является нелинейной (и даже трансцендентной) относительно компонент вектора искомых переменных  $\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1} = (\rho, u, \varepsilon)_j^{n+1}$ , что существенно затрудняет их вычисление, то модификацию схемы CABARET, использующую нелинейные квазиинварианты (15), (17), (18), неэффективно применять для численного решения уравнений газовой динамики с политропным уравнением состояния (34).

В отличие от системы (37)–(39), система (40)–(42) является линейной относительно переменных  $\ln \rho_j^{n+1}$ ,  $u_j^{n+1}$  и  $\varepsilon_j^{n+1}$ . Определитель этой системы относительно данных переменных имеет вид

$$\Delta_j^{n+1/2} = -\sqrt{\varphi \varepsilon_{j+1/2}^{n+1/2}} - \sqrt{\varphi \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2}} - (\gamma - 1) \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2} \left( \sqrt{\varphi / \varepsilon_{j+1/2}^{n+1/2}} + \sqrt{\varphi / \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2}} \right).$$

Предполагая, по аналогии с (27), что на численной сетке

$$\varepsilon_{j+1/2}^{n+1/2} = \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2} + O(h), \quad (43)$$

с точностью  $O(h)$  получаем

$$\Delta_j^{n+1/2} = -\gamma \sqrt{\varphi \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2}} = -\sqrt{\gamma(\gamma - 1) \varepsilon_{j-1/2}^{n+1/2}} < 0.$$

Таким образом, при достаточно малом  $h$  система (40)–(42) однозначно разрешима во всех пространственных узлах  $x_j = jh$  численной сетки, что позволяет эффективно применять модификацию схемы CABARET, использующую нелинейные квазиинварианты (15), (19), (20), для численного решения уравнений газовой динамики с политропным уравнением состояния (34). Для такой модификации схемы CABARET будем использовать аббревиатуру CABARET-E2.

## 2.2. Недивергентная система (5), для которой $\hat{\mathbf{u}} = (\rho, u, p)$

Используя уравнение состояния (3), систему (4), (7) можно записать в недивергентной форме (5), где

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(\hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & a \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$a = 1/\rho, \quad c^2 = c^2(\rho, p) = (p - \rho^2 \varepsilon_\rho) / (\rho^2 \varepsilon_p).$$

При выполнении неравенств

$$\rho > 0, \quad p > 0, \quad (p - \rho^2 \varepsilon_\rho) / (\rho^2 \varepsilon_p) > 0 \quad (45)$$

система (3), (5), (44) является строго гиперболической и допускает запись в характеристической форме (6), в которой собственные значения матрицы  $\hat{A}(\hat{\mathbf{u}})$  определяются по формулам (9), а соответствующие им левые собственные векторы имеют вид

$$\mathbf{l}^1 = (0, 1, -\alpha), \quad \mathbf{l}^2 = (1, 0, -\beta), \quad \mathbf{l}^3 = (0, 1, \alpha) \quad (46)$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho c}, \quad \beta = \frac{1}{c^2}, \quad c = \sqrt{\frac{p - \rho^2 \varepsilon_\rho}{\rho^2 \varepsilon_p}}. \quad (47)$$

Из формул (9) и (46) следует, что дифференциальные формы, соответствующие характеристическим уравнениям (6) системы (2), (5), (44), имеют вид

$$du \mp \alpha(\rho, p)dp, \quad d\rho - \beta(\rho, p)dp. \quad (48)$$

Поскольку коэффициенты дифференциальных форм (48) так же, как дифференциальных форм (14), не зависят от скорости газа  $u$ , эти дифференциальные формы интегрируемы и система (2), (5), (44) имеет полный набор инвариантов. Однако в общем случае эти инварианты не допускают записи в явном виде, в силу чего их нельзя использовать в алгоритме схемы CABARET. Поэтому далее применяются квазиинварианты системы (2), (5), (44), которые задаются по формулам (15).

Будем применять три вида квазиинвариантов (15): квазиинварианты второго порядка  $w_i = \mathbf{I}^i(\rho_c, p_c)\hat{\mathbf{u}}$ , для которых

$$w = \alpha(\rho_c, p_c)p, \quad f = \rho - \beta(\rho_c, p_c)p, \quad (49)$$

и два вида нелинейных квазиинвариантов первого порядка, для одного из которых

$$w = A(\rho_c, p), \quad f = \rho - B(\rho_c, p), \quad (50)$$

$$A(\rho_c, p) = \int \alpha(\rho_c, p)dp, \quad B(\rho_c, p) = \int \beta(\rho_c, p)dp, \quad (51)$$

а для другого

$$w = \alpha(\rho, p_c)p, \quad f = C(\rho, p_c) - p, \quad (52)$$

$$C(\rho, p_c) = \int \frac{d\rho}{\beta(\rho, p_c)}. \quad (53)$$

С учетом того, что собственные значения (9) удовлетворяют неравенствам (21), запишем алгоритм схемы CABARET [9] на последнем шаге второго этапа, когда в результате решения соответствующей алгебраической системы (22) вычисляется вектор искоемых переменных  $\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1} = (\rho, u, p)_j^{n+1}$  по известному вектору квазиинвариантов  $\mathbf{w}_j^{n+1} = (w_1, w_2, w_3)_j^{n+1}$ , задаваемому формулами (15), (49)–(53).

Если применяются линейные квазиинварианты (15), (49), то система (22) является линейной и имеет вид

$$u_j^{n+1} - \alpha_{j+1/2}^{n+1/2} p_j^{n+1} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (54)$$

$$\rho_j^{n+1} - \beta_{j-1/2}^{n+1/2} p_j^{n+1} = (w_2)_j^{n+1}, \quad (55)$$

$$u_j^{n+1} + \alpha_{j-1/2}^{n+1/2} p_j^{n+1} = (w_3)_j^{n+1}, \quad (56)$$

где

$$\alpha_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \alpha\left(\rho_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, p_{j\pm 1/2}^{n+1/2}\right), \quad \beta_{j-1/2}^{n+1/2} = \beta\left(\rho_{j-1/2}^{n+1/2}, p_{j-1/2}^{n+1/2}\right).$$

При выполнении первого условия (27) система (54)–(56) с учетом неравенств (45) однозначно разрешима при достаточно малых значениях  $h$ .

Если применяются нелинейные квазиинварианты (15), (50), (51), то система (22) становится нелинейной и имеет вид

$$u_j^{n+1} - A\left(\rho_{j+1/2}^{n+1/2}, p_j^{n+1}\right) = (w_1)_j^{n+1}, \quad (57)$$

$$\rho_j^{n+1} - B\left(\rho_{j-1/2}^{n+1/2}, p_j^{n+1}\right) = (w_2)_j^{n+1}, \quad (58)$$

$$u_j^{n+1} + A\left(\rho_{j-1/2}^{n+1/2}, p_j^{n+1}\right) = (w_3)_j^{n+1}. \quad (59)$$



Если применяются нелинейные квазиинварианты (15), (52), (53), то система (22) также становится нелинейной и имеет следующий вид:

$$u_j^{n+1} - \alpha \left( \rho_j^{n+1}, p_{j+1/2}^{n+1} \right) p_j^{n+1} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (60)$$

$$B \left( \rho_j^{n+1}, p_{j-1/2}^{n+1/2} \right) - p_j^{n+1} = (w_2)_j^{n+1}, \quad (61)$$

$$u_j^{n+1} + \alpha \left( \rho_j^{n+1}, p_{j-1/2}^{n+1} \right) p_j^{n+1} = (w_3)_j^{n+1}. \quad (62)$$

В случае уравнения состояния (3) общего вида численные решения нелинейных алгебраических систем (57)–(59) и (60)–(62), возникающих при использовании систем нелинейных квазиинвариантов (15), (50), (51) и (15), (52), (53), представляют собой самостоятельные трудоемкие задачи, которые существенно усложняют алгоритмы соответствующих модификаций схемы CABARET. Поэтому при численном решении уравнений газовой динамики (4), (7) с такими уравнениями состояния необходимо применять модификацию схемы CABARET, в которой используются линейные квазиинварианты (15), (49). Для этой модификации схемы CABARET будем использовать аббревиатуру CABARET-P1.

Предположим, что газ является политропным и уравнение состояния (3) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}. \quad (63)$$

В этом случае величины (47) и интегралы (51) и (53) определяются по формулам

$$\alpha = 1/\sqrt{\gamma p \rho}, \quad \beta = \rho/(\gamma p), \quad c = \sqrt{\gamma p/\rho}, \quad (64)$$

$$A(\rho, p) = 2\sqrt{p/(\gamma \rho)}, \quad B(\rho, p) = (\rho \ln p)/\gamma, \quad C(\rho, p) = \gamma p \ln \rho. \quad (65)$$

С учетом формул (64) и (65) система (57)–(59) принимает вид

$$u_j^{n+1} - 2\sqrt{p_j^{n+1}/(\gamma \rho_{j+1/2}^{n+1/2})} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (66)$$

$$\rho_j^{n+1} - \frac{1}{\gamma} \left( \rho_{j-1/2}^{n+1/2} \ln p_j^{n+1} \right) = (w_2)_j^{n+1}, \quad (67)$$

$$u_j^{n+1} + 2\sqrt{p_j^{n+1}/(\gamma \rho_{j-1/2}^{n+1/2})} = (w_3)_j^{n+1}, \quad (68)$$

а система (60)–(62) — следующий вид:

$$u_j^{n+1} - p_j^{n+1} \left( \gamma p_{j+1/2}^{n+1/2} \rho_j^{n+1} \right)^{-1/2} = (w_1)_j^{n+1}, \quad (69)$$

$$\gamma p_{j-1/2}^{n+1/2} \ln(\rho_j^{n+1}) - p_j^{n+1} = (w_2)_j^{n+1}, \quad (70)$$

$$u_j^{n+1} + p_j^{n+1} / \left( \gamma p_{j-1/2}^{n+1/2} \rho_j^{n+1} \right)^{-1/2} = (w_3)_j^{n+1}. \quad (71)$$

Система, состоящая из уравнений (66) и (68), является линейной относительно переменных  $u_j^{n+1}$ ,  $\sqrt{p_j^{n+1}}$ . При выполнении условия

$$\rho_{j+1/2}^{n+1/2} = \rho_{j-1/2}^{n+1/2} + O(h) \quad (72)$$

эта система с учетом неравенств (45) однозначно разрешима при достаточно малых значениях  $h$ . После нахождения величин  $u_j^{n+1}$  и  $p_j^{n+1}$  значение  $\rho_j^{n+1}$  однозначно определяется из уравнения (67). Таким образом, модификацию схемы CABARET, использующую нелинейные квазиинварианты (49)–(51), можно эффективно применять для численного решения уравнений газовой динамики с политропным уравнением состояния (63). Для такой модификации схемы CABARET будем использовать аббревиатуру CABARET-P2.

В отличие от системы (66)–(68), система (69)–(71) является нелинейной (и даже трансцендентной) относительно компонент вектора искомых переменных  $\rho_j^{n+1}$ ,  $u_j^{n+1}$  и  $p_j^{n+1}$ , что существенно затрудняет их вычисление. Поэтому модификацию схемы CABARET, использующую нелинейные квазиинварианты (49), (52), (53), неэффективно применять для численного решения уравнений газовой динамики с политропным уравнением состояния (63).

Отметим, что условия (27), (43) и (72), гарантирующие однозначную разрешимость соответствующих систем линейных уравнений, будут выполнены, если аппроксимируемое точное решение является достаточно гладким. Несмотря на это, приводимые в следующем разделе тестовые расчеты задач Римана показали, что предлагаемые численные алгоритмы остаются корректными (однозначно разрешимыми) и при расчете обобщенных решений с ударными волнами и контактными разрывами.

### 3. Тестовые расчеты

В этом разделе приведены результаты тестовых расчетов трех различных задач Римана о распаде разрыва для системы уравнений газовой динамики (4), (7) с уравнением состояния политропного газа (34), где  $\gamma = 7/5$ . Во всех этих задачах течение газа является дозвуковым и скорость газа неотрицательна. Так же, как и в работе [9], основные расчеты проводились на прямоугольной численной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_{n+1} = t_n + \tau_n, t_0 = 0\}, \quad (73)$$

в которой  $h$  — постоянный шаг сетки по пространству, а  $\tau_n$  — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости Куранта

$$\tau_n = \frac{zh}{\max_{i,j} |\lambda_i(\mathbf{v}_{j+1/2}^n)|},$$

где  $z = 0.5$  — коэффициент запаса;  $\mathbf{v}_{j+1/2}^n = \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$  — консервативные численные переменные, заданные в полуцелых узлах  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  сетки (73);  $\lambda_i(\mathbf{u})$  — собственные значения матрицы Якоби  $A(\mathbf{u}) = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$  системы (4), (7). Для иллюстрации процесса сходимости в сеточной норме  $L_1$  численных решений  $\mathbf{v}_h$  к точному решению  $\mathbf{u}$  на последовательности сгущающихся сеток будем приводить интегральные ошибки численных решений, вычисляемые по формуле

$$\Delta[\mathbf{v}_h] = h \sum_{j=1}^{N_h} |\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t) - \mathbf{u}(x_{j+1/2}, t)|, \quad N_h = X/h. \quad (74)$$

В качестве первого примера рассмотрим задачу Сода [10] с начальными данными

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0.125, & x > 0, \end{cases} \quad p(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0.1, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0. \quad (75)$$

Автомодельное решение этой задачи представляет собой ударную волну, контактный разрыв и центрированную волну разрежения, между которыми находятся области постоянного течения. На рис. 1–4 и в табл. 1 приведены результаты расчетов этой задачи по схемам CABARET-E1 и CABARET-E2 (рис. 1 и 2), а также по схемам CABARET-P1 и CABARET-P2 (рис. 3 и 4). На рис. 1–4 показаны результаты расчетов на численной сетке (73) с пространственным шагом  $h = 0.02$ , а в табл. 1 — на последовательности сгущающихся сеток (73).

Из рис. 1 и 3 следует, что в момент времени  $t = 0.06$  во всех четырех схемах возникают заметные нефизические осцилляции скорости и давления за фронтом ударной волны. Амплитуды осцилляций у схем CABARET-E1 и CABARET-P1 выше, чем у схем CABARET-E2 и CABARET-P2. С течением времени, при  $t = 0.3$ , эти осцилляции сглаживаются (см. рис. 2 и 4) и все четыре схемы с одинаково высокой точностью воспроизводят профиль ударной волны. Сравнение рис. 1 и 2 с рис. 3 и 4 показывает, что в схемах CABARET-E1 и CABARET-E2 контактный разрыв размазывается гораздо сильнее, чем в схемах CABARET-P1 и CABARET-P2, где ширина его размазывания с течением времени практически не возрастает. Из рис. 2 и 4 также следует, что схемы CABARET-P1

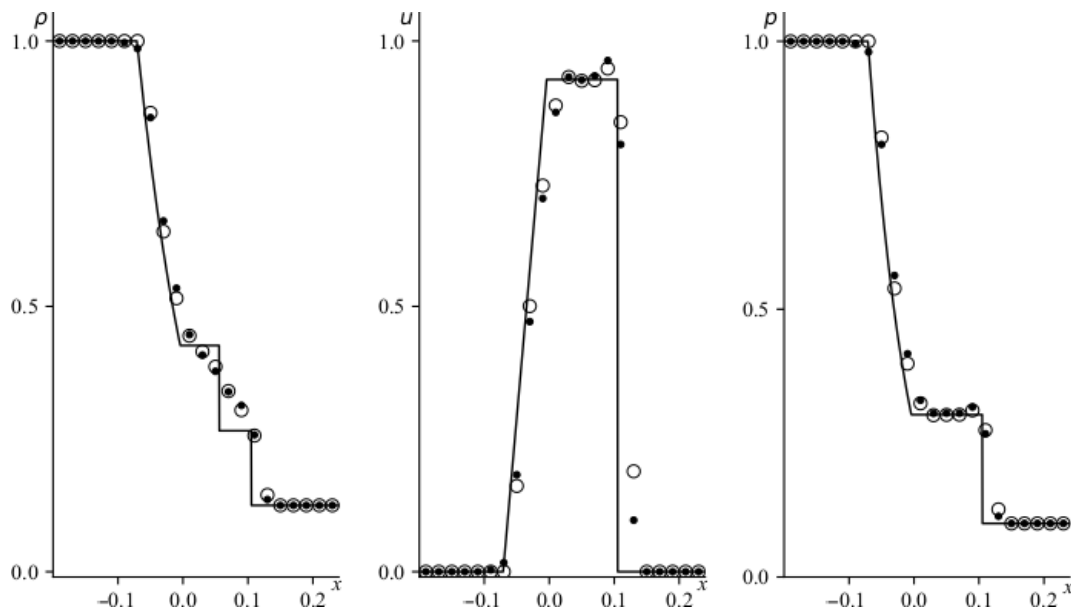


Рис. 1. Точное (сплошная линия) и численные решения задачи Сода по схемам CABARET-E1 (точки) и CABARET-E2 (кружки) на момент времени  $t = 0.06$

Fig. 1. The exact (solid line) and numerical solutions of the Sod problem according to the CABARET-E1 (points) and CABARET-E2 (circles) at the time  $t = 0.06$

Т а б л и ц а 1. Интегральные ошибки (74) численных решений задачи Сода в момент времени  $t = 0.3$

Table 1. Integral errors (74) of the numerical solutions of Sod problem at time  $t = 0.3$

$h$	0.04	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.00125
CABARET-E1	0.1078961	0.0623988	0.0297641	0.0200322	0.0129584	0.0081964
CABARET-E2	0.1002347	0.0574281	0.0256641	0.0180524	0.0117888	0.0073156
CABARET-P1	0.0853891	0.0469765	0.0179382	0.0111818	0.0069693	0.0036095
CABARET-P2	0.0873453	0.0471884	0.0167529	0.0110112	0.0070751	0.0036683

и CABARET-P2 более точно, чем схемы CABARET-E1 и CABARET-E2, аппроксимируют левую границу центрированной волны разрежения. Из табл. 1 видно, что в схемах CABARET-P2 и CABARET-P1 интегральные ошибки численных решений (74) на всех сетках достаточно близки и меньше, чем в схемах CABARET-E1 и CABARET-E2.

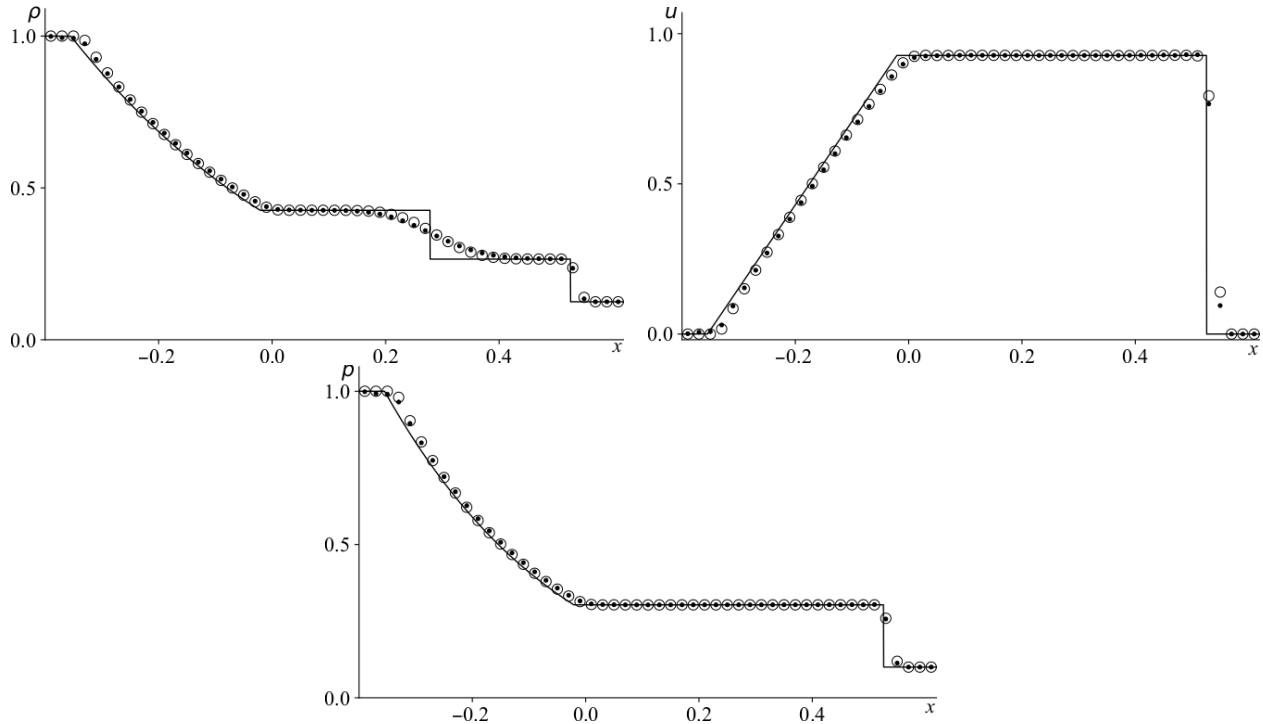


Рис. 2. Точное (сплошная линия) и численные решения задачи Содо по схемам CABARET-E1 (точки) и CABARET-E2 (кружки) на момент времени  $t = 0.3$

Fig. 2. The exact (solid line) and numerical solutions of the Sod problem according to the CABARET-E1 (points) and CABARET-E2 (circles) at the time  $t = 0.3$

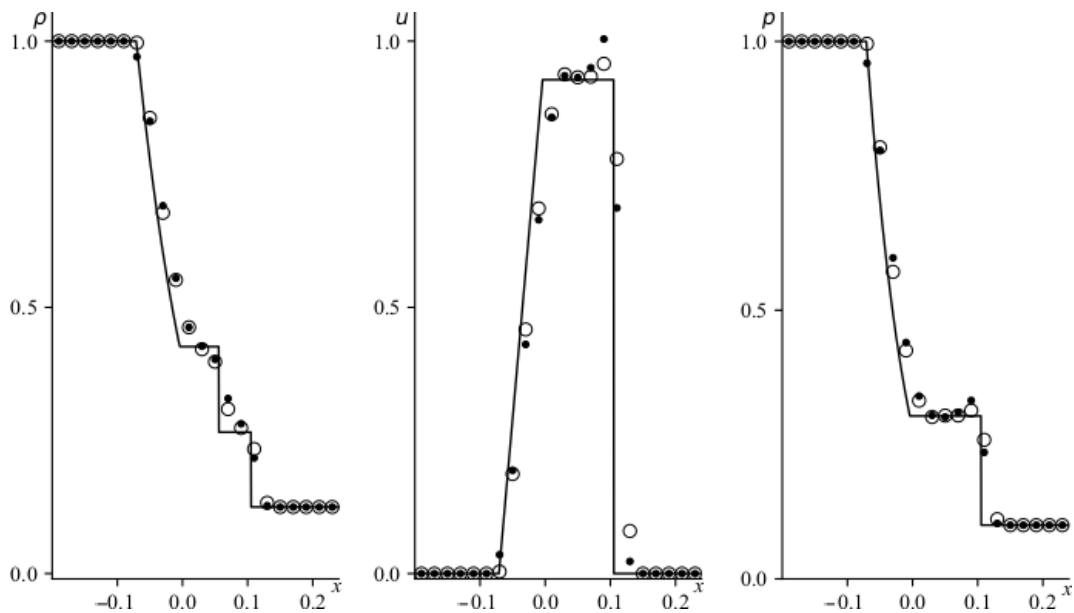


Рис. 3. Точное (сплошная линия) и численные решения задачи Содо по схемам CABARET-P1 (точки) и CABARET-P2 (кружки) на момент времени  $t = 0.06$

Fig. 3. The exact (solid line) and numerical solutions of the Sod problem according to the CABARET-P1 (points) and CABARET-P2 (circles) at the time  $t = 0.06$

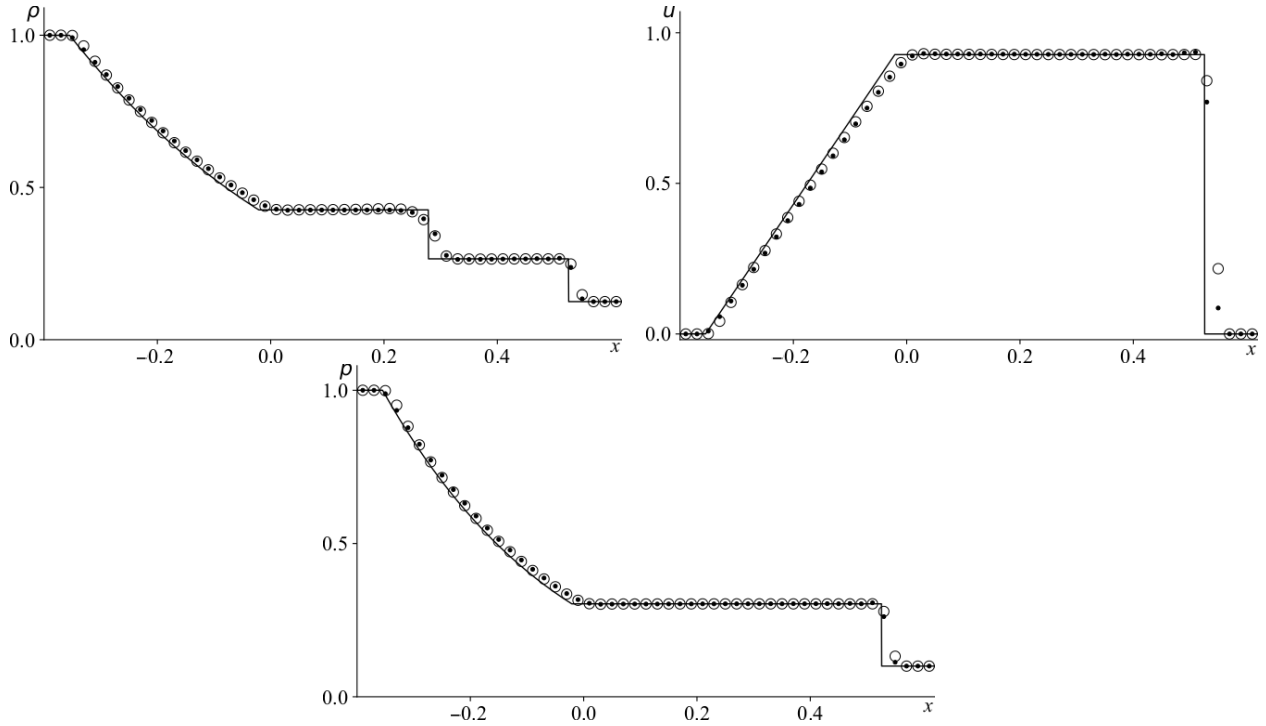


Рис. 4. Точное решение (сплошная линия) и численные решения задачи Сода по схемам CABARET-P1 (точки) и CABARET-P2 (кружки) на момент времени  $t = 0.3$

Fig. 4. The exact (solid line) and numerical solutions of the Sod problem according to the CABARET-P1 (points) and CABARET-P2 (circles) at the time  $t = 0.3$

Из приведенных тестовых расчетов следует, что при расчете задачи Сода схемы CABARET-P1 и CABARET-P2 демонстрируют существенно более высокую точность, чем схемы CABARET-E1 и CABARET-E2. Поэтому в следующих тестовых расчетах схему CABARET-P2 будем на рисунках сравнивать со схемой CABARET-S3, показавшей лучшие результаты при расчете задачи Сода среди трех модификаций схемы CABARET, полученных в [9] при помощи квазиинвариантов, соответствующих классической недивергентной форме записи (5), (8) системы уравнений газовой динамики (4), (7). В то же время в приводимых далее таблицах сравним точность сразу трех схем: CABARET-S3, CABARET-P1 и CABARET-P2. В [9] для схемы CABARET-S3 использовалась аббревиатура CABARET3. В данной работе для единообразия обозначений будем использовать для этой схемы аббревиатуру CABARET-S3, поскольку она построена на основе недивергентной системы (5), (8), записанной относительно переменных  $(\rho, u, S)$ .

В качестве второго примера рассмотрим задачу Лакса [11] с начальными данными:

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 0.445, & x \leq 0, \\ 0.5, & x > 0, \end{cases} \quad p(x, 0) = \begin{cases} 8.928, & x \leq 0, \\ 1.4275, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0.311, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (76)$$

Автомодельное решение этой задачи представляет собой ударную волну, контактный разрыв и центрированную волну разрежения, между которыми находятся области постоянного течения. В отличие от задачи Сода (75), в точном решении задачи Лакса (76) плотность  $\rho(x, t)$  не является монотонно убывающей по  $x$  функцией (рис. 5) и принимает максимальные значения в области постоянного течения между ударной волной и контактным разрывом. На рис. 5 на момент времени  $t = 0.16$  приведены результа-

ты расчетов этой задачи по схемам CABARET-S3 и CABARET-P2, а в табл. 2 — на последовательности сгущающихся сеток по трем схемам.

Из рис. 5 следует, что схемы CABARET-P2 и CABARET-S3 с одинаково высокой точностью воспроизводят профили ударной волны и центрированной волны разрежения. В то же время схема CABARET-S3 несколько меньше, чем схема CABARET-P2, размазывает контактный разрыв, однако получаемые по этой схеме численные значения скорости и давления газа имеют в окрестности контактного разрыва характерные

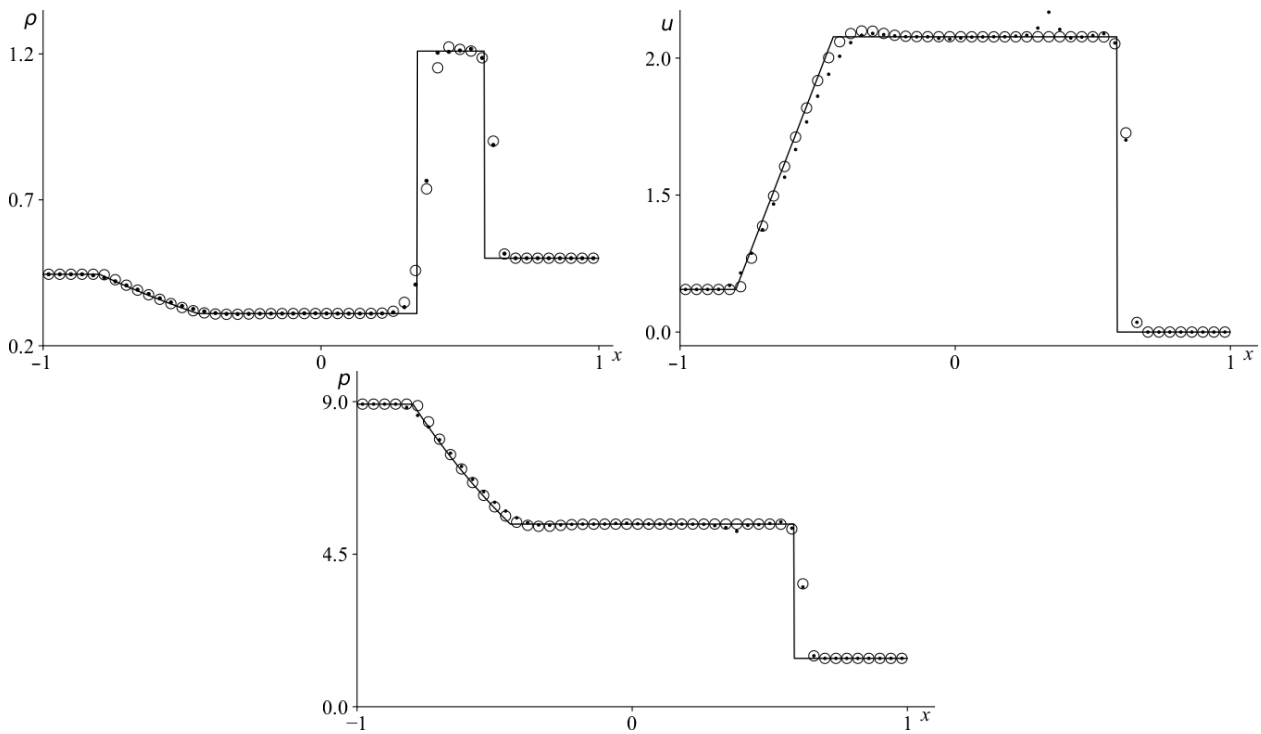


Рис. 5. Точное (сплошная линия) и численные решения задачи Лакса по схемам CABARET-S3 (точки) и CABARET-P2 (кружки) на момент времени  $t = 0.16$

Fig. 5. The exact (solid line) and numerical solutions of the Lax problem according to the CABARET-S3 (points) and CABARET-P2 (circles) at the time  $t = 0.16$

Т а б л и ц а 2. Интегральные ошибки (74) численных решений задачи Лакса в момент времени  $t = 0.16$

Table 2. Integral errors (74) of the numerical solutions of Lax problem at time  $t = 0.16$

$h$	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.00125	0.000625
CABARET-S3	0.6166574	0.2024881	0.1051416	0.0774373	0.0506298	0.0378171
CABARET-P1	0.5208669	0.1769273	0.0873284	0.0727502	0.0440322	0.0332337
CABARET-P2	0.5591450	0.1790117	0.0922203	0.0713694	0.0395088	0.0308050

Т а б л и ц а 3. Интегральные ошибки (74) численных решений задачи (77) в момент времени  $t = 1.3$

Table 3. Integral errors (74) of the numerical solutions of the problem (77) at time  $t = 1.3$

$h$	0.06	0.03	0.015	0.0075	0.00375	0.001875
CABARET-S3	0.2154207	0.1287954	0.0827251	0.0386160	0.0307703	0.0193609
CABARET-P1	0.2236168	0.1352475	0.0924316	0.0447362	0.0352369	0.0222643
CABARET-P2	0.2204741	0.1307568	0.0867227	0.0407312	0.0322730	0.0205317

нефизические (энтропийные) всплески, которые отсутствуют в численном решении по схеме CABARET-P2. Из табл. 2 следует, что на всех сетках максимальную интегральную ошибку (74) имеет схема CABARET-S3. Схема CABARET-P2 на грубых сетках имеет интегральную ошибку большую, чем схема CABARET-P1, а на более мелких сетках ее интегральная ошибка становится меньше, чем у схемы CABARET-P1.

В качестве третьего примера рассмотрим задачу Римана со следующими начальными данными:

$$\rho(x, 0) = 1, \quad p(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0.5, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (77)$$

Автомодельное решение задачи представляет собой (рис. 6) две расходящиеся ударные волны, расположенный между ними контактный разрыв и области постоянного течения, которые находятся между этими сильными разрывами.

На рис. 6 на момент времени  $t = 1.3$  показаны результаты расчета задачи (77) на численной сетке (73) с пространственным шагом  $h = 0.06$  по схемам CABARET-S3 и CABARET-P2, а в табл. 3 — на последовательности сгущающихся сеток (73) по трем схемам. Из рис. 6 видно, что схемы CABARET-P2 и CABARET-S3 с одинаково высокой точностью воспроизводят фронты расходящихся ударных волн и приблизительно на одинаковую ширину размазывают контактный разрыв, но при этом размазывают его заметно сильнее, чем схемы CABARET-P1 и CABARET-P2 при расчете задачи Сода (см. рис. 4). Из табл. 3 следует, что на всех сетках интегральные ошибки численных решений (74) в схеме CABARET-P2 больше, чем в схеме CABARET-S3, и меньше, чем в схеме CABARET-P1.

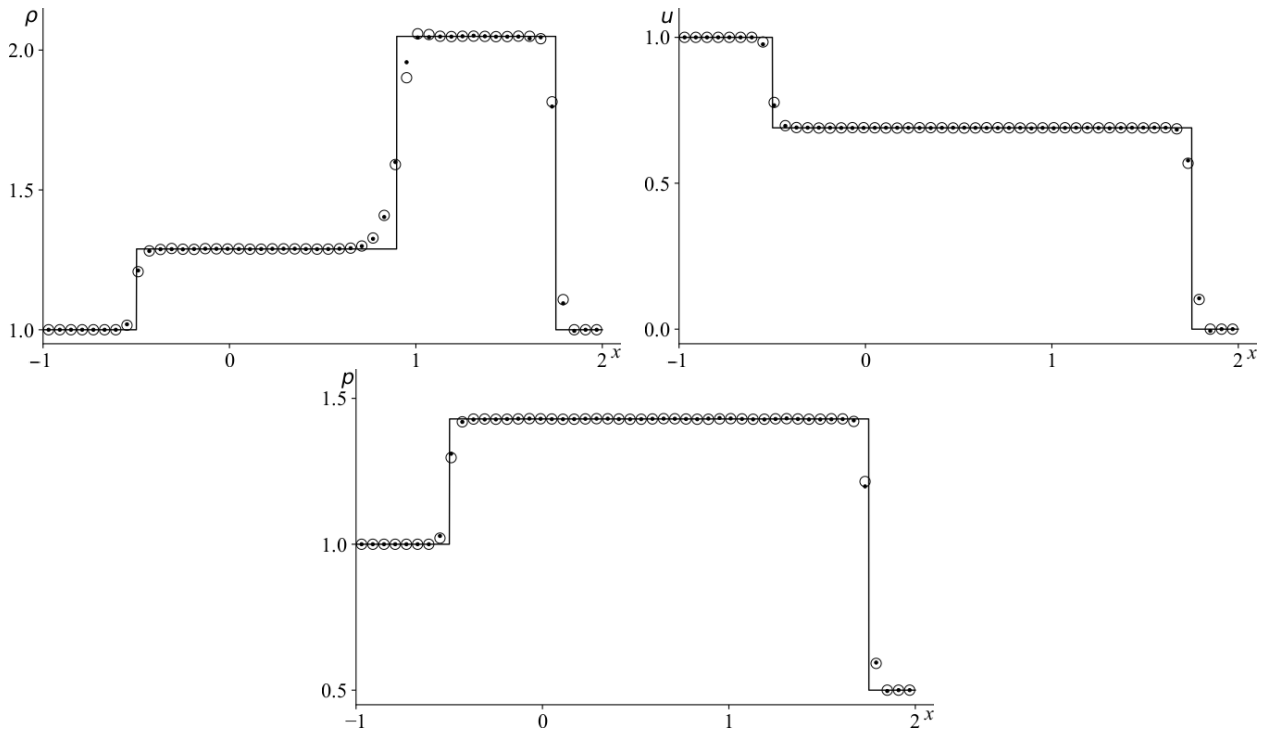


Рис. 6. Точное (сплошная линия) и численные решения задачи (77) по схемам CABARET-S3 (точки) и CABARET-P2 (кружки) на момент времени  $t = 1.3$

Fig. 6. The exact (solid line) and numerical solutions of the problem (77) according to the CABARET-S3 (points) and CABARET-P2 (circles) at the time  $t = 1.3$

Из приведенного в данном разделе сравнительного анализа точности различных модификаций схемы CABARET следует, что наиболее эффективной при расчете задач Римана для уравнений газовой динамики (4), (7) с политропным уравнением состояния (34) является модификация CABARET-P2, обеспечивающая наибольшую точность при аппроксимации ударных волн, контактных разрывов и центрированных волн разрежения. В то же время для расчета газодинамических течений, удовлетворяющих уравнению состояния общего вида (3), можно рекомендовать модификацию CABARET-P1, которая, в отличие от модификации CABARET-P2, обладает хорошей разрешимостью в случае таких уравнений состояний.

## Заключение

На основе метода квазиинвариантов построены и изучены шесть модификаций схемы CABARET, аппроксимирующей систему уравнений газовой динамики неизоэнтропических течений, которая замыкается различными уравнениями состояния. Проведен сравнительный анализ разрешимости этих модификаций и их точности при расчете трех задач Римана (в частности, задач Сода и Лакса) о распаде начального разрыва в политропном газе, в которых течение газа является дозвуковым. В результате этого анализа выделены две модификации схемы CABARET, обеспечивающие хорошую разрешимость и наибольшую точность при аппроксимации ударных волн, контактных разрывов и центрированных волн разрежения.

В дальнейшем для этих модификаций схемы CABARET планируется применить дополнительную коррекцию потоковых переменных [8], обеспечивающую монотонность этих схем в линейном приближении, что позволит сгладить нефизические схемные осцилляции, возникающие на ударных волнах в начале численного счета. Предполагается также протестировать эти модификации схемы CABARET при расчете других задач Римана, точные решения которых содержат области как дозвукового, так и сверхзвукового течения газа.

**Благодарности.** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00060 (разд. 2) и по теме государственного задания ИТПМ СО РАН (разд. 3).

## Список литературы

- [1] Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics. *Journal of Computational Physics*. 2009; (228):7426–7451. DOI:10.1016/j.jcp.2009.06.037.
- [2] Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Издательство Московского государственного университета; 2013: 472.
- [3] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит; 2001: 608.
- [4] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности двухслойной по времени схемы Каваре. *Математическое моделирование*. 2012; 24(9):97–112. DOI:10.1134/S2070048213020051.



- [5] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ в многомерном случае. Доклады Академии наук. 2015; 462(4):385–390. DOI:10.7868/80869565215160057.
- [6] Зюзина Н.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком. Доклады Академии наук. 2016; 466(5):513–517. DOI:10.7868/S086956521605008X.
- [7] Остапенко В.В., Черевко А.А. Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком. Доклады Академии наук. 2017; 476(5):518–522. DOI:10.7868/S0869565217290084.
- [8] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018; 58(9):1488–1504. DOI:10.31857/S004446690002528-1.
- [9] Колотилов В.А., Остапенко В.В. Метод квазиинвариантов при построении схемы CABARET и его применение для численного расчета задач газовой динамики. Вычислительные технологии. 2023; 28(2):58–71. DOI:10.25743/ICT.2023.28.2.006.
- [10] Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics. 1978; (27):1–31. DOI:10.1016/0021-9991(78)90023-2.
- [11] Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954; (7):159–193. DOI:10.1002/cpa.3160070112.

---

Вычислительные технологии, 2024, том 29, № 3, с. 52–69. © ФИЦ ИБТ, 2024  
Computational Technologies, 2024, vol. 29, no. 3, pp. 52–69. © FRC ICT, 2024

ISSN 1560-7534  
eISSN 2313-691X

---

## COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

---

DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.005

### Analysis of different modifications of the CABARET scheme applied for approximation of the system of gas-dynamic equations

V. A. KOLOTILOV<sup>1,2,\*</sup>, V. V. OSTAPENKO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Vadim A. Kolotilov, e-mail: kolotilov1992@gmail.com

Received June 26, 2023, revised October 23, 2023, accepted November 20, 2023.

### Abstract

In this paper, we construct various modifications of the CABARET scheme that approximate the system of nonisentropic gas dynamics equations. The construction of these modifications relies on representation of conservation laws using various non-divergent forms and using the method of quasi-invariants. Each family of these invariants corresponds to its own modification of the CABARET scheme. The algorithm of the resulting CABARET scheme is given for the case when in the calculated exact solution the characteristics of one family are unidirectional, i.e. velocity distribution of these characteristics does not change sign. A comparative analysis for the accuracy of these modifications was carried out when calculating the Sod problem on the attenuation of an initial discontinuity in a polytropic gas. Based on this analysis, a modification was chosen that most accurately localizes strong and weak discontinuities in the exact solution and has the smallest integral imbalance and the best order of convergence. Further, this modification of the CABARET

scheme was compared with the best modification obtained from the previous work on various test problems (including the Lax problem) without changing the sign of the rate characteristics. The given complex analysis has shown that the new modification has better convergence compared to the modification from the previous work. Also, using the example of the Riemann problem of two divergent strong discontinuities, it was shown that it is impossible to correctly determine the order of local convergence of the numerical solution to the exact one in zones of constant flows located in the areas of influence of shock waves in the considered modifications of the CABARET scheme.

*Keywords:* CABARET scheme, method of quasi-invariants, equations of gas dynamic.

*Citation:* Kolotilov V.A., Ostapenko V.V. Analysis of different modifications of the CABARET scheme applied for approximation of the system of gas-dynamic equations. Computational Technologies. 2024; 29(3):52–69. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.005. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The work was partly supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-11-00060) (Sect. 2) and partly supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment (Sect. 3).

## References

1. **Karabasov S.A., Goloviznin V.M.** Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics. Journal of Computational Physics. 2009; (228):7426–7451. DOI:10.1016/j.jcp.2009.06.037.
2. **Goloviznin V.M., Zaytsev M.A., Karabasov S.A., Korotkin I.A.** Novye algoritmy vychislitel'noy gidrodinamiki dlya mnogoprotsessornykh vychislitel'nykh kompleksov [New CFD algorithms for multiprocessor computer systems]. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta; 2013: 472. (In Russ.)
3. **Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.** Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton FL; 2001: 540. ISBN:0-8493-0608-6.
4. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** On monotonicity of two-layer in time CABARET scheme. Mathematical Models and Computer Simulations. 2013; 5(2):180–189.
5. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** On the monotonicity of the CABARET scheme in the multidimensional case. Doklady Mathematics. 2015; 91(3):323–328. DOI:10.1134/S1064562415030217.
6. **Zyuzina N.A., Ostapenko V.V.** On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux. Doklady Mathematics. 2016; 93(1):69–73. DOI:10.1134/S1064562416010282.
7. **Ostapenko V.V., Cherevko A.A.** Application of the CABARET scheme for calculation of discontinuous solutions of the scalar conservation law with nonconvex flux. Doklady Physics. 2017; 62(10):470–474. DOI:10.1134/S1028335817100056.
8. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** Monotonicity of the CABARET scheme approximating a hyperbolic system of conservation laws. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018; 58(9):1435–1450. DOI:10.1134/S0965542518090129.
9. **Kolotilov V.A., Ostapenko V.V.** Method of quasi-invariant in CABARET schemes and its application for numerical calculation of gas dynamics problems. Computational Technologies. 2023; 28(2):58–71. DOI:10.25743/ICT.2023.28.2.006. (In Russ.)
10. **Sod G.A.** A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics. 1978; (27):1–31 DOI:10.1016/0021-9991(78)90023-2.
11. **Lax P.D.** Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954; (7):159–193. DOI:10.1002/cpa.3160070112.