Вычислительные технологии **Том 5, № 2, 2000**

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СПЕКТРА МАТРИЦ ЛЕВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

И. И. Матвеева, Э. Ю. Новожилова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет
e-mail: matveeva@math.nsc.ru

In the present article the authors continue the research of parameters $\varkappa_q$ that characterize belonging the matrix spectrum to the left half-plane. A theorem on continuous dependence of the parameters on matrix elements is proved. The authors propose an algorithm to obtain the estimates of the parameters.

Во многих прикладных задачах вопрос о поведении решения сводится к исследованию спектра некоторой числовой матрицы. Однако вычисление собственных значений несимметрических матриц с использованием ЭВМ является плохо обусловленной задачей [1, 2]. Тем не менее для решения ряда задач не обязательно знать конкретные собственные значения, а достаточно иметь информацию о расположении спектра в комплексной плоскости. Например, если весь спектр матрицы A сосредоточен в открытой левой полуплоскости, то решение системы $dy/dt = Ay$ является асимптотически устойчивым при $t > 0$. Поэтому с прикладной точки зрения представляют интерес параметры, характеризующие расположение матричного спектра.

В работе Г. В. Демиденко [3] были введены числовые характеристики $\varkappa_q$, $q > 0$, по которым можно судить о принадлежности матричного спектра замкнутой левой полуплоскости. При этом часть семейства этих характеристик, отвечающих значениям $q \le 1/2$, дает критерий принадлежности спектра открытой левой полуплоскости. В настоящей работе продолжены исследования свойств этих характеристик с целью разработки алгоритма по их вычислению при $0 < q < 1/2$.

1. Определение и свойства характеристик $\varkappa_q$

В этом разделе мы приведем определение [3] и некоторые свойства характеристик $\varkappa_q$.

Определение. *Если предел*

$$H_q(A) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \frac{e^{sA^*} e^{sA}}{(1 + s\|A\|)^{2q}} ds, \quad q > 0, \tag{1}$$

существует, то положим

$$\varkappa_q(A) = \alpha_q \|A\| \|H_q(A)\|, \tag{2}$$

© И. И. Матвеева, Э. Ю. Новожилова, 2000.

где $\alpha_q = \left(\int\limits_0^\infty (1+s)^{-2q} e^{-2s} ds \right)^{-1}$. *Если интеграл (1) расходится, то полагаем* $\varkappa_q(A) = \infty$.

Отметим, что

$$H_0(A) = \int\limits_0^\infty e^{sA^*} e^{sA}\, ds$$

есть интеграл Ляпунова, а параметр $\varkappa_0(A) = 2\|A\|\|H_0(A)\|$ — числовая характеристика, предложенная в [4, 5] в качестве критерия принадлежности спектра A открытой левой полуплоскости.

Укажем ряд свойств $\varkappa_q(A)$, установленных в работе [3]:

1) имеет место равенство $\varkappa_q(A) = \varkappa_q(A/\|A\|)$;

2) пусть $\varkappa_q(A) < \infty$, тогда $\varkappa_{q'}(A) < \dfrac{\alpha_{q'}}{\alpha_q}\varkappa_q(A)$ при $q' > q$;

3) все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда существует $q \in [0, 1/2]$ такое, что $\varkappa_q(A) < \infty$.

Как следует из перечисленных свойств, при решении проблемы о принадлежности спектра открытой левой полуплоскости с вычислительной точки зрения представляют интерес характеристики $\varkappa_q(A)$ при $q \approx 1/2$. Действительно, если для матрицы A величина $\varkappa_0(A)$ является достаточно большой и выходит за пределы разрядной сетки ЭВМ, то в этом случае целесообразно попытаться вычислить величину $\varkappa_q(A)$ при $q \approx 1/2$, так как в силу свойства 2 она может быть значительно меньше $\varkappa_0(A)$. Проиллюстрируем сказанное на простом примере. Рассмотрим следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha,\ \beta > 0.$$

Как было показано в [6], с увеличением β/α растет отношение величин $\varkappa_0(A)$ и $\varkappa_{1/2}(A)$, при этом $\varkappa_0(A) \approx (\beta/\alpha)^3$, а $\varkappa_{1/2}(A) \approx (\beta/\alpha)^2$. Поэтому, если вычисления, например, проводятся на машине с максимальным числом 10^{300}, то при $\alpha = 10^{-50}$ и $\beta = 10^{60}$ величина $\varkappa_0(A)$ не может быть посчитана на этой машине в отличие от характеристики $\varkappa_{1/2}(A)$. Отметим, что в этом случае $\varkappa_0(A)/\varkappa_{1/2}(A) \approx 10^{110}$.

Для использования характеристик $\varkappa_q(A)$ при расчетах на ЭВМ необходимо иметь надежный алгоритм по исследованию сходимости матричных интегралов вида (1). В следующем разделе устанавливается результат о непрерывной зависимости матричных интегралов $H_q(A)$, $q > 0$, от элементов матрицы A. В разделе 3 предлагается алгоритм получения верхних оценок для норм этих интегралов при $0 < q < 1/2$.

Отметим, что для интеграла Ляпунова $H_0(A)$ такие исследования проводились в работах А. Я. Булгакова и С. К. Годунова [4, 5].

2. Непрерывная зависимость интегралов H_q

Докажем результат о непрерывной зависимости матричных интегралов $H_q(A)$, $q > 0$, от элементов матрицы A. Аналогичный результат для интеграла Ляпунова $H_0(A)$ см., например, в [7].

Теорема. *Пусть спектр матрицы A размера $N \times N$ принадлежит открытой левой полуплоскости. Тогда для любой матрицы $\widetilde{A}$ такой, что*

$$\frac{\|\widetilde{A} - A\|}{\|A\|} < \frac{1}{3\text{æ}_0^2(A)},$$

имеет место оценка

$$\|H_q(\widetilde{A}) - H_q(A)\| \leq c\|H_0(A)\| \, \|\widetilde{A} - A\|, \quad q > 0, \tag{3}$$

где $c > 0$ *— некоторая константа.*

Доказательство. Из теоремы о непрерывной зависимости интеграла Ляпунова $H_0(A)$ [7] следует, что спектр матрицы $\widetilde{A}$ сосредоточен в открытой левой полуплоскости. Тогда, как было установлено в [3], матрица $H_q(\widetilde{A})$ определена при всех $q > 0$.

В работе [3] доказано, что матричный интеграл $H_q(A)$ удовлетворяет соотношению

$$H_q(A)A + A^* H_q(A) = -I + 2q\|A\| H_{q+1/2}(A). \tag{4}$$

Поскольку все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то по теореме Ляпунова имеем

$$H_q(A) = \int\limits_0^\infty e^{sA^*}[I - 2q\|A\| H_{q+1/2}(A)] e^{sA} ds = H_0(A) - 2q\|A\| \int\limits_0^\infty e^{sA^*} H_{q+1/2}(A) e^{sA} ds. \tag{5}$$

Обозначим $\Delta A = \widetilde{A} - A$. Выписав соотношение (4) для матрицы $H_q(\widetilde{A})$, получим

$$H_q(\widetilde{A})A + A^* H_q(\widetilde{A}) = -I + 2q\|\widetilde{A}\| H_{q+1/2}(\widetilde{A}) - [H_q(\widetilde{A})\Delta A + (\Delta A)^* H_q(\widetilde{A})].$$

Тогда по теореме Ляпунова имеем

$$H_q(\widetilde{A}) = H_0(A) - 2q\|\widetilde{A}\| \int\limits_0^\infty e^{sA^*} H_{q+1/2}(\widetilde{A}) e^{sA} ds + \int\limits_0^\infty e^{sA^*}[H_q(\widetilde{A})\Delta A + (\Delta A)^* H_q(\widetilde{A})] e^{sA} ds. \tag{6}$$

Используя (4) для матриц $H_{q+1/2}(A)$ и $H_{q+1/2}(\widetilde{A})$, получаем

$$H_{q+1/2}(A) = H_0(A) - 2(q+1/2)\|A\| \int\limits_0^\infty e^{sA^*} H_{q+1}(A) e^{sA} ds,$$

$$H_{q+1/2}(\widetilde{A}) = H_0(A) - 2(q+1/2)\|\widetilde{A}\| \int\limits_0^\infty e^{sA^*} H_{q+1}(\widetilde{A}) e^{sA} ds +$$

$$+ \int\limits_0^\infty e^{sA^*}[H_{q+1/2}(\widetilde{A})\Delta A + (\Delta A)^* H_{q+1/2}(\widetilde{A})] e^{sA} ds.$$

Продолжая далее эту цепочку рассуждений, мы можем выразить матрицы $H_{j+q-1/2}(A)$ и $H_{j+q-1/2}(\widetilde{A})$, $j = 3/2, 2, \ldots, N$, следующим образом:

$$H_{j+q-1/2}(A) = H_0(A) - 2(j+q-1/2)\|A\| \int\limits_0^\infty e^{sA^*} H_{j+q}(A) e^{sA} ds,$$

$$H_{j+q-1/2}(\widetilde{A}) = H_0(A) - 2(j+q-1/2)\|\widetilde{A}\| \int\limits_0^\infty e^{sA^*} H_{j+q}(\widetilde{A}) e^{sA} ds +$$

$$+\int_0^\infty e^{sA^*}[H_{j+q-1}(\widetilde{A})\Delta A + (\Delta A)^* H_{j+q-1}(\widetilde{A})]e^{sA}ds.$$

Рассмотрим разность $H_q(\widetilde{A}) - H_q(A)$. В силу (5), (6) и свойства монотонности матричных интегралов [3]

$$\|H_q(A)\| < \|H_{q'}(A)\|, \quad q' < q,$$

получаем

$$\|H_q(\widetilde{A}) - H_q(A)\| \le 2\|H_0(A)\| \left[(1+q)\|\Delta A\|\|H_q(\widetilde{A})\| + q\|A\|\|H_{q+1/2}(\widetilde{A}) - H_{q+1/2}(A)\|\right].$$

Аналогичным образом оценивая нормы разности для

$$\|H_{q+1/2}(\widetilde{A}) - H_{q+1/2}(A)\|,\ \|H_{q+1}(\widetilde{A}) - H_{q+1}(A)\|,\ \ldots,\ \|H_{N+q+1/2}(\widetilde{A}) - H_{N+q+1/2}(A)\|,$$

имеем

$$\|H_q(\widetilde{A}) - H_q(A)\| \le \|H_0(A)\| \left[c_1\|\widetilde{A} - A\|\|H_q(\widetilde{A})\| + c_2\|H_{N+q}(\widetilde{A}) - H_{N+q}(A)\|\right], \tag{7}$$

где константы $c_i = c_i(q, \|A\|) > 0$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим следующую разность матричных интегралов:

$$H_{N+q}(\widetilde{A}) - H_{N+q}(A) = \int_0^\infty \frac{e^{s\widetilde{A}^*}e^{s\widetilde{A}}}{(1+\|\widetilde{A}\|s)^{2(N+q)}}ds - \int_0^\infty \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+\|A\|s)^{2(N+q)}}ds =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{s\widetilde{A}^*}e^{s\widetilde{A}} - e^{sA^*}e^{sA}}{(1+\|\widetilde{A}\|s)^{2(N+q)}}ds + \int_0^\infty \left[(1+\|\widetilde{A}\|s)^{-2(N+q)} - (1+\|A\|s)^{-2(N+q)}\right] e^{sA^*}e^{sA}ds = J_1 + J_2.$$

Вначале оценим $\|J_1\|$. Используя соотношения

$$e^{s\widetilde{A}^*}e^{s\widetilde{A}} - e^{sA^*}e^{sA} = e^{s\widetilde{A}^*}\left(e^{s\widetilde{A}} - e^{sA}\right) + \left(e^{s\widetilde{A}^*} - e^{sA^*}\right)e^{sA},$$

$$e^{s\widetilde{A}} - e^{sA} = \int_0^s e^{(s-\tau)A}(\widetilde{A} - A)e^{\tau\widetilde{A}}d\tau$$

и неравенство Гельфанда—Шилова [8], имеем

$$\|J_1\| \le d_1\|\widetilde{A} - A\|,$$

где d_1 — положительная постоянная, зависящая от N, q, $\varkappa_0(A)$.

Для того чтобы оценить $\|J_2\|$, воспользуемся формулой Ньютона—Лейбница

$$(1+\|\widetilde{A}\|s)^{-2(N+q)} - (1+\|A\|s)^{-2(N+q)} = \int_0^1 D_\lambda\left[(1+\lambda\|\widetilde{A}\|s + (1-\lambda)\|A\|s)^{-2(N+q)}\right]d\lambda =$$

$$= \int_0^1 \frac{2(N+q)(\|A\| - \|\widetilde{A}\|)s}{(1+\lambda\|\widetilde{A}\|s + (1-\lambda)\|A\|s)^{2(N+q)+1}}d\lambda.$$

Следовательно,

$$\|J_2\| \le 2(N+q)\|\widetilde{A}-A\| \left\| \int_0^\infty \int_0^1 \frac{s}{(1+\lambda\|\widetilde{A}\|s+(1-\lambda)\|A\|s)^{2(N+q)+1}} d\lambda\, e^{sA^*} e^{sA}\, ds \right\|.$$

В силу неравенства Гельфанда—Шилова имеем

$$\|J_2\| \le d_2 \|\widetilde{A}-A\|,$$

где d_2 — положительная постоянная, зависящая от N, q, $\varkappa_0(A)$.

С учетом полученных оценок из (7) следует неравенство (3).

Теорема доказана.

3. Оценки норм интегралов H_q

В этом разделе предлагается алгоритм получения верхних оценок для норм матричных интегралов H_q.

Рассмотрим некоторую числовую матрицу A размера $N\times N$. В силу свойства 3 для того чтобы выяснить, принадлежит ли спектр данной матрицы открытой левой полуплоскости, необходимо проверить конечность величины $\varkappa_q(A)$, $0 \le q \le 1/2$, определенной (2), или, что то же самое, сходимость интеграла (1).

В силу свойства 1 полагаем, что $\|A\|=1$. Все рассуждения проведем в случае $0<q<1/2$. По определению

$$H_q(A) = \int_0^\infty \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds.$$

Разобьем $H_q(A)$ на два интеграла

$$H_q(A) = \int_0^{2^k} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds + \int_{2^k}^\infty \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds = H^1_{q,k} + H^2_{q,k}. \tag{8}$$

Оценим норму первого интеграла. Для этого перепишем его в виде

$$H^1_{q,k} = \int_0^{2^k} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds = \int_0^{2^{k-1}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds + \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds \le$$

$$\le \int_0^{2^{k-1}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds + (1+2^{k-1})^{-2q} \int_{2^{k-1}}^{2^k} e^{sA^*}e^{sA} ds =$$

$$= \int_0^{2^{k-1}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds + (1+2^{k-1})^{-2q} e^{2^{k-1}A^*} \left(\int_0^{2^{k-1}} e^{sA^*}e^{sA} ds \right) e^{2^{k-1}A}.$$

Следовательно,

$$H^1_{q,k} \le H^1_{q,k-1} + (1+2^{k-1})^{-2q} e^{2^{k-1}A^*} H^1_{0,k-1} e^{2^{k-1}A}, \quad k \ge 1, \quad H^1_{q,0} \le H^1_{0,0}. \tag{9}$$

Аналогичным образом получаем

$$H^1_{0,k} = H^1_{0,k-1} + e^{2^{k-1}A^*} H^1_{0,k-1} e^{2^{k-1}A}, \quad k \geq 1,$$

где $H^1_{0,0} = \int\limits_0^1 e^{sA^*} e^{sA} ds$. Вычисляя значения матриц $e^{2^k A}$ и $H^1_{0,0}$, норму интеграла $H^1_{q,k}$ можно оценить с использованием рекуррентных формул (9).

Для приближенного вычисления $e^{2^k A}$ воспользуемся разложением матричной экспоненты в ряд Тейлора

$$e^{A/2} = I + \frac{A/2}{1!} + \frac{(A/2)^2}{2!} + \cdots$$

Обозначим

$$S_m = I + \frac{A/2}{1!} + \cdots + \frac{(A/2)^m}{m!}. \tag{10}$$

Учитывая, что $\|A\| = 1$ и

$$\frac{1}{m+2} < 1, \quad \frac{1}{(m+2)(m+3)} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)} < \frac{1}{2^2}, \quad \ldots,$$

имеем

$$\|e^{A/2} - S_m\| \leq \left\| \frac{(A/2)^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{(A/2)^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots \right\| \leq \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!} + \frac{1}{2^{m+2}(m+2)!} + \cdots \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \cdots \right) = \frac{e^{1/2}}{2^{m+1}(m+1)!}.$$

Следовательно, поскольку $e^{2^k A} = e^{2^{k+1} A/2}$ и $\|e^{A/2}\| \leq e^{1/2}$, получаем

$$\|e^{2^k A} - S_m^{2^{k+1}}\| = \left\| (e^{A/2} - S_m) \left(e^{\frac{(2^{k+1}-1)A}{2}} + \cdots + S_m^{2^{k+1}-1} \right) \right\| \leq \frac{e^{2^k}}{2^{m-k}(m+1)!}. \tag{11}$$

Таким образом, за счет выбора m мы достаточно точно можем приблизить матричную экспоненту $e^{2^k A}$.

Для вычисления интеграла $H^1_{0,0}$ воспользуемся схемой, изложенной в [7]. Рассмотрим разложение интегральной матрицы

$$H(\tau) = \int\limits_0^\tau e^{sA^*} e^{sA} ds$$

в ряд Тейлора

$$H(\tau) = H(0) + \frac{\tau}{1!} H^{(1)}(0) + \frac{\tau^2}{2!} H^{(2)}(0) + \cdots$$

Используя рекуррентные формулы

$$H^{(1)}(\tau) = e^{\tau A^*} e^{\tau A}, \quad H^{(k)}(\tau) = A^* H^{(k-1)}(\tau) + H^{(k-1)}(\tau) A, \quad k \geq 2,$$

можно определить производные любого порядка, при этом $H(0) = 0$, $H^{(1)}(0) = I$,

$$\|H^{(k)}(0)\| \leq 2\|A\| \|H^{(k-1)}(0)\| \leq 2^{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S^m = \frac{1}{1!}H^{(1)}(0) + \dots + \frac{1}{m!}H^{(m)}(0).$$

Оценим остаток ряда

$$\|H^1_{0,0} - S^m\| = \left\| \frac{1}{(m+1)!}H^{(m+1)}(0) + \frac{1}{(m+2)!}H^{(m+2)}(0) + \cdots \right\| \le$$

$$\le \frac{2^m}{(m+1)!} + \frac{2^{m+1}}{(m+2)!} + \dots = \frac{1}{2}\left[\frac{2^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{2^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{m+1}}{(m+1)!}[e^2-1].$$

Следовательно, выбирая число m достаточно большим, мы можем приблизить интеграл $H^1_{0,0}$ частичной суммой S^m с требуемой точностью.

Как было отмечено выше, используя рекуррентные формулы (9), можно установить верхнюю оценку для нормы матричного интеграла $H^1_{q,k}$ при любом $k \ge 0$. Однако при проведении численных расчетов на ЭВМ мы должны ограничиться некоторым k^*, при котором можно было бы гарантировать, что

либо $\|H^1_{q,k^*}\| < \infty$ и $\frac{\|H^2_{q,k^*}\|}{\|H^1_{q,k^*}\|} < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, т. е. $\varkappa_q(A) < \infty$ и спектр исследуемой матрицы A принадлежит открытой левой полуплоскости,

либо необходимость отказаться от рассмотрения этой матрицы, поскольку часть ее спектра или расположена достаточно близко к мнимой оси, или попадает в замкнутую правую полуплоскость.

Для выбора числа k^* воспользуемся следующим вспомогательным результатом.

Лемма 1. *Пусть спектр матрицы A принадлежит открытой левой полуплоскости. Тогда для ее собственных значений λ_k, $k = 1, \dots, N$, имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re}\lambda_k \le -\|A\| æ_q(A)^{\frac{1}{2q-1}}, \quad 0 \le q < 1/2.$$

Доказательство. Обозначим через $\langle u, w\rangle$ скалярное произведение векторов u и w, через v_j, $\|v_j\| = 1$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_j. Тогда

$$\|H_q(A)\| = \max_{\|v\|=1}\langle H_q(A)v, v\rangle \ge \langle H_q(A)v_j, v_j\rangle = \left\langle \int\limits_0^\infty \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s\|A\|)^{2q}} v_j\, ds,\, v_j \right\rangle =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\|e^{sA}v_j\|^2}{(1+s\|A\|)^{2q}}ds = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-2|\operatorname{Re}\lambda_j|s}}{(1+s\|A\|)^{2q}}ds = \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda_j|^{1-2q}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2\tau}}{(|\operatorname{Re}\lambda_j| + \tau\|A\|)^{2q}}d\tau \ge$$

$$\ge \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda_j|^{1-2q}\|A\|^{2q}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2\tau}}{(1+\tau)^{2q}}d\tau.$$

Отсюда

$$|\operatorname{Re}\lambda_j|^{1-2q} \ge \frac{1}{\|H_q(A)\|\|A\|^{2q}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2\tau}}{(1+\tau)^{2q}}d\tau = \frac{\|A\|^{1-2q}}{\varkappa_q(A)}.$$

Лемма доказана.

Предположим, что спектр исследуемой матрицы A, $\|A\| = 1$ сосредоточен строго в левой полуплоскости. Тогда $\varkappa_q(A) \le \varkappa_q^* < \infty$, где $\varkappa_q^*$ — некоторое положительное число. Приступая к вычислениям на компьютере, мы выбираем его достаточно большим, но меньшим максимального машинного числа. В силу леммы 1

$$\operatorname{Re}\lambda_k \le -(\varkappa_q^*)^{\frac{1}{2q-1}}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Используя неравенство Гельфанда—Шилова [8], имеем

$$\|e^{tA}\| \le e^{-t(\varkappa_q^*)^{\frac{1}{2q-1}}} \left(1 + \frac{2t\|A\|}{1!} + \dots + \frac{(2t\|A\|)^{N-1}}{(N-1)!}\right), \quad t \ge 0.$$

Следовательно, существует целое число $k^* > 0$ такое, что

$$e^{-2^{k^*}(\varkappa_q^*)^{\frac{1}{2q-1}}} \left(1 + \frac{2^{k^*+1}}{1!} + \dots + \frac{(2^{k^*+1})^{N-1}}{(N-1)!}\right) \le \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Тогда, если предположение о расположении спектра матрицы A верно, то для матричной экспоненты $e^{2^{k^*}A}$, насчитанной с использованием формул (10)–(11), должно выполняться неравенство

$$\|e^{2^{k^*}A}\| \le e^{-2^{k^*}(\varkappa_q^*)^{\frac{1}{2q-1}}} \left(1 + \frac{2^{k^*+1}}{1!} + \dots + \frac{(2^{k^*+1})^{N-1}}{(N-1)!}\right). \tag{13}$$

Если неравенство (13) нарушено, то на этом мы прерываем счет и отказываемся от рассмотрения предлагаемой матрицы, так как либо часть ее спектра попадает в замкнутую правую полуплоскость, либо спектр расположен достаточно близко к мнимой оси и, хотя $\varkappa_q(A) < \infty$, но $\varkappa_q(A) > \varkappa_q^*$.

Если неравенство (13) выполнено, мы продолжаем наши вычисления и, оценивая норму матричного интеграла H^1_{q,k^*} с использованием рекуррентных формул (9), получаем $\|H^1_{q,k^*}\| \le h_1$. Однако если $\alpha_q h_1 > \varkappa_q^*$, то, как и в предыдущем случае, мы отказываемся от исследования матрицы A. Если $\alpha_q h_1 < \varkappa_q^*$, то на заключительном этапе остается оценить норму второго матричного интеграла

$$H^2_{q,k^*} = \int\limits_{2^{k^*}}^{\infty} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds$$

из (8). Для этого воспользуемся следующим результатом.

Лемма 2. *Пусть* $\|A\| = 1$, $\|H_q(A)\| < \infty$, $0 \le q < 1/2$. *Если* k^* *удовлетворяет неравенству (12), то имеет место оценка*

$$\|H^2_{q,k^*}\| \le \frac{2}{3} \left\| \int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+2^{k^*}+s)^{2q}} ds \right\|.$$

Доказательство. Перепишем H^2_{q,k^*} в следующем виде:

$$H^2_{q,k^*} = \int\limits_{2^{k^*}}^{2^{k^*+1}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds + \int\limits_{2^{k^*+1}}^{2^{k^*+2}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}} ds + \dots = I_0 + I_1 + \cdots \tag{14}$$

и рассмотрим каждое слагаемое. Произведя замену $\tau = s-2^{k^*}$ в первом интеграле, получим

$$I_0 = e^{2^{k^*}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*}A}.$$

Для второго интеграла после замены $\tau = s - 2^{k^*+1}$ имеем

$$I_1 = e^{2^{k^*+1}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*+1}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*+1}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+1}A} \leq e^{2^{k^*+1}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*+1}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+1}A} =$$

$$= e^{2^{k^*+1}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+1}A} + e^{2^{k^*+1}A^*}\left(\int\limits_{2^{k^*}}^{2^{k^*+1}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+1}A} \leq$$

$$\leq e^{2^{k^*+1}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+1}A} + e^{2^{k^*+1}A^*}\left[e^{2^{k^*}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\eta A^*}e^{\eta A}}{(1+2^{k^*}+\eta)^{2q}}d\eta\right)e^{2^{k^*}A}\right]e^{2^{k^*+1}A}$$

(в последнем неравенстве использована замена $\eta = \tau - 2^{k^*}$). Введем обозначение

$$h = \left\|\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau\right\|.$$

В силу (13) $\|e^{2^{k^*}A}\| \leq 1/2$. Тогда

$$\|I_0\| \leq \frac{1}{2^2}h, \quad \|I_1\| \leq \frac{1}{2^2}\left(h + \frac{1}{2^2}h\right)\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2^3}h.$$

Распишем третье слагаемое из (3). Сделав замену $\tau = s - 2^{k^*+2}$, получим

$$I_2 = e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*+2}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*+2}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+2}A} = e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*+2}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+2}A} +$$

$$+ e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_{2^{k^*}}^{2^{k^*+1}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*+2}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+2}A} + e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_{2^{k^*+1}}^{2^{k^*+2}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*+2}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+2}A} \leq$$

$$\leq e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+2}A} + e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_{2^{k^*}}^{2^{k^*+1}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+2}A} +$$

$$+ e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_{2^{k^*+1}}^{2^{k^*+2}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+\tau)^{2q}}d\tau\right)e^{2^{k^*+2}A} = e^{2^{k^*+2}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{\tau A^*}e^{\tau A}}{(1+2^{k^*}+\tau)^{2q}}d\tau + I_0 + I_1\right)e^{2^{k^*+2}A}.$$

Следовательно,

$$\|I_2\| \le \frac{1}{2^{2^2}}\left(h + \frac{1}{2^2}h + \frac{1}{2^3}h\right)\frac{1}{2^{2^2}} \le \left(\frac{1}{2^{2^2}}\right)^2 2h = \frac{1}{2^{2^3-1}}h.$$

Аналогичным образом выписываются оценки для остальных слагаемых из (14):

$$\|I_j\| \le \frac{1}{2^{2^{j+1}-1}}h, \quad j \ge 3.$$

Тогда

$$\|H^2_{q,k^*}\| \le \sum_{j\ge 0}\left\| \int\limits_{2^{k^*+j}}^{2^{k^*+j+1}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+s)^{2q}}ds \right\| \le 2h\sum_{j\ge 0}\frac{1}{2^{2^{j+1}}} =$$

$$= 2h\sum_{j\ge 0}\frac{1}{4^{2^j}} \le 2h\left(\sum_{l\ge 0}\frac{1}{4^l} - 1\right) = 2h\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{2}{3}h.$$

Лемма доказана.

В силу доказанной леммы, чтобы установить верхнюю оценку для нормы $\|H^2_{q,k^*}\|$, достаточно оценить норму матричного интеграла

$$\overline{H}_{q,k^*} = \int\limits_0^{2^{k^*}} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+2^{k^*}+s)^{2q}}ds.$$

Перепишем его в следующем виде:

$$\overline{H}_{q,k^*} = \int\limits_0^1 \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+2^{k^*}+s)^{2q}}ds + \sum_{j=1}^{k^*}\int\limits_{2^{j-1}}^{2^j} \frac{e^{sA^*}e^{sA}}{(1+2^{k^*}+s)^{2q}}ds = U_0 + \sum_{j=1}^{k^*}U_j.$$

Нетрудно видеть, что

$$U_0 \le (1+2^{k^*})^{-2q}H^1_{0,0},$$

$$U_j \le \frac{1}{(1+2^{k^*}+2^{j-1})^{2q}}e^{2^{j-1}A^*}\left(\int\limits_0^{2^{j-1}} e^{sA^*}e^{sA}ds\right)e^{2^{j-1}A} =$$

$$= \frac{1}{(1+2^{k^*}+2^{j-1})^{2q}}e^{2^{j-1}A^*}H^1_{0,j-1}e^{2^{j-1}A}, \quad j \ge 1,$$

где $H^1_{0,0} = \int\limits_0^1 e^{sA^*}e^{sA}ds$. Поскольку матричные экспоненты e^{2^jA} и интегралы $H^1_{0,j}$, $j \ge 0$, нами уже насчитаны, получаем

$$\|\overline{H}_{q,k^*}\| \le h_2.$$

Таким образом, в силу (8) и леммы 2

$$\|H_q(A)\| = \|H^1_{q,k^*}\| + \|H^2_{q,k^*}\| \le h_1 + 2/3\|\overline{H}_{q,k^*}\| \le h_1 + 2/3h_2.$$

Тогда

$$\varkappa_q(A) = \alpha_q\|H_q(A)\| \le \alpha_q(h_1 + 2/3h_2).$$

В самом начале мы предположили, что спектр матрицы A сосредоточен в левой полуплоскости, при этом $\varkappa_q(A) < \varkappa_q^*$. Если в результате счета получено, что $\alpha_q(h_1+2/3h_2) < \varkappa_q^*$, значит предположение верно и можно утверждать, что спектр исследуемой матрицы A принадлежит открытой левой полуплоскости, при этом для ее собственных значений в силу леммы 1 имеет место неравенство $\operatorname{Re}\lambda_k \leq -(\varkappa_q^*)^{\frac{1}{2q-1}}$. Если $\alpha_q(h_1 + 2/3h_2) > \varkappa_q^*$, мы ничего не можем сказать о расположении спектра матрицы A. Поэтому необходимо либо отказаться от рассмотрения этой матрицы, либо, если позволяет разрядная сетка ЭВМ, увеличив значение $\varkappa_q^*$, повторить все рассуждения.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Г. В. Демиденко за постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Уилкинсон Дж. Х. *Алгебраическая проблема собственных значений.* Наука, М., 1970.

[2] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* Физматгиз, М.–Л., 1963.

[3] Демиденко Г. В. Об одном классе спектральных характеристик матриц. *Сиб. матем. журн.*, **35**, №5, 1994, 1032–1051.

[4] Булгаков А. Я. Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *Там же*, **21**, №3, 1980, 32–41.

[5] Булгаков А. Я., Годунов С. К. Расчет положительно определенных решений уравнений Ляпунова. *Тр. Ин-та математики СО АН СССР.* Т. 6. Наука, Новосибирск, 1985, 17–38.

[6] Demidenko G. V., Matveeva I. I. *On properties of a class of spectral characteristics of matrices and applications to ordinary differential equations.* INRIA, France, rep. No. 2270, 1994.

[7] Годунов С. К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. 1. Уч. пособие.* Новосибирский гос. ун-т, 1994.

[8] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* Наука, М., 1970.

Поступила в редакцию 29 января 1999 г.