

## Экстраполяционные алгоритмы улучшения качества гидролокационных изображений

Е. О. КОВАЛЕНКО, И. В. ПРОХОРОВ\*, А. А. СУЩЕНКО

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, Россия

\*Контактный автор: Прохоров Игорь Васильевич, e-mail: [prokhorov@iam.dvo.ru](mailto:prokhorov@iam.dvo.ru)

Поступила 31 июля 2023 г., доработана 11 сентября 2023 г., принята в печать 18 сентября 2023 г.

Рассмотрены вопросы улучшения качества изображений морского дна по данным измерений гидролокатора бокового обзора, оснащенного антеннами с различной шириной диаграммы направленности. В рамках кинетической модели, описывающей процесс импульсного зондирования в полупространстве с диффузными условиями отражения на границе, для повышения точности восстановления коэффициента донного рассеяния предложены экстраполяционные алгоритмы первого и второго порядков относительно малого параметра, характеризующего ширину диаграммы направленности. Проведен численный анализ алгоритмов в зависимости от порядка экстраполяции и точности измерений исходных данных.

*Ключевые слова:* уравнение переноса излучения, обратная задача, экстраполяция, коэффициент донного рассеяния, гидролокатор бокового обзора, изображения морского дна.

*Цитирование:* Коваленко Е.О., Прохоров И.В., Сущенко А.А. Экстраполяционные алгоритмы улучшения качества гидролокационных изображений. Вычислительные технологии. 2024; 29(3):38–51. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.004.

### Введение

Для визуализации подводной обстановки с применением телеуправляемых и автономных подводных аппаратов используются главным образом оптические и акустические средства [1–3]. Оптические средства визуализации благодаря существенно более короткой длине волны обеспечивают наибольшее разрешение. Однако вследствие значительного поглощения света дальность действия оптических средств освещения даже в чистой воде не превышает десятков метров, а в мутной воде не превышает метра. В этом случае практически единственную возможность для получения информации о подводной обстановке предоставляют гидроакустические средства вследствие существенно меньшего затухания звука в воде.

Ключевым требованием к гидроакустическим средствам визуализации является обеспечение высоких дальности действия и разрешающей способности, определяемой как размерами элемента разрешения, так и числом этих элементов. Стремление одновременно уменьшить весогабаритные характеристики гидролокатора и увеличить его разрешающую способность неизбежно приводит к необходимости повышения рабочей частоты. В свою очередь, повышение рабочей частоты приводит к росту

коэффициента поглощения звука, что отрицательно сказывается на дальности действия гидролокатора [4, 5].

В последнее время при математическом моделировании процессов акустического зондирования морского дна автономными необитаемыми подводными аппаратами с гидролокаторами бокового обзора (ГБО) нами проводился анализ влияния учета объемного рассеяния на качество изображения и осуществлялась разработка алгоритмов одно- и многокурсного зондирования [6–8]. Методы улучшения качества размытых ГБО-изображений затрагивались в меньшей степени.

Сегодня существует множество методов обработки размытых изображений [9–12]. Причины размытости могут быть весьма разнообразны и вызваны, например, движением наблюдаемого объекта или наблюдателя, несовершенством приемопередающей аппаратуры или неправильной фокусировкой. Как правило, изображения плохого качества обрабатываются целиком. Получаемые с помощью гидролокаторов бокового обзора акустические изображения формируются послойно в направлении движения подводного аппарата, и зачастую приходится корректировать изображения в реальном режиме времени, чтобы изменить задачи выполняемой миссии и осуществить корректировку курса необитаемого подводного аппарата [3, 13, 14]. В этом случае традиционные методы улучшения качества изображений неприменимы и на первый план выходит проблема разработки новых алгоритмов. Задача фокусировки акустических ГБО-изображений может быть частично решена путем синтеза апертуры [15, 16]. Методы радиолокационного синтеза апертуры с помощью летательных аппаратов достаточно давно используются при дистанционном зондировании поверхности Земли. Обеспечить траекторную стабильность движения автономного необитаемого подводного аппарата на временном интервале синтеза апертуры чрезвычайно трудно, поэтому такие методы ограниченно применяются при картировании морского дна и обнаружении подводных объектов.

В работе рассмотрим экстраполяционные алгоритмы подавления размытости ГБО-изображений первого и второго порядков. Технологически они могут быть осуществлены, например, в том случае, когда известны результаты нескольких измерений отраженного сигнала антеннами с различной шириной диаграммы направленности. С математической точки зрения задача гидролокации морского дна формулируется нами как обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения с диффузными условиями отражения на границе области. Дополнительно задаются так называемые условия переопределения, описывающие результаты измерений отраженного сигнала в секторах, величина раствора которых определяется шириной диаграммы направленности приемных антенн. Искомой функцией в обратной задаче является коэффициент донного рассеяния. Асимптотический алгоритм решения обратной задачи сводится к осуществлению процедуры экстраполяции решения уравнения переноса по параметру в область малых значений ширины диаграммы направленности и применению явной формулы обращения.

Предлагаемые алгоритмы свободны от части ограничений, присущих методам синтеза апертуры, и в вычислительном плане значительно менее трудозатратны. Ранее экстраполяционный подход успешно применялся в задачах импульсной рентгеновской томографии [17]. Для подавления деструктивного влияния рассеяния проводилась процедура экстраполяции решения уравнения переноса излучения по данным многократного облучения среды короткими импульсами различной длительности.

## 1. Постановка обратной задачи для нестационарного уравнения переноса излучения

В области  $G = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : r_3 > -l\}$ ,  $l > 0$ , представляющей собой верхнее полупространство, ограниченное плоскостью  $\gamma = \partial G$ , рассмотрим начально-краевую задачу для нестационарного уравнения переноса излучения [4, 7, 8, 18–23]

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) (\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)|_{t < 0} = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega, \quad (2)$$

$$I^-(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t) (\mathbf{y}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}', \quad (\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \Gamma^-, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r} \in G$ ,  $t \in [0, T]$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  принадлежит единичной сфере  $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$ . Функция  $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  интерпретируется как плотность потока энергии волны, распространяющейся в направлении  $\mathbf{k}$  со скоростью  $c$  в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ . Величины  $\mu$ ,  $\sigma$  имеют смысл коэффициентов затухания и объемного рассеяния, а функция  $J$  характеризует источники звукового поля.

В начальном и граничном условиях (2), (3) использованы следующие обозначения:  $I^\pm(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{y} \pm \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k}, t \pm \varepsilon/c)$ ,  $\Gamma^\pm = \{(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \gamma \times \Omega_\pm \times (0, T)\}$ ,  $\Omega_\pm = \{\mathbf{k} \in \Omega : \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) = \pm 1\}$ , где  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$  — единичный вектор внешней нормали к границе области  $G$ . Функция с  $\sigma_d(\mathbf{y})$  в граничном условии (3) называется коэффициентом донного рассеяния и характеризует степень неоднородности дна океана.

Система соотношений (1)–(3) описывает нестационарный процесс распространения высокочастотных звуковых полей в рассеивающей среде, на границе которой звуковое поле испытывает диффузное отражение по закону Ламберта.

Функция  $J$  моделирует процесс импульсного озвучивания окружающего пространства гидролокатором бокового обзора, который перемещается прямолинейно с постоянной скоростью  $V$  в направлении оси  $r_2$ :

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) \sum_{i=1}^M \delta(t - t_m), \quad \mathbf{V} = (0, V, 0), \quad t_m > 0, \quad (4)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Систему соотношений (1)–(3) дополним еще двумя равенствами

$$\int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = P_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь функции  $S_1(\mathbf{k}(\varphi, \theta))$  и  $S_2(\mathbf{k}(\varphi, \theta))$ ,  $(\mathbf{k} = \mathbf{k}(\varphi, \theta) = (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta))$  характеризуют диаграммы направленности приемных антенн гидролокатора бокового обзора, расположенных по разным бортам носителя антенн. Не ограничивая общности, будем предполагать, что  $S_j(\varphi) = 1/2\epsilon$  при  $\varphi \in (\varphi_j - \epsilon, \varphi_j + \epsilon)$ ,  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 3\pi/2$ , и нулю вне этого интервала. Как правило, на практике значения параметра  $\epsilon$  относительно малы, поскольку гидролокатор бокового обзора имеет узкую диаграмму направленности антенны в горизонтальной плоскости. В вертикальной плоскости диаграмма направленности приемной антенны, напротив, достаточная широкая. Для простоты считаем, что она не зависит от переменной  $\theta$  в интервале  $0 < \theta < \pi$ .

В работе рассмотрим следующую обратную задачу для уравнения переноса излучения [6, 7].

**Задача 1.** Найти функцию  $\sigma_d(\mathbf{y})$  из уравнения (1) и соотношений (2), (3), (5) при заданных  $\mu, \sigma, J, c, P_j, S_j, j = 1, 2$ .

## 2. Приближенные представления для функции $P_j(t)$ в нерассеивающей среде

В работах [6–8] достаточно подробно изучалось влияние объемного рассеяния на качество гидролокационных изображений, поэтому ограничимся случаем нерассеивающей среды  $\sigma = 0$ .

Обозначая через  $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t) = \min\{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}), ct\}$ , где  $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})$  — расстояние от точки  $\mathbf{r} \in G$  в направлении  $-\mathbf{k}$  до границы области  $G$ , запишем решение начально-краевой задачи (1)–(3) при  $\sigma = 0$  в явном виде [7, 8]:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \frac{\sigma_d(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)) \times \\ \times \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I_0^+ \left( \mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)}{c} \right) d\mathbf{k}', \quad (6)$$

где

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) J \left( \mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c} \right) d\tau. \quad (7)$$

Если  $\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k} \notin \partial G$ , то второе слагаемое в (6) отсутствует. Отметим, что это представление справедливо без каких-либо ограничений, связанных с приближением однократного рассеяния, которые мы неоднократно использовали в предыдущих работах [6, 7]. С физической точки зрения указанный факт обусловлен отсутствием эффектов объемного рассеяния в области  $G$  и многократного переотражения на плоскости  $\gamma = \partial G$ .

Подставляя выражение (6) в (5) и учитывая вид функции (4), при  $t \in (t_i, t_{i+1})$ ,  $i \leq M$ , можно получить следующее соотношение для функций  $P_j$  [7, 8]:

$$P_j(t) = \frac{l^2}{\pi} \sum_{m=1}^i \frac{\exp(-\mu c(t - t_m))}{t - t_m} \int_0^{2\pi} \frac{S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta_m)) \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi, \theta_m)) d\varphi}{R_1^2 R_2^2 \left( 1 - \frac{V}{c} k_2 \right)}, \quad (8)$$

где

$$R_1 = \frac{c(t - t_m)}{2 \left( 1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right), \quad R_2 = c(t - t_m) \left( 1 - \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{2 \left( 1 - \frac{V}{c} k_2 \right)} \right), \\ \mathbf{y}(\varphi, \theta_m) = \mathbf{V}t - R_1 \mathbf{k}(\varphi, \theta_m), \quad \theta_m(t) = \arccos \left( \frac{l}{R_1} \right), \\ \mathbf{k}(\varphi, \theta_m) = (-\sin \varphi \sin \theta_m, \cos \varphi \sin \theta_m, \cos \theta_m), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

При проведении гидролокации морского дна с помощью автономных необитаемых подводных аппаратов или надводных судов, как правило, носитель антенны имеет небольшую скорость  $V$  в сравнении со скоростью распространения акустического сигнала  $c$ , т. е.  $V/c \ll 1$  [13–16], а параметры среды  $\mu$ ,  $c$  и периоды зондирования  $t_{i+1} - t_i$  таковы, что

$$\frac{\exp(-\mu c|t - t_m|)}{|t - t_m|} \ll \frac{\exp(-\mu c|t - t_i|)}{|t - t_i|}, \quad t \in (t_i, t_{i+1}), \quad m < i. \quad (9)$$

Такие ограничения позволяют на текущем интервале приема  $(t_i, t_{i+1})$  пренебрегать эхолокационными сигналами с предыдущих периодов зондирования, т. е. при  $t \in (t_i, t_{i+1})$  вместо суммы в (9) останется лишь одно  $i$ -е слагаемое. Учитывая сделанные предположения, соотношение (9) существенно упрощается

$$P_j(t) = \frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-\mu c(t - t_i))}{(c(t - t_i)/2)^5} \int_0^{2\pi} S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta_i)) \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi, \theta_i)) d\varphi, \quad (10)$$

где  $\theta_i(t) = \arccos\left(\frac{2l}{c(t - t_i)}\right)$ . Принимая во внимание вид диаграммы направленности из (10), получаем

$$P_j(t, \epsilon) = \frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-\mu c(t - t_i))}{(c(t - t_i)/2)^5} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi_j + \varphi, \theta_i)) d\varphi, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

где  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 3\pi/2$ . При  $\epsilon \rightarrow 0$  формула (11) принимает довольно простой вид

$$P_j(t, 0) = \frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-\mu c(t - t_i))}{(c(t - t_i)/2)^5} \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi_j, \theta_i)). \quad (12)$$

Таким образом, в приближении узкой диаграммы направленности (при малых  $\epsilon$ ) из (12) для определения функции  $\sigma_d$  получаем явные приближенные формулы

$$\sigma_d(y_1, y_2) = P_1\left(\frac{y_2}{V}, \epsilon\right) \left(\frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-2\mu(y_1^2 + l^2)^{1/2})}{(y_1^2 + l^2)^{5/2}}\right)^{-1}, \quad y_1 > 0, \quad (13)$$

$$\sigma_d(y_1, y_2) = P_2\left(\frac{y_2}{V}, \epsilon\right) \left(\frac{cl^2}{2\pi} \frac{\exp(-2\mu(y_1^2 + l^2)^{1/2})}{(y_1^2 + l^2)^{5/2}}\right)^{-1}, \quad y_1 < 0, \quad (14)$$

где  $2(y_1^2 + l^2)^{1/2}/c \leq \delta$ ,  $\delta = \min_i(t_{i+1} - t_i)$  — минимальное время задержки между двумя последовательно идущими друг за другом импульсами.

### 3. Экстраполяционный алгоритм решения обратной задачи

При увеличении ширины диаграммы направленности расчет функции  $\sigma_d$  по формулам (13), (14) приводит к росту погрешности. Для устранения дефектов изображений применяют различные методы, которые в математическом плане сводятся к решению интегральных уравнений типа свертки первого рода [9–12]. При дискретизации искомой функции решение интегрального уравнения эквивалентно решению системы линейных алгебраических уравнений, как правило, плохо обусловленной, что существенно затрудняет определение искомой функции. С практической точки зрения интересны методы,

позволяющие вести обработку сигнала в реальном режиме на борту носителя антенн и, по возможности, независимо от данных, полученных в предыдущие промежутки времени.

Опишем алгоритм улучшения качества изображений, основанный на одновременном приеме отраженного сигнала антеннами с различной шириной диаграммы направленности с последующей экстраполяционной обработкой измеренных сигналов. Предположим, что на промежутке  $\varphi \in [-\epsilon, \epsilon]$  имеет место асимптотическое представление

$$\sigma_d(\mathbf{y}(\varphi_j + \varphi, \theta_i)) = \psi_0(\varphi_j, \theta_i) + \psi_1(\varphi_j, \theta_i)\varphi + \psi_2(\varphi_j, \theta_i)\varphi^2 + \psi_3(\varphi_j, \theta_i)\varphi^3 + \psi_4(\varphi_j, \theta_i)\varphi^4 + O(\varphi^5). \quad (15)$$

Так как  $\varphi \in [-\epsilon, \epsilon]$ , порядок малости величины  $O(\varphi^5)$  не ниже, чем  $\epsilon^5$ . Пренебрегая величиной  $O(\varphi^5)$ , подставим разложение (15) в формулу (11)

$$\begin{aligned} P_j(t, \epsilon) &= \frac{cl^2 \exp(-\mu c(t - t_i))}{2\pi} \frac{1}{(c(t - t_i)/2)^5} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (\psi_0(\varphi_j, \theta_i) + \psi_1(\varphi_j, \theta_i)\varphi + \\ &\quad + \psi_2(\varphi_j, \theta_i)\varphi^2 + \psi_3(\varphi_j, \theta_i)\varphi^3 + \psi_4(\varphi_j, \theta_i)\varphi^4) d\varphi = \\ &= \frac{cl^2 \exp(-\mu c(t - t_i))}{2\pi} \frac{1}{(c(t - t_i)/2)^5} \left( \psi_0(\varphi_j, \theta_i) + \psi_2(\varphi_j, \theta_i) \frac{\epsilon^2}{3} + \psi_4(\varphi_j, \theta_i) \frac{\epsilon^4}{5} \right), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Переходя в формуле (16) для  $P_1$  к переменным  $y_1 = \sqrt{(c(t - t_i)/2)^2 - l^2}$ ,  $y_2 = Vt$  ( $t \in (t_i + 2l/c, t_{i+1})$ ) и обозначая  $\tilde{\psi}_k(y_1, y_2) = \psi_k(\varphi_1, \theta_i(t))$ ,  $\theta_i(t) = \arccos\left(\frac{2l}{c(t - t_i)}\right)$ , получим

$$P_1(y_1/V, \epsilon) = \frac{cl^2 \exp(-2\mu(y_1^2 + l^2)^{1/2})}{2\pi} \frac{1}{(y_1^2 + l^2)^{5/2}} \left( \tilde{\psi}_0(y_1, y_2) + \tilde{\psi}_2(y_1, y_2) \frac{\epsilon^2}{3} + \tilde{\psi}_4(y_1, y_2) \frac{\epsilon^4}{5} \right). \quad (17)$$

Аналогичная формула имеет место для  $P_2$  при  $y_1 = -\sqrt{(c(t - t_i)/2)^2 - l^2}$ .

Если известны значения  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$ , то из последнего соотношения получаем

$$\tilde{\psi}_0(y_1, y_2) = \frac{\Delta_2 P_1 - \Delta_3 P_1}{\Delta_2 1 - \Delta_3 1} \left( \frac{cl^2 \exp(-2\mu(y_1^2 + l^2)^{1/2})}{2\pi} \frac{1}{(c(y_1^2 + l_2))^{5/2}} \right)^{-1}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 P_1 &= (P_1(y_2/V, \epsilon_1)\epsilon_2^4 - P_1(y_2/V, \epsilon_2)\epsilon_1^4)(\epsilon_1^2\epsilon_3^4 - \epsilon_3^2\epsilon_1^4), \\ \Delta_3 P_1 &= (P_1(y_2/V, \epsilon_1)\epsilon_3^4 - P_1(y_2/V, \epsilon_3)\epsilon_1^4)(\epsilon_1^2\epsilon_2^4 - \epsilon_2^2\epsilon_1^4), \\ \Delta_2 1 &= (\epsilon_2^4 - \epsilon_1^4)(\epsilon_1^2\epsilon_3^4 - \epsilon_3^2\epsilon_1^4), \\ \Delta_3 1 &= (\epsilon_3^4 - \epsilon_1^4)(\epsilon_1^2\epsilon_2^4 - \epsilon_2^2\epsilon_1^4). \end{aligned}$$

Если учесть, что  $\sigma_d(y_1, y_2) = \tilde{\psi}_0(y_1, y_2)$ , то экстраполяционная формула (18) дает асимптотическое решение обратной задачи при  $y_1 > 0$ . Если в разложении (15) учитывать только члены порядка  $O(\varphi^2)$ , то формула (18) существенно упрощается и принимает вид

$$\tilde{\psi}_0(y_1, y_2) = \frac{P_1(y_2/V, \epsilon_1)\epsilon_2^2 - P_1(y_2/V, \epsilon_2)\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2} \left( \frac{cl^2 \exp(-2\mu(y_1^2 + l^2)^{1/2})}{2\pi} \frac{1}{(c(y_1^2 + l_2))^{5/2}} \right)^{-1}. \quad (19)$$

В этом случае для проведения процедуры экстраполяции достаточно всего двух функций (измерений)  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$ . При  $y_1 < 0$  имеют место формулы, аналогичные (18), (19), в которых функцию  $P_1$  нужно заменить на  $P_2$ .

#### 4. Результаты численного моделирования

Для демонстрации работоспособности экстраполяционных алгоритмов решения обратной задачи были проведены серии экспериментов. В численных экспериментах тестовая функция имела вид

$$\sigma_d(r_1, r_2) = 0.5 + 0.2 \sin \left[ \pi \left( \frac{r_1}{30} - \frac{r_2}{15} \right) \right] \times \\ \times (\exp(-0.001(r_1 - 100)^2) + \exp(-0.001(r_1 - 250)^2)) \quad (20)$$

в области  $300 \times 50$  м,  $r_1 \in [0, 300]$ ,  $r_2 \in [0, 50]$ . Остальные величины имели следующие характерные для высокочастотного акустического зондирования в океанической среде значения [15, 16]:  $l = 12$  м,  $\mu = 0.018$  м<sup>-1</sup>,  $t_{i+1} - t_i = 0.4$  с для любого  $i$ ,  $V = 1$  м/с,  $c = 1500$  м/с.

На рис. 1 представлено графическое изображение функции  $\sigma_d(r_1, r_2)$  в области зондирования  $300 \times 50$  м,  $r_1 \in [0, 300]$ ,  $r_2 \in [0, 50]$ . Более светлому цвету соответствуют большие значения функции  $\sigma_d$ , более темному — меньшие.

На рис. 2, а приведено изображение коэффициента донного рассеяния, полученное в приближении узкой диаграммы направленности по формуле (13) при ширине диаграммы направленности приемной антенны, равной 6 град. ( $\epsilon_1 = 3\pi/180$ ). На рис. 2, б приведено изображение функции  $\sigma_d$ , полученное по экстраполяционной формуле (19) посредством двух измерений антеннами с шириной диаграмм направленности 6 и 8 град. ( $\epsilon_1 = 3\pi/180$ ,  $\epsilon_3 = 4\pi/180$ ). На рис. 2, в дано аналогичное изображение, полученное по формуле (19) при  $\epsilon_1 = 3\pi/180$  и  $\epsilon_2 = 3.5\pi/180$ . На рис. 2, г представлено изображение коэффициента донного рассеяния, полученное по формуле (18) при  $\epsilon_1 = 3\pi/180$ ,  $\epsilon_2 = 3.5\pi/180$  и  $\epsilon_3 = 4\pi/180$ .

Анализ рисунков показывает, что качество изображений, полученных путем экстраполяции, значительно лучше, нежели рис. 2, а, полученное в приближении узкой диаграммы направленности по формуле (13) при наименьшей ширине ( $\epsilon_1 = 3\pi/180$ ). Визуально сложно отдать предпочтение какому-либо из экстраполированных изображений на рис. 2, б–г. Для количественной оценки качества реконструкции использовалось среднеквадратичное отклонение

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (\sigma_d(y_{1,i}, y_{2,j}) - \tilde{\sigma}_d(y_{1,i}, y_{2,j}))^2}{\sum_i \sum_j (\sigma_d(y_{1,i}, y_{2,j}))^2}},$$

где  $\sigma_d$  — точное значение коэффициента донного рассеяния;  $\tilde{\sigma}_d$  — значения, полученные либо в приближении узкой диаграммы направленности по формуле (13), либо по экстраполяционным формулам (18) и (19).

В табл. 1 приведены значения относительного среднеквадратичного отклонения. В первых трех колонках даны ошибки восстановления коэффициента донного рассеяния при вычислении по формуле (13) для различных значений параметра  $\epsilon$ . Как и ожидалось, при увеличении  $\epsilon$  вычисления по формуле (13) приводят к росту погрешности. В следующих двух колонках приведены ошибки восстановления для экстраполяционной формулы (19) по значениям функций  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$  и  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$  соответственно. В последней колонке приведена погрешность экстраполяционной формулы (18) по заданным функциям  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$ . Из таблицы видно, что с уменьшением  $\epsilon_i$  точность восстановления функции растет. При экстраполяции первого порядка с по-

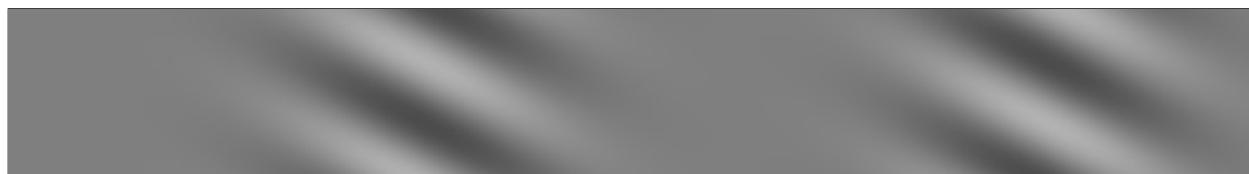


Рис. 1. Графическое представление функции  $\sigma_d$  при  $r_1 \in [0, 300]$ ,  $r_2 \in [0, 50]$ , полученное по формуле (20)

Fig. 1. Graphical representation of the function  $\sigma_d$  for  $r_1 \in [0, 300]$ ,  $r_2 \in [0, 50]$ , obtained by formula (20)

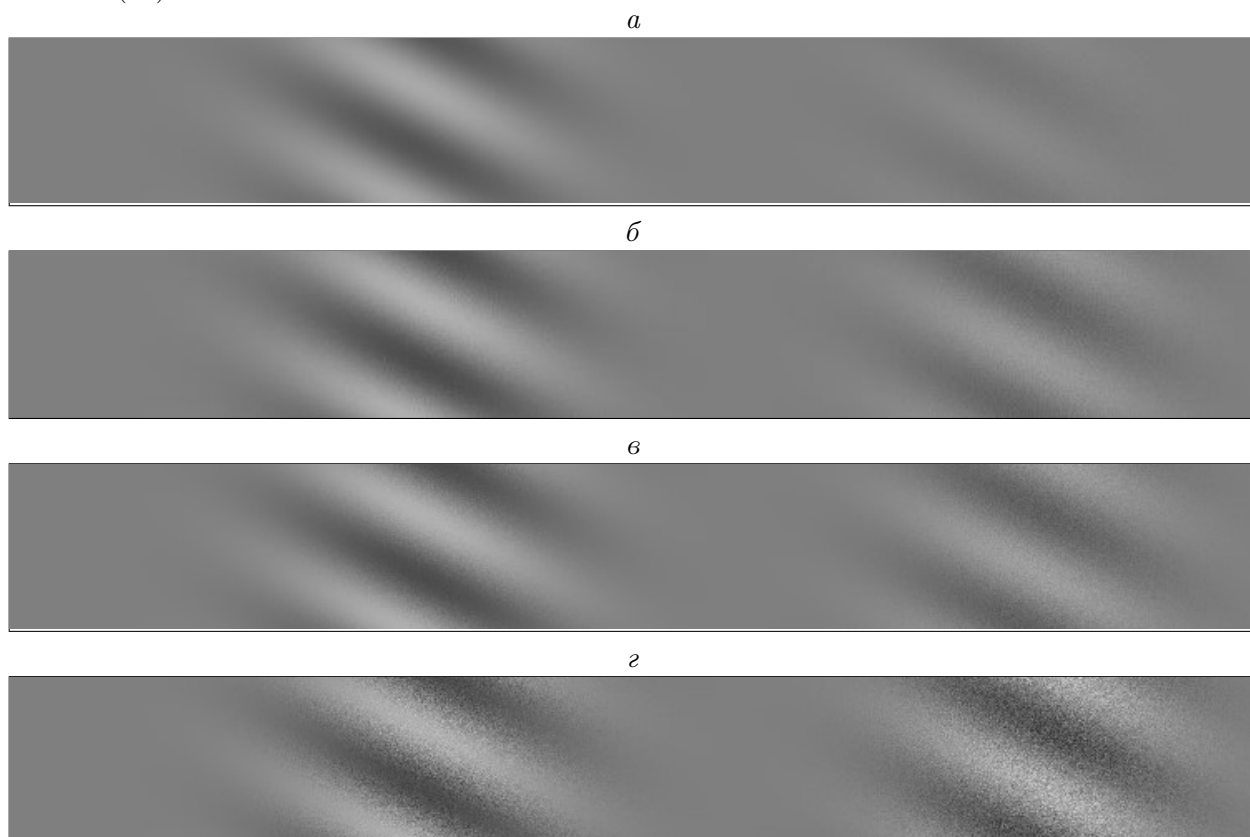


Рис. 2. Изображения морского дна, полученные: по данным измерений антенной с шириной диаграммы направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$  (а), экстраполированным данным двух измерений антеннами с шириной диаграмм направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$  и  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (б), экстраполированным данным двух измерений с шириной диаграмм направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$  и  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  (в), экстраполированным данным трех измерений с шириной диаграмм направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  и  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (г)

Fig. 2. Seabed images obtained: from to measurements by an antenna with a beam width of  $\epsilon_1 = 3^\circ$  (a), extrapolated data from two measurements by antennas with beam widths  $\epsilon_1 = 3^\circ$  and  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (б), extrapolated data from two measurements with beam widths  $\epsilon_1 = 3^\circ$  and  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  (в), extrapolated data from three measurements with beam widths  $\epsilon_1 = 3^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  and  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (г)

Т а б л и ц а 1. Относительная среднеквадратичная погрешность определения функции  $\sigma_d$  по формулам (13), (18), (19) при заданных  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$

Table 1. Relative root-mean-square error for determining the function  $\sigma_d$  using formulas (13), (18), (19) for given  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$

$\epsilon_3$	$\epsilon_2$	$\epsilon_1$	$\epsilon_3, \epsilon_1$	$\epsilon_2, \epsilon_1$	$\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1$
0.1197	0.1067	0.0896	0.0533	0.0467	0.0596



мощью формулы (19) ошибка становится еще меньше, и ожидаемо, что ошибка восстановления по данным  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$  меньше ошибки восстановления при использовании функций  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$ . Однако при реконструкции коэффициента ослабления по экстраполяционной формуле более высокого порядка (18) погрешность неожиданно возросла. Мы связали этот факт с тем, что точность вычисления функций  $P_1(t, \epsilon_i)$  в эксперименте недостаточно высока, а процедура экстраполяции является неустойчивой, причем неустойчивость усиливается с увеличением порядка экстраполяции. Чтобы убедиться в этом выполнен более точный расчет функции  $P_1(t, \epsilon)$  в формуле (11). Для вычисления интегралов в (11) использован метод Монте-Карло. В первом эксперименте для вычисления использованы 1000 точек, а во втором — 10 000 точек. Выбор медленно сходящегося статистического метода для вычисления интегралов обусловлен попыткой обеспечить более реалистичный случайный характер ошибки функции  $P_1(t, \epsilon)$ .

На рис. 3 и в табл. 2, как и в первом эксперименте, представлены результаты расчетов по формулам (13), (18) и (19). В этом случае даже визуально можно заметить, что экстраполяционная формула второго порядка (18) показала наилучший резуль-



Рис. 3. Изображения морского дна, полученные по данным с повышенной точностью: по данным измерений антенной с шириной диаграммы направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$  (а), экстраполированным данным двух измерений антеннами с шириной диаграмм направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$  и  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (б), экстраполированным данным двух измерений с шириной диаграмм направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$  и  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  (в), экстраполированным данным трех измерений с шириной диаграмм направленности  $\epsilon_1 = 3^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  и  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (г)

Fig. 3. Seabed images obtained from data with increased accuracy: from measurements by an antenna with a beam width of  $\epsilon_1 = 3^\circ$  (a), extrapolated data from two measurements by antennas with beam widths  $\epsilon_1 = 3^\circ$  and  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (б), extrapolated data from two measurements with beam widths  $\epsilon_1 = 3^\circ$  and  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  (в), extrapolated data from three measurements with beam widths  $\epsilon_1 = 3^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 3.5^\circ$  and  $\epsilon_3 = 4^\circ$  (г)

Т а б л и ц а 2. Относительная среднеквадратичная погрешность определения коэффициента донного рассеяния  $\sigma_d$  по уточненным данным  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$   
 Table 2. Relative root-mean-square error for determining the bottom scattering coefficient  $\sigma_d$  from updated data  $P_1(t, \epsilon_1)$ ,  $P_1(t, \epsilon_2)$ ,  $P_1(t, \epsilon_3)$

$\epsilon_3$	$\epsilon_2$	$\epsilon_1$	$\epsilon_3, \epsilon_1$	$\epsilon_2, \epsilon_1$	$\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1$
0.1197	0.1067	0.0896	0.0524	0.0438	0.0235

тат. Количественная ошибка восстановления искомого коэффициента по формуле (18) оказалась почти в два раза меньше ошибки восстановления по формуле (19) и почти в четыре раза меньше, чем по формуле (13), с параметром  $\epsilon = \epsilon_1$ .

Применение экстраполяционного подхода для улучшения качества изображений морского дна в случае сильно меняющихся и тем более разрывных функций  $\sigma_d(\mathbf{r})$  не дало положительного результата. Даже в том случае, когда погрешность экстраполированного решения уменьшалась, визуальная оценка качества полученного изображения почти всегда ухудшалась в сравнении с приближенным неэкстраполированным изображением. По-видимому, исследования в этом направлении далеки от своего завершения и требуют новых подходов при выборе асимптотического разложения искомой функции. Альтернативой таких подходов могут быть методы дополнительной обработки испорченных проявлением эффекта Гиббса изображений разрывных функций [24].

## Заключение

Рассмотрена одна из постановок обратной задачи для нестационарного уравнения переноса излучения применительно к задачам акустического зондирования морского дна с помощью гидролокаторов бокового обзора. Предложены экстраполяционные методы первого и второго порядков для повышения точности асимптотического решения обратной задачи при малых значениях параметра, характеризующего ширину диаграммы направленности приемной антенны. На серии численных экспериментов показано, что экстраполяционный метод второго порядка более предпочтителен, когда исходные данные задачи известны с хорошей точностью. В дальнейшем мы планируем более детально изучить вопросы, связанные в выбором оптимального порядка экстраполяционного разложения функций с заданной скоростью изменения в пределах сектора приема отраженного сигнала при фиксированной ошибке измерений.

Отметим, что задача определения коэффициента донного рассеяния тесно связана с задачей определения диффузно отражающей поверхности [25]. Если функция, описывающая донную поверхность, слабо отклоняется от некоторого среднего уровня и ее производные малы, то обе задачи фактически однотипны. Причем в силу условий малости производной функции, описывающей рельеф поверхности, применение экстраполяционных алгоритмов для решения задачи батиметрии становится особенно привлекательным и перспективным. Исследованиями такого рода мы также намерены заняться в будущем.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00378, <https://rscf.ru/project/23-21-00378/>.

## Список литературы

- [1] **Лекомцев В.М.** Гидроакустические средства визуализации для необитаемых подводных аппаратов. Современные технологии автоматизации. 2013; (3):78–82.
- [2] **Богородский А.В., Яковлев Г.В., Корепин Е.А., Должиков А.К.** Гидроакустическая техника исследования и освоения океана. Л.: Гидрометеиздат; 1984: 264.
- [3] **Griffiths G.** Technology and applications of autonomous underwater vehicles. London: CRC Press; 2002: 342.
- [4] **Ishimaru A.** Wave propagation and scattering in random media. N.Y.: Academic Press; 1978: 272.
- [5] **Uric R.J.** Principles of underwater sound. 3rd ed. Los Altos: Peninsula Pub; 1996: 444.
- [6] **Прохоров И.В., Сущенко А.А.** Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения. Акустический журнал. 2015; 61(3):400–408.
- [7] **Коваленко Е.О., Прохоров И.В.** Определение коэффициента донного рассеяния при многолучевом зондировании океана. Дальневосточный математический журнал. 2019; 19(2):206–222.
- [8] **Коваленко Е.О., Прохоров И.В.** Локализация линий разрыва коэффициента донного рассеяния по данным акустического зондирования. Сибирский журнал индустриальной математики. 2022; 25(1):67–79.
- [9] **Gonzales R.C., Woods R.E.** Digital image processing. Boston: Addison-Wesley; 2001: 813.
- [10] **Сай С.И., Шоберг А.Г., Бурдинский И.Н., Наумов Л.А., Золотарев В.В.** Алгоритмы анализа и цифровой обработки гидролокационных изображений. Подводные исследования и робототехника. 2008; 2(6):32–40.
- [11] **Krylov A.S., Nasonov A.V., Ushmaev O.S.** Video super-resolution with fast deconvolution. Pattern Recognition and Image Analysis. 2009; 19(3):497–500. DOI:10.1134/S105466180903016X.
- [12] **Насонов А.В., Крылов А.С., Ушмаев О.С.** Применение метода суперразрешения для биометрических задач распознавания лиц в видеопотоке. Системы высокой доступности. 2009; (1):26–34.
- [13] **Матвиенко Ю.В., Воронин В.А., Тарасов С.П., Скняря А.В., Тутынин Е.В.** Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов. Подводные исследования и робототехника. 2009; 8(2):4–15.
- [14] **Вагин А.В., Воротынцева А.С.** Теоретическое и экспериментальное обоснование принципов построения гидролокаторов обзора донной обстановки. Известия СПбГЭТУ “ЛЭТИ”. 2022; 15(5/6):5–14.
- [15] **Агеев А.Л., Игумнов Г.А., Костоусов В.Б., Агафонов И.Б., Золотарев В.В., Мадисон Е.А.** Синтезирование апертуры многоканального гидролокатора бокового обзора с компенсацией траекторных нестабильностей. Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2013; 3(140):140–148.
- [16] **Костоусов В.Б., Костоусов А.В.** Моделирование ГБО с синтезированной апертурой. Подводные исследования и робототехника. 2008; 2(6):16–29.
- [17] **Прохоров И.В., Яровенко И.П.** Повышение качества томографических изображений при облучении среды импульсами различной длительности. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022; 505(1):71–78.

- [18] Прохоров И.В., Сущенко А.А., Ким А. Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения. Сибирский журнал промышленной математики. 2017; 20(1):75–85.
- [19] Прохоров И.В., Сущенко А.А. Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде. Дальневосточный математический журнал. 2018; 18(1):101–111.
- [20] Amosov A.A. Initial-boundary value problem for the non-stationary radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions. Journal of Mathematical Sciences. 2018; 235(2):117–137. DOI:10.1007/s10958-018-4063-y.
- [21] Amosov A.A. Nonstationary radiation transfer through a multilayered medium with reflection and refraction conditions. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018; 41(17):8115–8135. DOI:10.1002/mma.5272.
- [22] Прохоров И.В. Задача Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими и ламбертовскими условиями сопряжения. Математические заметки. 2019; 105(1):95–107.
- [23] Kim A., Prokhorov I.V. Initial-boundary value problem for a radiative transfer equation with generalized matching conditions. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019; (16):1036–1056. DOI:10.33048/semi.2019.16.072.
- [24] Пенкин М.А., Крылов А.С., Хвостиков А.В. Гибридный метод подавления осцилляций Гиббса на изображениях магнитно-резонансной томографии. Программирование. 2021; (3):64–72.
- [25] Прохоров И.В., Сущенко А.А., Кан В.А. Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана. Сибирский журнал промышленной математики. 2015; 18(2):99–110.

## Extrapolation algorithms for improving the quality of sonar images

E. O. KOVALENKO, I. V. PROKHOROV\*, A. A. SUSHCHENKO

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, 690041, Vladivostok, Russia

\*Corresponding author: Igor V. Prokhorov, e-mail: [prokhorov@iam.dvo.ru](mailto:prokhorov@iam.dvo.ru)

Received July 31, 2023, revised September 11, 2023, accepted September 18, 2023.

### Abstract

*Purpose.* Mathematical modelling of the processes of acoustic sounding of the marine bottom using side-scan sonar mounted on autonomous unmanned underwater vehicles. Development of new extrapolation algorithms for processing the measured signal to improve the quality of seabed images.

*Methodology.* As a mathematical model, the nonstationary radiative transfer equation in an unbounded region with diffuse reflection conditions on the boundaries is considered. An inverse problem is formulated, which includes finding for the coefficient of bottom scattering under some redefinition conditions. Using some simplifying restrictions, the problem is reduced to an integral equation of the first kind, which has an explicit solution in the narrow beam approximation. For an approximate solution of the obtained equation, it is proposed to use the data of measurements

by antennas with radiation patterns of different widths. Then the solution of the radiation transfer equation is extrapolated to the region of small values of the parameter characterizing the width of the radiation pattern. An explicit formula is used to find the bottom scattering coefficient for the extrapolated solution of the direct problem. Extrapolation algorithms of the first and second order are considered.

*Findings.* A series of numerical experiments revealed that the developed algorithms are very effective if the condition on the accuracy of measurements are satisfied. The limitations associated with the accuracy of the original data, especially affect the quality of images when using higher order extrapolation formulas.

*Keywords:* radiative transfer equation, inverse problem, extrapolation, bottom scatter coefficient, side-scan sonar, seabed images.

*Citation:* Kovalenko E.O., Prokhorov I.V., Sushchenko A.A. Extrapolation algorithms for improving the quality of sonar images. Computational Technologies. 2024; 29(3):38–51. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.004. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The work is supported by Russian Science Foundation, grant No. 23-21-00378, <https://rscf.ru/project/23-21-00378/>.

## References

1. **Lekomtsev V.M.** Sonar imaging tools for uninhabited underwater vehicles. *Sovremennye Tekhnologii Avtomatizatsii*. 2013; (3):78–82. (In Russ.)
2. **Bogorodskiy A.V., Yakovlev G.V., Korepin E.A., Dolzhikov A.K.** *Gidroakusticheskaya tekhnika issledovaniya i osvoeniya okeana* [Hydroacoustic technique of ocean exploration and development]. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1984: 264. (In Russ.)
3. **Griffiths G.** *Technology and applications of autonomous underwater vehicles*. London: CRC Press; 2002: 342.
4. **Ishimaru A.** *Wave propagation and scattering in random media*. N.Y.: Academic Press; 1978: 272.
5. **Uric R.J.** *Principles of underwater sound*. 3rd ed. Los Altos: Peninsula Pub; 1996: 444.
6. **Prokhorov I.V., Sushchenko A.A.** Studying the problem of acoustic sounding of the seabed using methods of radiative transfer theory. *Acoustical Physics*. 2015; 61(3):368–375. DOI:10.1134/S1063771015020104.
7. **Kovalenko E.O., Prokhorov I.V.** Determination of the coefficient of bottom scattering during multi-beam sounding of the ocean. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019; 19(2):206–222. (In Russ.)
8. **Kovalenko E.O., Prokhorov I.V.** Localization of the discontinuity lines of the bottom scattering coefficient according to acoustic sounding data. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2022; 16(1):70–79. DOI:10.1134/S1990478922010069.
9. **Gonzales R.C., Woods R.E.** *Digital image processing*. Boston: Addison-Wesley; 2001: 813.
10. **Say S.I., Shoberg A.G., Burdinskiy I.N., Naumov L.A., Zolotarev V.V.** Algorithms for analysis and digital processing of sonar images. *Underwater Investigations and Robotics*. 2008; 2(6):32–40. (In Russ.)
11. **Krylov A.S., Nasonov A.V., Ushmaev O.S.** Video super-resolution with fast deconvolution. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2009; 19(3):497–500. DOI:10.1134/S105466180903016X.
12. **Nasonov A.V., Krylov A.S., Ushmayev O.S.** Application of the super-resolution method for biometric face recognition tasks in a video stream. *High Availability Systems*. 2009; (1):26–34. (In Russ.)
13. **Matviyenko Yu.V., Voronin V.A., Tarasov S.P., Sknarya A.V., Tutynin E.V.** Ways to improve hydroacoustic technologies for seabed survey using autonomous uninhabited underwater vehicles. *Underwater Investigations and Robotics*. 2009; 8(2):4–15. (In Russ.)
14. **Vagin A.V., Vorotyntseva A.S.** Theoretical and experimental substantiation of the principles of construction of bottom survey sonars. *LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science*. 2022; 15(5/6):5–14. (In Russ.)
15. **Ageev A.L., Igumnov G.A., Kostousov V.B., Agafonov I.B., Zolotarev V.V., Madison E.A.** Aperture synthesizing for multichannel side-scan sonar with compensation of trajectory instability. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2013; 3(140):140–148. (In Russ.)
16. **Kostousov V.B., Kostousov A.V.** Modeling of side-scan sonar with a synthesized aperture. *Underwater Investigations and Robotics*. 2008; 2(6):16–29. (In Russ.)

17. **Prokhorov I.V., Yarovenko I.P.** Improving the quality of tomographic images of a medium using irradiation with pulses of different duration. *Doklady Mathematics*. 2022; 106(1):272–278. DOI:10.33048/SIBJIM.2022.25.105.
18. **Prokhorov I.V., Sushchenko A.A., Kim A.** Initial boundary value problem for the radiative transfer equation with diffusion matching conditions. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2017; 11(19):115–124. DOI:10.1134/S1990478917010136.
19. **Prokhorov I.V., Sushchenko A.A.** The Cauchy problem for the radiative transfer equation in an unbounded medium. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018; 18(1):101–111. (In Russ.)
20. **Amosov A.A.** Initial-boundary value problem for the non-stationary radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018; 235(2):117–137. DOI:10.1007/s10958-018-4063-y.
21. **Amosov A.A.** Nonstationary radiation transfer through a multilayered medium with reflection and refraction conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018; 41(17):8115–8135. DOI:10.1002/mma.5272.
22. **Prokhorov I.V.** The Cauchy problem for the radiation transfer equation with Fresnel and Lambert matching conditions. *Mathematical Notes*. 2019; (105):80–90. DOI:10.1134/S0001434619010097.
23. **Kim A., Prokhorov I.V.** Initial-boundary value problem for a radiative transfer equation with generalized matching conditions. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2019; (16):1036–1056. DOI:10.33048/semi.2019.16.072.
24. **Penkin M.A., Krylov A.S., Khvostikov A.V.** Hybrid method for Gibbs-ringing artifact suppression in magnetic resonance images. *Programming and Computer Software*. 2021; 47(3):207–214. DOI:10.1134/S0361768821030087.
25. **Prokhorov I.V., Sushchenko A.A., Kan V.A.** On the problem of reconstructing the floor topography of a fluctuating ocean. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2015; 9(3):412–422. DOI:10.1134/S1990478915030126.