

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

---

DOI:10.25743/ICT.2024.29.4.003

# Расчет параметров электромагнитного поля в трехслойной среде при бестигельной зонной плавке

Ю. В. ПИВОВАРОВ

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия  
Контактный автор: Пивоваров Юрий Владимирович, e-mail: pivov@hydro.nsc.ru

Поступила 11 октября 2023 г., принята в печать 14 марта 2024 г.

В работе строится решение задачи об определении параметров электромагнитного поля в среде, состоящей из трех слоев (воздушного пространства между индуктором и жидкой пленкой, самой жидкой пленки и твердой фазы образца), применительно к осесимметричной задаче о бестигельной зонной плавке кремниевого материала. Этими параметрами являются: векторный потенциал магнитного поля, его напряженность, плотность электрического тока, пондеромоторная сила и плотность источников джоулема тепла. Для всех этих параметров получены явные формулы и по ним произведены модельные расчеты с учетом малости толщины пленки и скин-слоев в расплаве и твердой фазе образца.

**Ключевые слова:** уравнения Максвелла, токи смещения, закон Ома, магнитное число Рейнольдса, скин-слой.

**Цитирование:** Пивоваров Ю.В. Расчет параметров электромагнитного поля в трехслойной среде при бестигельной зонной плавке. Вычислительные технологии. 2024; 29(4):24–40. DOI:10.25743/ICT.2024.29.4.003.

## Введение

Для получения монокристаллов кремния радиуса 5–10 см используется метод бестигельной зонной плавки в магнитном поле (БЗП в МП), который состоит в следующем (рис. 1). Верхняя (заготовка) и нижняя (выращиваемый монокристалл) части цилиндрического вертикального образца медленно движутся вниз и врачаются в противоположных направлениях. Часть нижней границы заготовки покрыта жидкой пленкой толщины порядка 0.2 мм (см. разд. 6), остальная часть граничит с плавающей зоной, находящейся между заготовкой и монокристаллом. Пленка и плавающая зона поддерживаются в жидком состоянии неподвижным источником высокочастотного электромагнитного поля — индуктором и удерживаются между твердыми частями образца силами поверхностного натяжения и магнитного давления. Верхние границы плавающей зоны и жидкой пленки являются фронтами плавления, так как через них проходит поток массы из заготовки. Кроме того, расплав из пленки стекает в плавающую зону. Нижняя часть плавающей зоны является фронтом кристаллизации: через нее расплав, затвердевая, переходит в монокристалл. Индуктор представляет собой медную проволочную катушку (соленоид), намотанную по спирали через контур его сечения плоскостью  $\varphi = \text{const}$ , где  $(r, z, \varphi)$  — цилиндрическая система координат, в которой  $r$  — полярный радиус,  $z$  — осевая переменная (рис. 1),  $\varphi$  — полярный угол. Толщина проволоки считается малой, так что токи, проходящие по ней, можно заменить непрерывной

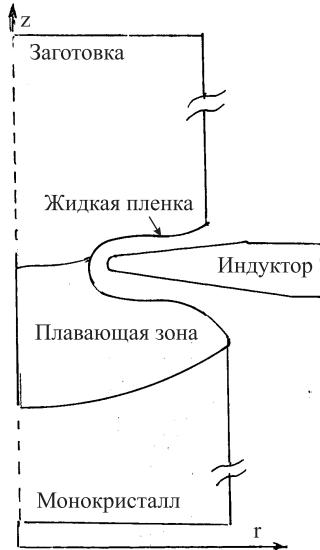


Рис. 1. Схема процесса бестигельной зонной плавки в магнитном поле  
Fig. 1. Scheme of the process of floating zone melting in magnetic field

системой кольцевых токов, каждый из которых проходит по окружности  $r = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Магнитное поле и токи в образце, наводимые индуктором, сосредоточены в тонком скин-слое, примыкающем к свободной границе расплава, и в части заготовки, примыкающей к фронту плавления в жидкой пленке. Они приводят к выделению джоулева тепла и создают пондеромоторную силу, направленную ортогонально свободной границе и являющуюся одним из источников конвекции в расплаве.

В [1] численно решалась осесимметричная задача о БЗП в МП в полной постановке. Найдены параметры электромагнитного поля, формы свободной границы плавающей зоны, границы жидкой пленки, фронтов плавления и кристаллизации, поле скоростей в плавающей зоне и поле температуры в образце. Течение в плавающей зоне было нестационарным и носило колебательный характер, о чем свидетельствуют графики минимума и максимума функции тока в зависимости от времени. В [2] рассчитано распределение примеси в монокристалле. Поле скоростей бралось из [1] и осреднялось по времени, а затем решалась стационарная задача о распределении примеси в расплаве и растущем монокристалле. В [3] решалась задача о БЗП в МП и рассчитывалось распределение примеси в монокристалле в трехмерной постановке с асимметричным индуктором. В качестве начального приближения бралось осесимметричное решение, полученное в [1]. В работах [4, 5] решались задачи, аналогичные решенным в [2, 3] соответственно, но при наличии дополнительного низкочастотного индуктора, позволяющего получить дополнительное управление процессом. В работах [6–8] рассчитывались поля скоростей и температуры в плавающей зоне, форма которой задавалась близкой к полученной в [1]. В отличие от работ [1–5], где джоулево тепловыделение и пондеромоторная сила входили только в граничные условия, в [6–8] они входили в уравнения для температуры и завихренности, т. е. считались объемными. Среди недавних исследований можно выделить работу [9], в которой рассчитывается трехмерная модель процесса зонной плавки с асимметричным индуктором с учетом охлаждающего потока газа. Вращение образца отсутствует и ищется стационарное решение задачи. (Опыт двумерных расчетов, проведенных в [8], показывает, что при отсутствии вращения решение быстро выходит на стационарный режим.)

В работах [1–5, 9] полные расчеты жидкой пленки не производились, а использовалась упрощенная ее модель. Так, в [1] толщина пленки не находилась, а свободная поверхность пленки строилась исходя из некоторого теплового условия, в которое входит поверхностная плотность источников джоулева тепла, рассчитанная по двухслойной модели электромагнитного поля “воздух – расплав”, умноженная на эмпирический коэффициент  $\xi = 1.4$ . Поэтому для более точного описания процесса БЗП в МП актуальной является задача о расчете переменной толщины пленки, магнитно-гидродинамического течения в ней и поля температуры в пленке и заготовке. Для этого прежде всего необходимо уметь определять параметры электромагнитного поля в трехслойной среде “воздух – жидкость – заготовка”, так как толщина пленки сравнима с толщиной скин-слоя. Эта задача в осесимметричной постановке и решается в настоящей работе. (Отметим, что при расчете течения в жидкой пленке на границе между пленкой и плавающей зоной можно ставить однородные условия второго рода для функции тока, зависящей от времени и температуры [10] и неоднородное условие второго рода для функции, описывающей свободную границу пленки.)

## 1. Вывод уравнений электромагнитного поля

Если  $\sigma, \tau_0, V_0, L_0$  — характерные значения удельной проводимости, промежутка времени, скорости и длины, а  $c_0$  — скорость света, то при выполнении условий

$$\frac{4\pi}{c_0^2 \mu_0 \sigma \tau_0} \ll 1, \quad \frac{4\pi V_0}{c_0^2 \mu_0 \sigma L_0} \ll 1, \quad \frac{V_0^2}{c_0^2} \ll 1 \quad (1)$$

в уравнениях Максвелла можно пренебречь токами смещения  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , где  $\mathbf{D}$  — электрическое смещение или электрическая индукция [11],  $t$  — время,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/A}^2$  — магнитная постоянная вакуума. В задаче о БЗП в МП  $\sigma = \min\{\sigma_m, \sigma_f\} = \sigma_f = 5 \cdot 10^4 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  — удельная проводимость поликристалла (заготовки — feed rod [1]),  $\sigma_m = 10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  — удельная проводимость расплава (melt),  $\tau_0 = 10^{-8} \text{ с}$  — период колебаний тока,  $V_0 = 0.3 \text{ м/с}$  — максимальная скорость расплава в зоне действия электромагнитного поля,  $L_0 = 0.03 \text{ м}$ . Так что условия (1) выполнены с большой точностью. Кроме того, в силу малости магнитного числа Рейнольдса

$$\text{Re}_m = L_0 V_0 \sigma_m \mu_0 = 0.011$$

не будем в законе Ома учитывать движение среды, т. е. отбросим член  $\sigma_m \mu_0 (\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость,  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля среды. Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mu_0, \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

а закон Ома — вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока.

Из (2), (5) следует

$$\text{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}. \quad (6)$$

Из (4) следует, что можно ввести векторную функцию  $\mathbf{A}$ , называемую векторным потенциалом, такую, что [12, с. 282]

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad \text{div} \mathbf{A} = 0. \quad (7)$$

Из (3), (5) и первой формулы (7)

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

откуда

$$\mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad} \phi, \quad (8)$$

где  $\phi$  — функция, называемая скалярным потенциалом. Из (6)–(8)

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = -\text{grad} \phi.$$

Так как

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad} \text{div} \mathbf{A},$$

то

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\sigma} \Delta \mathbf{A} = -\text{grad} \phi.$$

Пусть  $(r, z, \varphi)$  — цилиндрическая система координат, где  $r$  — полярный радиус,  $z$  — осевая переменная,  $\varphi$  — полярный угол. Согласно [13] в осесимметричной задаче о БЗП в МП ненулевыми являются компоненты  $A_\varphi, H_r, H_z, j_\varphi, E_\varphi, \phi$ . Поэтому (8) перейдет в уравнение

$$E_\varphi + \mu_0 \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}. \quad (9)$$

Внутри индукционной катушки изменение функции скалярного потенциала при  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  равно приложенному напряжению  $V_1 \sin(\omega_0 t)$ , где  $\omega_0 = 1.76 \cdot 10^7$  рад/с — круговая частота тока, поэтому [13]

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = V_1 \frac{\sin(\omega_0 t)}{2\pi}$$

всюду в индукционной катушке. Так как  $H_r = H_z = E_\varphi = 0$  внутри катушки (она считается бесконечно проводящей), равенство (9) дает

$$A_\varphi = \frac{c_1}{r} \cos(\omega_0 t), \quad c_1 = \frac{V_1}{2\pi \mu_0 \omega_0}. \quad (10)$$

Если амплитуда колебаний напряжения тока в индукторе  $V_1$  заранее неизвестна, то константу  $c_1$  можно выбрать из условия, что мощность всего выделяющегося в образце джоулема тепла, которую можно оценить аналитически, равна мощности индуктора.

Предположим, что все рассматриваемые функции совершают гармонические колебания во времени с круговой частотой  $\omega_0$ . Тогда магнитное поле будет проникать в пленку и в тонкий скин-слой в прилегающей к ней твердой части образца. Введем в рассмотрение комплексные амплитуды  $\hat{A}_\varphi, \hat{H}_r, \hat{H}_z, \hat{j}_\varphi, \hat{E}_\varphi, \hat{\phi}$ , полагая

$$\begin{aligned} A_\varphi(r, z, t) &= \text{Re}[\hat{A}_\varphi(r, z)e^{i\omega_0 t}], & H_r(r, z, t) &= \text{Re}[\hat{H}_r(r, z)e^{i\omega_0 t}], \\ H_z(r, z, t) &= \text{Re}[\hat{H}_z(r, z)e^{i\omega_0 t}], & j_\varphi(r, z, t) &= \text{Re}[\hat{j}_\varphi(r, z)e^{i\omega_0 t}], \\ E_\varphi(r, z, t) &= \text{Re}[\hat{E}_\varphi(r, z)e^{i\omega_0 t}], & \phi(r, z, \varphi, t) &= \text{Re}[\hat{\phi}(r, z, \varphi)e^{i\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для  $\hat{A}_\varphi$  получим уравнение

$$i\omega_0\mu_0\hat{A}_\varphi - \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\hat{A}_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \hat{A}_\varphi}{\partial z^2} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

На линиях разрыва  $\sigma$  следует поставить условия

$$[\hat{A}_\varphi] = 0, \quad \left[ \frac{\partial \hat{A}_\varphi}{\partial n} \right] = 0, \quad (13)$$

где  $n$  — нормаль к линии разрыва, квадратные скобки означают скачок заключенной в них функции при переходе из одной среды в другую. Эти условия необходимы и достаточны для непрерывности вектора  $\mathbf{H}$  при переходе через границу раздела двух сред. (Для границы индуктора второе условие (13) не нужно.)

На оси симметрии должно выполняться условие симметрии

$$\hat{A}_\varphi = 0, \quad \text{при } r = 0.$$

Условие на бесконечности имеет вид

$$\hat{A}_\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Из (8) следует, что функции  $\hat{A}_\varphi$ ,  $\hat{E}_\varphi$ ,  $\hat{\phi}$  связаны соотношением

$$i\omega_0\mu_0\hat{A}_\varphi + \hat{E}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \varphi} = 0. \quad (15)$$

Функции  $\hat{H}_r$ ,  $\hat{H}_z$  выражаются через  $\hat{A}_\varphi$  таким образом:

$$\hat{H}_r = \frac{\partial \hat{A}_\varphi}{\partial z}, \quad \hat{H}_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\hat{A}_\varphi)}{\partial r}.$$

Из закона Ома следует, что

$$\hat{j}_\varphi = \sigma \hat{E}_\varphi. \quad (16)$$

Обозначим  $D_f$  — область, занятую твердым кремнием с проводимостью  $\sigma_f$ ,  $D_m$  — область, занятую жидккой пленкой с проводимостью  $\sigma_m$ ,  $D_b$  — воздушное пространство между образцом и индуктором с проводимостью, равной нулю,  $\Gamma_{ind}$  — границу индуктора. Введем обозначения для  $\hat{A}_\varphi$  в областях с различной проводимостью:

$$\hat{A}_\varphi = \begin{cases} F_f(r, z) & \text{при } (r, z) \in D_f, \\ F_m(r, z) & \text{при } (r, z) \in D_m, \\ F_b(r, z) & \text{при } (r, z) \in D_b, \\ F_{ind}(r, z) & \text{при } (r, z) \in \Gamma_{ind}. \end{cases} \quad (17)$$

Из (10), (11), (17) получим

$$F_{ind} = \frac{c_1}{r}, \quad (r, z) \in \Gamma_{ind}.$$

Отсюда и из первого условия (13) получим условие

$$F_b|_{\Gamma_{ind}} = \frac{c_1}{r}, \quad (18)$$

которое можно рассматривать как граничное для функции  $F_b$ . Отметим, что это условие также приведено без вывода в работе [1].

Вне индуктора отсутствует внешнее напряжение, поэтому [13]

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad (r, z) \notin \Gamma_{ind}. \quad (19)$$

Кроме того, в  $D_b$   $\sigma = 0$ , поэтому

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 F_b}{\partial z^2} = 0, \quad (r, z) \in D_b. \quad (20)$$

## 2. Случай двухслойной среды

Обозначим

$$\Gamma_m = D_b \cap D_m$$

и предположим, что среда  $D_f$  отсутствует, а среда  $D_m$  неограниченно продолжается вверх.

Пусть  $n$  — внутренняя по отношению к  $D_m$  нормаль к  $\Gamma_m$ ,  $s$  — длина дуги вдоль  $\Gamma_m$ , причем единичный вектор касательной  $s$  получается поворотом единичной нормали  $n$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Тогда  $(s, n)$  — положительно ориентированная система координат.

Заметим, что толщина скин-слоя в пленке

$$\varepsilon_m = \left( \frac{\omega_0 \mu_0 \sigma_m}{2} \right)^{-1/2} = 3.007 \cdot 10^{-4} \text{ м} \quad (21)$$

является малым параметром по отношению к характерному размеру  $l = 0.015$  м. Поэтому главными членами в уравнении (12) внутри области  $D_m$  будут

$$i\omega_0 \mu_0 \sigma_m F_m - \frac{\partial^2 F_m}{\partial n^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$F_m(s, n) = c_{1m}(s)e^{k_m n} + c_{2m}(s)e^{-k_m n}, \quad (22)$$

где

$$k_m = \frac{1+i}{\varepsilon_m}. \quad (23)$$

Функция  $F_b$  удовлетворяет уравнению (20), граничному условию (18) и условию на бесконечности (14) с учетом (17). Выведем граничное условие для  $F_b$  на  $\Gamma_m$ . Для этого воспользуемся условиями (13). Для определения  $c_{1m}(s)$ ,  $c_{2m}(s)$  имеем систему

$$c_{1m}(s) + c_{2m}(s) = F_b(s)|_{\Gamma_m}, \quad k_m(c_{1m}(s) - c_{2m}(s)) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m},$$

решая которую, находим

$$c_{1m}(s) = \frac{1}{2} \left( F_b(s)|_{\Gamma_m} + \frac{\varepsilon_m}{1+i} \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} \right), \quad (24)$$

$$c_{2m}(s) = \frac{1}{2} \left( F_b(s)|_{\Gamma_m} - \frac{\varepsilon_m}{1+i} \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} \right). \quad (25)$$

Так как  $c_{1m} = 0$  в силу (14), искомым условием для  $F_b$  на  $\Gamma_m$  является

$$F_b(s)|_{\Gamma_m} + \frac{\varepsilon_m}{1+i} \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} = 0. \quad (26)$$

После решения задачи для  $F_b$  функция  $F_m$  определяется в виде

$$F_m(s, n) = \frac{1}{2} \left( F_b(s)|_{\Gamma_m} - \frac{\varepsilon_m}{1+i} \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} \right) e^{-(1+i)n/\varepsilon_m}. \quad (27)$$

Если выразить  $F_b(s)|_{\Gamma_m}$  из (26) и подставить в (27), то получим

$$F_m(s, n) = -\frac{\varepsilon_m}{1+i} \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} e^{-(1+i)n/\varepsilon_m},$$

что согласуется с результатами работы [8].

Недостатком описанного подхода является то, что решение задачи для  $F_b$  определяется в комплексных переменных. Поэтому на практике (см. [1, 8]) используется следующее рассуждение. В (26) при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  функция  $F_b(s)|_{\Gamma_m} \rightarrow 0$ . Поэтому точное условие (26) можно заменить на асимптотическое:

$$F_b(s)|_{\Gamma_m} = 0.$$

В этом случае функция  $F_b$  будет определяться в действительных переменных.

### 3. Случай трехслойной среды

Пусть теперь присутствуют все три среды: воздушное пространство  $D_b$ , жидккая пленка  $D_m$  и твердая фаза  $D_f$ . Магнитное поле в  $D_m$  описывается формулами (22)–(25). Так как  $D_m$  не содержит бесконечно удаленных точек,  $c_{1m}(s) \neq 0$ . Обозначим

$$\Gamma_f = (D_m \cap D_f) = (s, n : s \in [0, s_0], n = n_f(s)).$$

Предположим, что функция  $n_f(s)$  имеет порядок  $\varepsilon_m$  и является достаточно плавной, так что нормаль  $\mathbf{n}$  к  $\Gamma_m$  с большой точностью ортогональна  $\Gamma_f$ .

Пусть

$$\tilde{n} = n - n_f(s) \geq 0 \quad (28)$$

— расстояние от произвольной точки области  $D_f$  до границы  $\Gamma_f$ .

Функция  $F_f(s, \tilde{n})$  удовлетворяет уравнению

$$i\omega_0 \mu_0 \sigma_f F_f - \frac{\partial^2 F_f}{\partial \tilde{n}^2} = 0,$$

общее решение которого есть

$$F_f(s, \tilde{n}) = c_{1f}(s)e^{k_f \tilde{n}} + c_{2f}(s)e^{-k_f \tilde{n}},$$

где

$$k_f = \frac{1+i}{\varepsilon_f}, \quad \varepsilon_f = (\omega_0 \mu_0 \sigma_f / 2)^{-1/2} = 1.3448 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

— толщина скин-слоя в твердой фазе.

Из условий (13) на  $\Gamma_f$  для определения  $c_{1f}(s)$ ,  $c_{2f}(s)$  имеем систему

$$\begin{aligned} c_{1f}(s) + c_{2f}(s) &= c_{1m}(s)e^{k_m n_f(s)} + c_{2m}(s)e^{-k_m n_f(s)}, \\ k_f(c_{1f}(s) - c_{2f}(s)) &= k_m (c_{1m}(s)e^{k_m n_f(s)} - c_{2m}(s)e^{-k_m n_f(s)}), \end{aligned}$$

решая которую, находим (для простоты записи опустим переменную  $s$ )

$$\begin{aligned} c_{1f} &= \frac{1}{2} \left( \left( 1 + \frac{k_m}{k_f} \right) c_{1m} e^{k_m n_f} + \left( 1 - \frac{k_m}{k_f} \right) c_{2m} e^{-k_m n_f} \right), \\ c_{2f} &= \frac{1}{2} \left( \left( 1 - \frac{k_m}{k_f} \right) c_{1m} e^{k_m n_f} + \left( 1 + \frac{k_m}{k_f} \right) c_{2m} e^{-k_m n_f} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Из условия на бесконечности

$$c_{1f} = 0.$$

Отсюда и из (23)–(25), (29) получим граничное условие для  $F_b$  на  $\Gamma_m$

$$\begin{aligned} &\left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_m} \right) e^{(1+i)n_f/\varepsilon_m} + \left( 1 - \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_m} \right) e^{-(1+i)n_f/\varepsilon_m} \right] F_b \Big|_{\Gamma_m} + \\ &+ \left( \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_f}{1+i} e^{(1+i)n_f/\varepsilon_m} - \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_f}{1+i} e^{-(1+i)n_f/\varepsilon_m} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Функцию  $c_{2f}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} c_{2f} &= \frac{1}{4} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_m} \right) e^{(1+i)n_f/\varepsilon_m} + \left( 1 + \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_m} \right) e^{-(1+i)n_f/\varepsilon_m} \right] F_b \Big|_{\Gamma_m} + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_f}{1+i} e^{(1+i)n_f/\varepsilon_m} - \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_f}{1+i} e^{-(1+i)n_f/\varepsilon_m} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m}. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее воспользуемся приемом, описанным в предыдущем разделе: выразим  $F_b$  из (30) и подставим в (31). Тогда получим

$$c_{2f} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_m}{1+i} \left( \frac{(1+L)^2 - (1-L)^2}{(1+L)e^{(1+i)M} + (1-L)e^{-(1+i)M}} \right) H_s \Big|_{\Gamma_m}, \quad (32)$$

где

$$L = \varepsilon_f / \varepsilon_m = \sqrt{20}, \quad M = n_f / \varepsilon_m \geq 0, \quad (33)$$

$$H_s \Big|_{\Gamma_m} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_b)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} \quad (34)$$

— касательная компонента вектора напряженности магнитного поля на  $\Gamma_m$ .

Формулу (32) можно привести к виду

$$c_{2f} = -\frac{2L\varepsilon_m}{1+i} [\cos(M)(A+B) + i \sin(M)(A-B)]^{-1} H_s|_{\Gamma_m},$$

где

$$A = (1+L)e^M, \quad B = (1-L)e^{-M}. \quad (35)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$c_{2f} = -L\varepsilon_m(c_{Rf} + ic_{If})H_s|_{\Gamma_m}, \quad (36)$$

где

$$c_{Rf} = \frac{\cos(M)(A+B) - \sin(M)(A-B)}{A^2 + B^2 + 2\cos(2M)AB}, \quad (37)$$

$$c_{If} = -\frac{\cos(M)(A+B) + \sin(M)(A-B)}{A^2 + B^2 + 2\cos(2M)AB}. \quad (38)$$

Как и в разд. 2, условие (30) заменим на асимптотическое при  $\varepsilon_m, \varepsilon_f \rightarrow 0$ :

$$F_b|_{\Gamma_m} = 0.$$

Тогда функция  $F_b$  будет действительной.

Итак, комплексная амплитуда единственной ненулевой компоненты векторного потенциала магнитного поля в области  $D_f$  вычисляется по формуле

$$F_f(s, \tilde{n}) = c_{2f}(s)e^{-(1+i)\tilde{n}/\varepsilon_f}, \quad (39)$$

где  $c_{2f}$  определяется формулами (36)–(38) с учетом (33)–(35),  $\tilde{n}$  — формулой (28).

#### 4. Вычисление пондеромоторной силы в жидкой пленке

Функция  $F_m(s, n)$  рассчитывается по формулам (22), (23), коэффициенты  $c_{1m}(s)$ ,  $c_{2m}(s)$  определяются в соответствии с (24), (25). При этом функция  $F_b|_{\Gamma_m}$  выражается через  $H_s|_{\Gamma_m}$  в соответствии с (30), (34).

Итак, имеем

$$\begin{aligned} c_{1m} &= \frac{\varepsilon_m}{1+i} \frac{(1-L)H_s|_{\Gamma_m}}{1-L+(1+L)e^{2(1+i)M}} = \frac{\varepsilon_m}{2}(1-L)(c_{R1m} + ic_{I1m})H_s|_{\Gamma_m}, \\ c_{R1m} &= \frac{1-L+(1+L)e^{2M}(\cos(2M)-\sin(2M))}{(1-L)^2+2(1-L^2)e^{2M}\cos(2M)+(1+L)^2e^{4M}}, \\ c_{I1m} &= -\frac{1-L+(1+L)e^{2M}(\cos(2M)+\sin(2M))}{(1-L)^2+2(1-L^2)e^{2M}\cos(2M)+(1+L)^2e^{4M}}, \\ c_{2m} &= -\frac{\varepsilon_m}{1+i} \frac{(1+L)H_s|_{\Gamma_m}}{1+L+(1-L)e^{-2(1+i)M}} = -\frac{\varepsilon_m}{2}(1+L)(c_{R2m} + ic_{I2m})H_s|_{\Gamma_m}, \\ c_{R2m} &= \frac{1+L+(1-L)e^{-2M}(\cos(2M)+\sin(2M))}{(1+L)^2+2(1-L^2)e^{-2M}\cos(2M)+(1-L)^2e^{-4M}}, \\ c_{I2m} &= -\frac{1+L+(1-L)e^{-2M}(\cos(2M)-\sin(2M))}{(1+L)^2+2(1-L^2)e^{-2M}\cos(2M)+(1-L)^2e^{-4M}}. \end{aligned}$$

В соответствии с (15), (16), (19) комплексная амплитуда плотности тока в области  $D_m$  определяется выражением

$$\hat{j}_{\varphi m} = -i\mu_0\omega_0\sigma_m F_m(s, n) = \frac{\mu_0\omega_0\sigma_m\varepsilon_m}{2} [(1-L)(c_{I1m} - ic_{R1m})e^{(1+i)n/\varepsilon_m} + (1+L)(-c_{I2m} + ic_{R2m})e^{-(1+i)n/\varepsilon_m}] H_s|_{\Gamma_m}.$$

В соответствии с (11)

$$j_{\varphi m} = \operatorname{Re}(\hat{j}_{\varphi m} e^{i\omega_0 t}) = \frac{\mu_0\omega_0\sigma_m\varepsilon_m}{2} [(1-L)(c_{I1m} \cos(\omega_0 t + n/\varepsilon_m) + c_{R1m} \sin(\omega_0 t + n/\varepsilon_m))e^{n/\varepsilon_m} + (1+L)(-c_{I2m} \cos(\omega_0 t - n/\varepsilon_m) - c_{R2m} \sin(\omega_0 t - n/\varepsilon_m))e^{-n/\varepsilon_m}] H_s|_{\Gamma_m}. \quad (40)$$

Из (21)

$$\frac{\mu_0\omega_0\sigma_m\varepsilon_m}{2} = \frac{1}{\varepsilon_m}. \quad (41)$$

Найдем комплексную амплитуду  $s$ -й компоненты напряженности магнитного поля в  $D_m$ .

$$\begin{aligned} \hat{H}_{sm} &= \frac{\partial F_m}{\partial n} = \frac{1+i}{\varepsilon_m} (c_{1m}e^{(1+i)n/\varepsilon_m} - c_{2m}e^{-(1+i)n/\varepsilon_m}) = a_{1m}e^{(1+i)n/\varepsilon_m} + a_{2m}e^{-(1+i)n/\varepsilon_m}, \\ a_{1m} &= \frac{(1-L)H_s|_{\Gamma_m}}{1-L+(1+L)e^{2(1+i)M}} = (1-L)(a_{R1m} + ia_{I1m})H_s|_{\Gamma_m}, \\ a_{R1m} &= \frac{1-L+(1+L)e^{2M} \cos(2M)}{(1-L)^2 + 2(1-L^2)e^{2M} \cos(2M) + (1+L)^2e^{4M}}, \\ a_{I1m} &= -\frac{(1+L)e^{2M} \sin(2M)}{(1-L)^2 + 2(1-L^2)e^{2M} \cos(2M) + (1+L)^2e^{4M}}, \\ a_{2m} &= \frac{(1+L)H_s|_{\Gamma_m}}{1+L+(1-L)e^{-2(1+i)M}} = (1+L)(a_{R2m} + ia_{I2m})H_s|_{\Gamma_m}, \\ a_{R2m} &= \frac{1+L+(1-L)e^{-2M} \cos(2M)}{(1+L)^2 + 2(1-L^2)e^{-2M} \cos(2M) + (1-L)^2e^{-4M}}, \\ a_{I2m} &= \frac{(1-L)e^{-2M} \sin(2M)}{(1+L)^2 + 2(1-L^2)e^{-2M} \cos(2M) + (1-L)^2e^{-4M}}. \end{aligned}$$

Далее в соответствии с (11) находим

$$\begin{aligned} H_{sm}(t, s, n) &= \operatorname{Re}(\hat{H}_{sm}(s, n)e^{i\omega_0 t}) = \\ &= [(1-L)(a_{R1m} \cos(\omega_0 t + n/\varepsilon_m) - a_{I1m} \sin(\omega_0 t + n/\varepsilon_m))e^{n/\varepsilon_m} + (1+L)(a_{R2m} \cos(\omega_0 t - n/\varepsilon_m) - a_{I2m} \sin(\omega_0 t - n/\varepsilon_m))e^{-n/\varepsilon_m}] H_s|_{\Gamma_m}. \end{aligned}$$

Нормальная составляющая пондеромоторной силы, действующей на частицы расплава, определяется формулой

$$f_{nm}(t, s, n) = \mu_0 j_{\varphi m} H_{sm}.$$

Осредняя ее по периоду колебаний тока во времени, получим, что выражение для нормальной составляющей пондеромоторной силы в жидкой пленке имеет вид

$$\bar{f}_{nm}(s, n) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f_{nm}(t, s, n) dt = \frac{\mu_0}{2\varepsilon_m} [(1-L)^2 C^+ e^{2n/\varepsilon_m} + (1+L)^2 C^- e^{-2n/\varepsilon_m} + (1-L^2)(C^c \cos(2n/\varepsilon_m) + C^s \sin(2n/\varepsilon_m))] H_s^2|_{\Gamma_m}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} C^+ &= a_{R1m}c_{I1m} - a_{I1m}c_{R1m} < 0, & C^- &= -a_{R2m}c_{I2m} + a_{I2m}c_{R2m} > 0, \\ C^c &= a_{R2m}c_{I1m} - a_{I2m}c_{R1m} - a_{R1m}c_{I2m} + a_{I1m}c_{R2m} = 2(a_{R2m}c_{I1m} - a_{R1m}c_{I2m}), \\ C^s &= -a_{I2m}c_{I1m} + a_{R2m}c_{R1m} + a_{I1m}c_{I2m} - a_{R1m}c_{R2m} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (42) всегда меньше нуля, второе — всегда больше нуля, знак третьего слагаемого заранее не известен, а четвертое слагаемое равно нулю. Сумма всех четырех слагаемых в (42) всегда положительна, т. е. суммарная нормальная пондеромоторная сила направлена внутрь жидкой пленки.

Можно показать, что касательная составляющая пондеромоторной силы, как и в двухслойном случае, равна нулю.

## 5. Вычисление объемной плотности источников джоулева тепла

В соответствии с законом Джоуля–Ленца количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в среде с проводимостью  $\sigma$ , по которой течет ток плотности  $j$ , определяется по формуле

$$q = j^2/\sigma. \quad (44)$$

Определим сначала плотность джоулева тепловыделения в жидкой пленке. Положим  $j = j_{\varphi m}(t, s, n)$ ,  $\sigma = \sigma_m$ ,  $q = q_m(t, s, n)$ . Найдя из (44)  $q_m$  с учетом (40), (41) и осредненное выражение по периоду колебаний тока, получим

$$\begin{aligned} \bar{q}_m(s, n) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} q_m(t, s, n) dt = \frac{1}{2\sigma_m \varepsilon_m^2} [(1-L)^2(c_{I1m}^2 + c_{R1m}^2)e^{2n/\varepsilon_m} + \\ &+ (1+L)^2(c_{I2m}^2 + c_{R2m}^2)e^{-2n/\varepsilon_m} + 2(1-L^2)((-c_{I1m}c_{I2m} - c_{R1m}c_{R2m}) \cos(2n/\varepsilon_m) + \\ &+ (c_{I1m}c_{R2m} - c_{R1m}c_{I2m}) \sin(2n/\varepsilon_m))] H_s^2|_{\Gamma_m}. \end{aligned} \quad (45)$$

Выведем теперь формулу, описывающую джоулево тепловыделение в твердой фазе образца. Из (15), (16), (19), (36), (39) найдем, что комплексная амплитуда

$$\hat{j}_{\varphi f} = \omega_0 \mu_0 \sigma_f \varepsilon_f (-c_{If} + i c_{Rf}) H_s|_{\Gamma_m} e^{-(1+i)\tilde{n}/\varepsilon_f}.$$

Здесь учтено, что  $L\varepsilon_m = \varepsilon_f$ . Далее,

$$j_{\varphi f} = \operatorname{Re}(e^{i\omega_0 t} \hat{j}_{\varphi f}) = -\omega_0 \mu_0 \sigma_f \varepsilon_f (c_{If} \cos(\omega_0 t - \tilde{n}/\varepsilon_f) + c_{Rf} \sin(\omega_0 t - \tilde{n}/\varepsilon_f)) H_s|_{\Gamma_m} e^{-\tilde{n}/\varepsilon_f}.$$

По аналогии с (41) имеет место равенство

$$\omega_0^2 \mu_0^2 \sigma_f^2 \varepsilon_f^2 = 4/\varepsilon_f^2.$$

Поэтому

$$q_f = \frac{j_{\varphi f}^2}{\sigma_f} = \frac{4}{\sigma_f \varepsilon_f^2} [c_{If}^2 \cos^2(\omega_0 t - \tilde{n}/\varepsilon_f) + c_{Rf}^2 \sin^2(\omega_0 t - \tilde{n}/\varepsilon_f) + \dots] H_s^2|_{\Gamma_m} e^{-2\tilde{n}/\varepsilon_f},$$

где многоточием обозначен член, интеграл от которого равен нулю.

Осредняя  $q_f$  по периоду колебаний тока, окончательно получим

$$\bar{q}_f = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} q_f dt = \frac{2}{\sigma_f \varepsilon_f^2} (c_{If}^2 + c_{Rf}^2) H_s^2|_{\Gamma_m} e^{-2\tilde{n}/\varepsilon_f}. \quad (46)$$

( $\tilde{n}$  определяется в соответствии с (28)).

## 6. Результаты расчетов

В работе [1] свободная поверхность жидкой пленки рассчитывается с помощью некоторого теплового граничного условия, в которое входит мощность источников джоулева тепла, рассчитываемая по двухслойной модели, умноженная на коэффициент  $\xi = 1.4$ , выбираемый из условия согласия с экспериментальными данными. Оценим толщину пленки согласно трехслойной модели, при которой достигается этот коэффициент.

Пусть  $\bar{q}(s, n)$  — объемная плотность источников джоулева тепла в двухслойной модели. Тогда можно показать, что

$$\bar{\bar{q}}(s) = \int_0^\infty \bar{q}(s, n) dn = \frac{H_s^2|_{\Gamma_m}}{2\varepsilon_m \sigma_m}.$$

В трехслойной модели поверхностная плотность источников джоулева тепла равна

$$\bar{\bar{q}}_{sum}(s) = \bar{\bar{q}}_m(s) + \bar{\bar{q}}_f(s),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\bar{q}}_m(s) &= \int_0^{n_f} \bar{q}_m(s, n) dn = \frac{I_m}{4\sigma_m \varepsilon_m} H_s^2|_{\Gamma_m}, & \bar{\bar{q}}_f(s) &= \int_0^\infty \bar{q}_f(s, \tilde{n}) d\tilde{n} = \frac{1}{\sigma_f \varepsilon_f} (c_{If}^2 + c_{Rf}^2) H_s^2|_{\Gamma_m}, \\ I_m &= (1 - L)^2 (c_{I1m}^2 + c_{R1m}^2) (e^{2M} - 1) + (1 + L)^2 (c_{I2m}^2 + c_{R2m}^2) (1 - e^{-2M}) + \\ &+ 2(1 - L^2) [(-c_{I1m} c_{I2m} - c_{R1m} c_{R2m}) \sin(2M) + (c_{I1m} c_{R2m} - c_{R1m} c_{I2m}) (1 - \cos(2M))]. \end{aligned}$$

Далее,

$$\xi_m = \frac{\bar{\bar{q}}_m(s)}{\bar{\bar{q}}(s)} = 0.5I_m, \quad \xi_f = \frac{\bar{\bar{q}}_f(s)}{\bar{\bar{q}}(s)} = 2L(c_{If}^2 + c_{Rf}^2), \quad \xi = \xi_m + \xi_f.$$

На рис. 2 показаны зависимости  $\xi_m(M)$ ,  $\xi(M)$  и отрезки  $\xi = 1.4$ ,  $M \in [0, 4]$ ;  $M = 0.64$ ,  $\xi \in [0, 1.4]$ . Видно, что кривая  $\xi(M)$  пересекается с прямой  $\xi = 1.4$  при  $M = 0.64$ . Следовательно, искомая толщина пленки

$$n_f = 0.64\varepsilon_m.$$

Заметим, что при  $M = 0$   $\xi = \xi_f = L$ , что соответствует двухслойной модели с проводимостью  $\sigma = \sigma_f$ . При  $M \rightarrow \infty$   $\xi \rightarrow 1$ ,  $\xi_m \rightarrow 1$ , что в пределе соответствует двухслойной модели с проводимостью  $\sigma = \sigma_m$ .

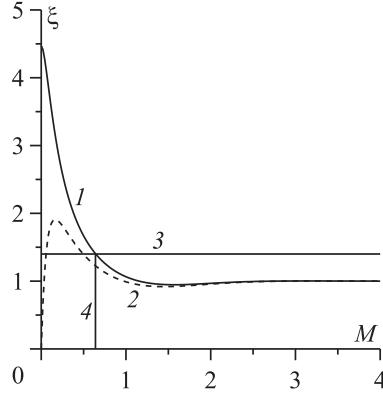


Рис. 2. Зависимости  $\xi(M)$  (кривая 1),  $\xi_m(M)$  (кривая 2) и отрезки  $\xi = 1.4$ ,  $M \in [0, 4]$  (отрезок 3),  $\xi \in [0, 1.4]$ ,  $M = 0.64$  (отрезок 4)

Fig. 2. Dependences  $\xi(M)$  (curve 1),  $\xi_m(M)$  (curve 2) and segments  $\xi = 1.4$ ,  $M \in [0, 4]$  (segment 3),  $\xi \in [0, 1.4]$ ,  $M = 0.64$  (segment 4)

Ясно, что толщина пленки в процессе БЗП в МП является функцией касательной  $s$ . Поэтому полученную величину  $n_f$  следует понимать как некоторое ее характерное значение.

Для дальнейших модельных расчетов зададим следующую зависимость между системами координат  $(s, n)$  и  $(r, z)$ :

$$r - 0.01 = s \in [0, s_0], \quad s_0 = 0.04, \quad z = n \in [0, \infty].$$

Кроме того, пусть

$$H_s|_{\Gamma_m} = \frac{\alpha_0(M)}{\sqrt{s + 0.01}}. \quad (47)$$

Предположим, что в жидкой пленке и твердой части образца над ней суммарная мощность выделяющегося джоулева тепла равна  $0.6N_0$ , где  $N_0 = 10^4$  Вт — мощность индуктора [8]. Тогда

$$\bar{q}_{sum}(s) = \xi(M)\bar{q}(s) = \frac{\xi(M)\alpha_0^2(M)}{2\varepsilon_m\sigma_m(s+0.01)}, \quad \int_0^{s_0} 2\pi(s+0.01)\bar{q}_{sum}(s)ds = \frac{\xi(M)\alpha_0^2(M)2\pi s_0}{2\varepsilon_m\sigma_m} = 0.6N_0,$$

откуда

$$\alpha_0(M) = \left( \frac{0.6N_0\varepsilon_m\sigma_m}{\pi s_0 \xi(M)} \right)^{1/2}. \quad (48)$$

Все расчеты проводились при  $s = 0.02$  м.

На рис. 3 представлены результаты расчета пондеромоторной силы в зависимости от  $M_1 = n/\varepsilon_m$  в жидкой пленке при  $M = 0.64$  по формулам (42), (43), (47), (48). Кривые 1–4 соответствуют 1–4-му членам в правой части (42). На рис. 4 показаны результаты расчета мощности источников джоулева тепла в образце также в зависимости от  $M_1$  при  $M = 0.64$  по формулам (45)–(48). Кривые 1–4 соответствуют 1–4-му членам в правой части (45). Они определены только для жидкой пленки. Кривая 5 рассчитывается по формуле (45) для жидкой пленки и по формуле (46) для твердой фазы образца. При

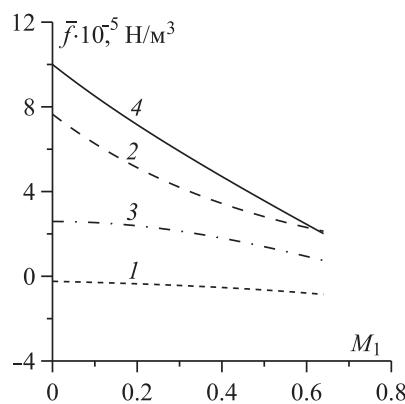


Рис. 3. Зависимость пондеромоторной силы от  $M_1 = n/\varepsilon_m$  в жидкой пленке при  $M = 0.64$ . Кривая 1 — первый, кривая 2 — второй, кривая 3 — третий члены в правой части формулы (42), кривая 4 — их сумма Fig. 3. Dependence of the ponderomotive force on  $M_1 = n/\varepsilon_m$  in a liquid film for  $M = 0.64$ . Curve 1 is the first term, curve 2 is the second term, curve 3 is the third term on the right-hand side of formula (42), curve 4 is their sum

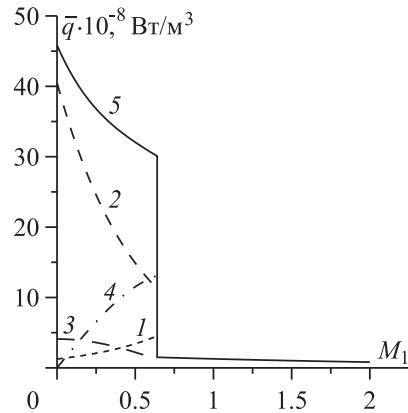


Рис. 4. Зависимость плотности источников джоулева тепла от  $M_1$  при  $M = 0.64$ : кривая 1 — первый, кривая 2 — второй, кривая 3 — третий, кривая 4 — четвертый члены в правой части формулы (45), кривая 5 — их сумма  $\bar{q}_m$  при  $M_1 \leq M$  и величина  $\bar{q}_f$ , рассчитываемая по формуле (46) в зависимости от  $(M_1 - M)$ , при  $M_1 \geq M$   
Fig. 4. Dependence of the density of Joule heat sources on  $M_1$  for  $M = 0.64$ : curve 1 is the first term, curve 2 is the second term, curve 3 is the third term, curve 4 is the fourth term on the right-hand side of formula (45), curve 5 is their sum  $\bar{q}_m$  for  $M_1 \leq M$  and the  $\bar{q}_f$  value calculated by formula (46) in depending on  $(M_1 - M)$  for  $M_1 \geq M$

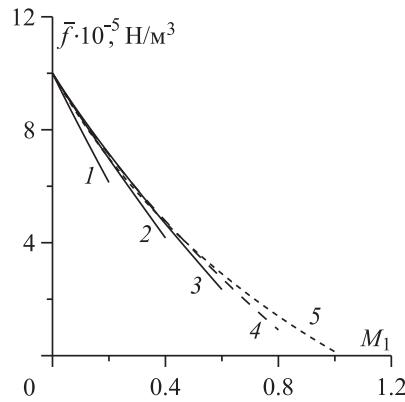


Рис. 5. Зависимость пондеромоторной силы от  $M_1$  в жидкой пленке для различных значений  $M$ . Кривая 1 — для  $M = 0.2$ , кривая 2 — для  $M = 0.4$ , кривая 3 — для  $M = 0.6$ , кривая 4 — для  $M = 0.8$ , кривая 5 — для  $M = 1$

Fig. 5. Dependence of the ponderomotive force on  $M_1$  in a liquid film for different values of  $M$ . Curve 1 is for  $M = 0.2$ , curve 2 is for  $M = 0.4$ , curve 3 is for  $M = 0.6$ , curve 4 is for  $M = 0.8$ , curve 5 is for  $M = 1$

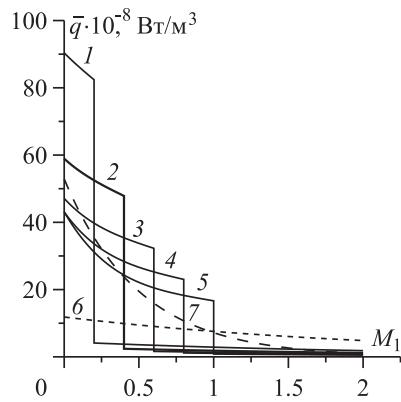


Рис. 6. Зависимость плотности источников джоулева тепла от  $M_1$  для различных значений  $M$ . Кривая 1 — для  $M = 0.2$ , кривая 2 — для  $M = 0.4$ , кривая 3 — для  $M = 0.6$ , кривая 4 — для  $M = 0.8$ , кривая 5 — для  $M = 1$ , кривая 6 — для  $M = 0$ , кривая 7 — для  $M = 4$

Fig. 6. Dependence of the density of Joule heat sources on  $M_1$  for different values of  $M$ . Curve 1 is for  $M = 0.2$ , curve 2 is for  $M = 0.4$ , curve 3 is for  $M = 0.6$ , curve 4 is for  $M = 0.8$ , curve 5 is for  $M = 1$ , curve 6 is for  $M = 0$ , curve 7 is for  $M = 4$

переходе из жидкой фазы в твердую высота кривой скачком уменьшается в 20 раз. Это следует из формул (15), (16) и формулы (44). Так как функция  $\hat{A}_\varphi$  непрерывна при переходе границы раздела, а  $\partial\hat{\phi}/\partial\varphi = 0$ , функция  $\hat{E}_\varphi$  непрерывна, а функция  $\hat{j}_\varphi$  скачком уменьшается в  $\sigma_m/\sigma_f = 20$  раз.

Высокие значения функции  $\bar{f}$  (порядка  $10^6 \text{ Н}/\text{м}^3$ ) и функции  $\bar{q}$  (порядка  $6 \cdot 10^9 \text{ Вт}/\text{м}^3$ ) объясняются очень малым объемом жидкой зоны (около  $1.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ).

Так как толщина пленки может меняться, представляет интерес проследить зависимость от нее вышеописанных функций.

На рис. 5 показаны зависимости пондеромоторной силы  $\bar{f}$  от  $M_1$  в жидкой пленке для значений  $M \in [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$  (кривые 1–5 соответственно), рассчитанные по тем же формулам, что и ранее. Видно, что чем больше  $M$ , тем сильнее указанные зависимости отличаются от линейных и тем ближе подходят к нулевому значению на оси ординат.

Наконец, на рис. 6 представлены зависимости мощности источников джоулема тепла  $\bar{q}$  от  $M_1$  в образце для того же набора значений  $M$ , что и выше (кривые 1–5), а также для  $M = 0$  (кривая 6), что соответствует двухслойной модели при  $\sigma = \sigma_f$  и для  $M = 4$  (кривая 7), что близко к двухслойной модели при  $\sigma = \sigma_m$ . Высота кривых 1–5, как и в ранее рассчитанном случае для  $M = 0.64$ , терпит скачок, уменьшаясь в 20 раз при переходе из жидкой фазы в твердую. Скачок высоты кривых 6, 7 не виден, так как в первом случае кривая  $q_m$  имеет нулевую длину, а во втором этот скачок находится за пределами рисунка. Площадь под всеми кривыми при  $M_1 \in [0, \infty]$  одинакова.

## Заключение

Рассмотрена задача о расчете параметров электромагнитного поля в трехслойной среде, включающей воздушное пространство между жидкой пленкой и индуктором, саму жидкую пленку и твердую фазу образца, применительно к задаче о бестигельной зонной плавке кремниевого материала. Выведены формулы для расчета векторного потенциала магнитного поля, его напряженности, плотности электрического тока, а также нормальной составляющей пондеромоторной силы в жидкой пленке (касательная, ее составляющая, равна нулю, как и в известной двухслойной модели) и мощности источников джоулема тепла в жидкой пленке и твердой части образца. Вычислена характерная толщина жидкой пленки из условия, взятого из сравнения расчетных и экспериментальных данных в работе других авторов, что суммарная мощность джоулема тепловыделения в ней и твердой части образца в 1.4 раза больше, чем в двухслойной модели. Произведены модельные расчеты последних двух из перечисленных параметров для найденной толщины пленки, составляющей 0.64 от толщины скин-слоя в расплаве, а также для некоторого дискретного набора толщин пленки.

## Список литературы

- [1] Muhlbauer A., Muiznieks A., Virbulis J., Ludge A., Riemann H. Interface shape, heat transfer and fluid flow in the floating zone growth of large silicon crystals with the needle-eye technique. Journal of Crystal Growth. 1995; (151):66–79.
- [2] Muhlbauer A., Muiznieks A., Virbulis J. Analysis of the dopant segregation effects at the floating zone growth of large silicon crystals. Journal of Crystal Growth. 1997; (180):372–380.

- [3] Ratnieks G., Muiznieks A., Buliguns L., Raming G., Muhlbauer A.A. 3D numerical analysis of the influence of EM and Marangoni forces on melt hydrodynamics and mass transport during FZ silicon crystal growth. *Magnetohydrodynamics*. 1999; 35(3):223–236.
- [4] Raming G., Muiznieks A., Muhlbauer A. Numerical investigation of the influence of EM fields on fluid motion and resistivity distribution during floating-zone growth of large silicon single crystals. *Journal of Crystal Growth*. 2001; (230):108–117.
- [5] Lacis K., Muiznieks A., Ratnieks G. 3D mathematical model system for melt hydrodynamics in the silicon single crystal FZ-growth process with rotating magnetic field. *Magnetohydrodynamics*. 2005; 41(2):147–158.
- [6] Пивоваров Ю.В. Расчет движения жидкости с переменной вязкостью в области с криволинейной границей. *Вычислительные технологии*. 2005; 10(3):87–107.
- [7] Пивоваров Ю.В. Численное моделирование конвекции в плавающей зоне. *Вычислительные технологии*. 2006; 11(1):81–94.
- [8] Пивоваров Ю.В. Моделирование конвекции расплава полупроводникового материала при зонной плавке. Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, Институт гидродинамики СО РАН; 2006: 135.
- [9] Han X.-F., Liu X., Nakano S., Harada H., Miyamura Y., Kakimoto K. 3D global heat transfer model on floating zone for silicon single crystal growth. *Crystal Research and Technology*. 2018; (53):1–5. DOI:10.1002/crat.201700246.
- [10] Ильин А.В., Ривкинд В.Я. Приближенное решение задачи стекания пленочной жидкости с угла. Задачи гидромеханики и тепломассообмена со свободными границами. Межвузовский сборник научных трудов. Новосибирск: Новосибирский государственный университет; 1987: 128.
- [11] Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука; 1981: 512.
- [12] Smythe W.R. Static and dynamic electricity. N.Y.: McGraw-Hill, 3rd Ed.; 1968: 845.
- [13] Lie K.H., Walker J.S., Riahi D.N. Free surface shape and AC electric current distribution for float zone silicon growth with a radio frequency induction coil. *Journal of Crystal Growth*. 1990; (100):450–458.

## Calculation of electromagnetic field parameters in a three-layer medium for floating zone melting

YU. V. PIVOVAROV

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

Corresponding author: Yury V. Pivovarov, e-mail: pivov@hydro.nsc.ru

Received October 11, 2023, accepted March 14, 2024.

### Abstract

The research addresses finding of the electromagnetic part for the problem of calculating the thickness and shape of a liquid film resulted from the floating zone melting of the silicon sample of

large radius (5–10 cm) in a magnetic field. The applied approach relies on the analytical transformations of electromagnetic field equations and the method of complex amplitudes for description of harmonic oscillations in time of the sought values. The explicit analytical formulas have been obtained for calculating the vector potential of the magnetic field, its strength, electric current density, ponderomotive force and density of Joule heat sources for the case of axisymmetric formulation. The estimate of the film thickness is given and model calculations are performed for a simple film geometry and the discrete set of thickness values of the film. The method for determining the parameters of an electromagnetic field in a three-layer medium, namely, the air space between the inductor and the liquid film, the film itself, and the solid phase of the silicon sample, has been developed. The method allows performing calculations for a film thickness comparable to the thickness of the skin layer in a liquid phase.

*Keywords:* Maxwell's equations, displacement currents, Ohm's law, magnetic Reynolds number, skin layer.

*Citation:* Pivovarov Yu.V. Calculation of electromagnetic field parameters in a three-layer medium for floating zone melting. Computational Technologies. 2024; 29(4):24–40. DOI:10.25743/ICT.2024.29.4.003. (In Russ.)

## References

1. Muhlbauer A., Muiznieks A., Virbulis J., Ludge A., Riemann H. Interface shape, heat transfer and fluid flow in the floating zone growth of large silicon crystals with the needle-eye technique. *Journal of Crystal Growth*. 1995; (151):66–79.
2. Muhlbauer A., Muiznieks A., Virbulis J. Analysis of the dopant segregation effects at the floating zone growth of large silicon crystals. *Journal of Crystal Growth*. 1997; (180):372–380.
3. Ratnieks G., Muiznieks A., Buliguns L., Raming G., Muhlbauer A.A. 3D numerical analysis of the influence of EM and Marangoni forces on melt hydrodynamics and mass transport during FZ silicon crystal growth. *Magnetohydrodynamics*. 1999; 35(3):223–236.
4. Raming G., Muiznieks A., Muhlbauer A. Numerical investigation of the influence of EM fields on fluid motion and resistivity distribution during floating-zone growth of large silicon single crystals. *Journal of Crystal Growth*. 2001; (230):108–117.
5. Lacis K., Muiznieks A., Ratnieks G. 3D mathematical model system for melt hydrodynamics in the silicon single crystal FZ-growth process with rotating magnetic field. *Magnetohydrodynamics*. 2005; 41(2):147–158.
6. Pivovarov Yu.V. Calculation of a flow of liquid with variable viscosity in a domain with curvilinear boundary. *Computational Technologies*. 2005; 10(3):87–107. (In Russ.)
7. Pivovarov Yu.V. Numerical simulation of convection in the floating zone. *Computational Technologies*. 2006; 11(1):81–94. (In Russ.)
8. Pivovarov Yu.V. Modelirovaniye konvektsii rasplava poluprovodnikovogo materiala pri zonnoy plavke [Modelling of the convection of semiconductor-material melt under zone melting]. Dis. Kand. Fiz.-Mat. Nauk. Novosibirsk: Institut Gidrodinamiki SO RAN; 2006: 135. (In Russ.)
9. Han X.-F., Liu X., Nakano S., Harada H., Miyamura Y., Kakimoto K. 3D global heat transfer model on floating zone for silicon single crystal growth. *Crystal Research and Technology*. 2018; (53):1–5. DOI:10.1002/crat.201700246.
10. Ilyin A.V., Rivkind V.Ya. Priblizhennoe reshenie zadachi stekaniya plenochnoy zhidkosti s ugla. Zadachi gidromekhaniki i teplomassoobmena so svobodnymi granitsami. Mezhevuzovskiy sbornik nauchnykh trudov [Approximate solution for film liquid runoff from a corner. Problems of hydromechanics and heat and mass transfer with free boundaries. Interuniversity collection of scientific papers]. Novosibirsk: Novosibirskiyy Gosudarstvennyy Universitet; 1987: 128. (In Russ.)
11. Yavorskiy B.M., Detlef A.A. Spravochnik po fizike [Physics handbook]. Moscow: Nauka; 1981: 512. (In Russ.)
12. Smythe W.R. Static and dynamic electricity. N.Y.: McGraw-Hill, 3rd Ed.; 1968: 845.
13. Lie K.H., Walker J.S., Riahi D.N. Free surface shape and AC electric current distribution for float zone silicon growth with a radio frequency induction coil. *Journal of Crystal Growth*. 1990; (100):450–458.