

---

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

---

DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.002

## Математическое моделирование одного эффективного способа селективного забора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема

И. Д. МУЗАЕВ<sup>1,2,\*</sup>, К. С. ХАРЕБОВ<sup>1</sup>, Н. И. МУЗАЕВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Геофизический институт — филиал ВНИЦ РАН, 362002, Владикавказ, Россия

<sup>2</sup>Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, 362002, Владикавказ, Россия

\*Контактный автор: Музаев Илларион Давидович, e-mail: [illarion.muzaev@yandex.ru](mailto:illarion.muzaev@yandex.ru)

Поступила 06 сентября 2023 г., доработана 27 марта 2024 г., принята в печать 24 апреля 2024 г.

Разработан новый эффективный способ селективного забора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема. Математическим и компьютерным моделированием впервые в мире доказано утверждение о том, что если из всех трех слоев водоема синхронно забирать воду, то поверхности раздела слоев не искривляются и в отличие от существующих способов не создаются критические ситуации забора воды. Доказательством эффективности разработанного способа стала возможность забирать воду из промежуточного слоя с высоким расходом. В промежуточном слое вода бывает холоднее и чище, чем в других слоях водоема.

*Ключевые слова:* стратифицированный водоем, водозабор, начально-краевая задача, интегральные преобразования Фурье и Лапласа, безвихревое движение идеальной жидкости, критический поток.

*Цитирование:* Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Математическое моделирование одного эффективного способа селективного забора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема. Вычислительные технологии. 2024; 29(5):5–16. DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.002.

## Введение

Водоем, в котором вода по глубине состоит из нескольких слоев, различающихся плотностью, мутностью, температурой либо химико-биологическим составом, называется слоисто стратифицированным. Водозаборный процесс, когда вода из такого водоема забирается из определенного слоя, причем исключено поступление воды в водозаборное окно из другого слоя, называется селективным. Если вода забирается из верхнего слоя двухслойного стратифицированного водоема и поверхность раздела слоев в результате искривления достигает нижней грани водозаборного окна, то такое положение называется нижним критическим положением поверхности раздела слоев, при этом числовое значение расхода (скорости) забираемой воды через проем водозаборного окна называется критическим значением расхода (скорости) забираемой воды [1–7]. А если вода забирается из нижнего слоя и при определенном значении расхода (скорости) забираемой воды поверхность раздела слоев воды в результате искривления опускается

до верхней грани водозаборного окна, то такое положение называется верхним критическим положением. Соответственно, числовое значение расхода (скорости) называется критическим значением расхода (скорости). Отсюда следует, что если в результате искривления поверхность раздела слоев принимает критическое положение, то этим нарушается селективный водозаборный процесс из определенного слоя водоема.

Применение селективного способа водозабора из стратифицированного водоема часто бывает целесообразным [1, 2]. Например, для охлаждения конденсаторов турбин тепловых и атомных электростанций и отвода от них излишнего тепла в летнее время требуется подавать к ним воду из глубинных промежуточных слоев стратифицированного водоема источника водоснабжения, где вода бывает холоднее на 8–10 °С по сравнению с температурой поверхностного слоя и одновременно чище и качественнее, чем в придонном мутном слое. При этом надо исключить возможность затекания воды из других слоев стратифицированного водоема.

## 1. Краткий математический анализ существующих методов расчета селективных водозаборных процессов

В специальных справочных источниках, а также в приложении к строительным нормам и правилам [1–3] представлены полуэмпирические формулы, предназначенные для гидравлических расчетов и проектирования селективных водозаборных устройств. Для схемы водозабора, когда необходимо забирать воду из верхнего осветленного слоя двухслойного водоема через водозаборное окно, устроенное на боковой грани водоема, рекомендуются руководствоваться двумя эмпирическими формулами А. Края [1, 2]. Первая формула предназначена для двумерной задачи, когда ширина водозаборного окна соизмерима с шириной водоема, схематизированного в виде прямоугольного параллелепипеда. Формула имеет следующий вид:

$$q_k = 1.51 \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}} g Z_0^3. \quad (1)$$

Вторая формула предназначена для пространственной задачи, когда ширина водоема значительно больше, чем ширина водозаборного окна. Она имеет вид

$$Q_k = 2.55 \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}} g Z_0^5. \quad (2)$$

В этих формулах приняты следующие обозначения:  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности воды в верхнем и нижнем слоях соответственно;  $Z_0$  — расстояние от первоначально горизонтальной плоскости раздела слоев до центра водозаборного окна;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $q_k$  и  $Q_k$  — критические значения расхода забираемой воды. Как сказано во введении статьи, критическое значение — это максимальное числовое значение расхода забираемой воды, при превышении которого происходит поднятие искривленной поверхности раздела слоев до нижней грани водозаборного окна. При этом в водозаборное окно частично будет затекать вода из нижнего мутного слоя, что нарушает селективный водозабор из верхнего осветленного слоя водоема.

Эти формулы имеют существенные недостатки. В них не содержатся толщины слоев и габаритные размеры водозаборного окна, которое принято как точечный сток. Решение рассматриваемой задачи в строгой гидродинамической постановке [6] показывает, что селективный водозаборный процесс существенно зависит как от толщины слоев, так и от габаритных размеров водозаборного окна.

Для расчета селективного водозаборного процесса, когда вода забирается из нижнего, холодного, слоя, лежащего под теплым поверхностным слоем, рекомендуются формула Д. Харлемана и формула И. Макарова. Формула Д. Харлемана со своими пределами применимости предназначена для двумерной задачи, когда ширина водоема равна ширине водозаборного окна. Она со своими пределами применимости имеет следующий вид [1, 2]:

$$\frac{Z_0}{h} = 0.87 \text{Fr}^{0.51}, \quad \text{Fr} = 0.08 \dots 13, \quad \frac{Z_0}{h} = 0.2 \dots 2. \quad (3)$$

Формула И. Макарова предназначена для двумерной задачи. Она со своими пределами применимости имеет вид

$$\frac{Z_0}{h} = 1.3\sqrt{\text{Fr}}, \quad \text{Fr} = 0.2 \dots 2.5, \quad (4)$$

где  $\text{Fr} = \frac{V^2}{g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} h}$  — плотностное число Фруда для проема водозаборного окна;  $V$  —

средняя скорость течения воды в проеме окна;  $Z_0$  — расстояние от невозмущенной поверхности раздела слоев до верхней грани окна;  $h$  — высота окна.

В работе [6] в рамках гидродинамической строгой теории поверхностных и внутренних гравитационных волн поставлена и решена начально-краевая задача, моделирующая селективный водозаборный процесс в трехслойном стратифицированном водоеме, когда вода забирается из промежуточного слоя через одно окно, устроенное на боковой грани водоема. В отличие от эмпирических формул (1)–(4) в расчетных формулах, полученных в работе [6], содержатся все входные параметры системы, в том числе габаритные размеры водозаборного окна, а также промежуток времени плавного (медленного) открытия окна. При мгновенном либо быстром открытии водозаборного окна происходит всплеск слоев воды с последующим перемешиванием слоев между собой.

## 2. Постановка и решение контактной начально-краевой задачи, моделирующей селективный водозаборный процесс

Полагается, что в прямоугольной системе координат  $0xyz_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , часть пространства, ограниченная условиями  $0 \leq x \leq L_1$ ,  $0 \leq y \leq L_2$ ,  $0 \leq z_i \leq H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , представляет стратифицированный водоем с толщинами слоев  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ , плотностями  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  верхнего, промежуточного и нижнего слоев соответственно.  $L_1$  и  $L_2$  — длина и ширина водоема, схематизированного в виде прямоугольного параллелепипеда, как показано на рис. 1.

Вода из слоев водоема синхронно забирается через три окна, устроенных на боковой грани водоема. В результате открытия всех трех водозаборных окон вода в слоях будет течь в сторону окон. При включении только промежуточного окна и по мере увеличения расхода (скорости) забираемой воды поверхность раздела верхнего и промежуточного слоев опускается вниз к верхней грани окна. Одновременно поверхность раздела промежуточного и нижнего слоев поднимается вверх к нижней грани окна. При определенном значении расхода забираемой воды обе поверхности раздела слоев превзойдут свои критические положения и нарушится селективность водозабора из промежуточного слоя. Этот негативный фактор полностью будет устранен, если включить вспомогательные окна и синхронно забирать воду с одинаковыми расходами из

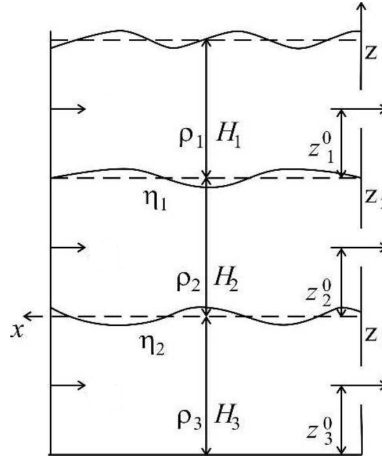


Рис. 1. Схема селективного водозаборного процесса из трехслойного стратифицированного водоема

Fig. 1. Sketch of a selective water intake process from a three-layer stratified reservoir

всех трех слоев. Обе поверхности раздела слоев практически сохраняют свои первоначальные горизонтальные положения.

Описанный гидродинамический процесс наиболее адекватно моделируется следующей контактной начально-краевой задачей теории поверхностных и внутренних гравитационных волн в идеальной несжимаемой жидкости [6–16]:

$$\Delta\varphi_i(x, y, z_i, t) = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \right|_{x=0} = -\bar{V}_i(t)f_i(y, z_i), \quad \left. \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \right|_{x=L_1} = -U_i(t), \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} \right|_{y=L_2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} \right|_{z_1=H_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i} \right|_{z_i=0} = \left. \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial z_{i+1}} \right|_{z_{i+1}=H_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\rho_i \left( \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i} \right) \Big|_{z_i=0} = \rho_{i+1} \left( \frac{\partial^2\varphi_{i+1}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial z_{i+1}} \right) \Big|_{z_{i+1}=H_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi_3}{\partial z_3} \right|_{z_3=0} = 0, \quad \varphi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$f_i(y, z_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } (0; y; z_i) \in [y_0 - b; y_0 + b] \cap [z_i^0 - a; z_i^0 + a], \\ 0 & \text{при } (0; y; z_i) \notin [y_0 - b; y_0 + b] \cap [z_i^0 - a; z_i^0 + a], \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$\bar{V}_i(t) = \begin{cases} V_i t / t_0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ V_i & \text{при } t > t_0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \quad V_i = \text{const}, \quad (12)$$

где приняты следующие обозначения:  $t$  — время;  $2a$  и  $2b$  — высота и ширина окон соответственно;  $\varphi_i(x, y, z_i, t)$  — потенциал скорости движения воды в  $i$ -м слое;  $\bar{V}_i(t)$  — скорость забора воды из  $i$ -го слоя через  $i$ -е окно;  $U_i(t)$  — скорость поступления воды в  $i$ -м слое на расстоянии  $x = L_1$  от водозаборных окон,

$$U_i(t) = \frac{\bar{V}_i(t)4ab}{L_2 H_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Можно легко заметить, что для каждого слоя воды выбрана своя координатная система  $(x, y, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , отличающиеся только точкой отсчета вертикальных осей  $z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Такой подход кратно сокращает кропотливые математические выкладки и существенно упрощает последовательность решения поставленной задачи.

Из выражения (13) очевидно, что скорости притока воды в водоем через условную грань  $x = L_1$  являются ничтожно малыми величинами. Поэтому из дальнейших математических выкладок они исключены.

При известных потенциалах  $\varphi_i$  расчетные формулы для законов искривления поверхностей раздела слоев у водозаборных окон определяются из следующих выражений [11]:

$$\eta_1(0, y_0, t) = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)g} \left[ \rho_1 \frac{\partial \varphi_1(0, y_0, z_1, t)}{\partial t} \Big|_{z_1=0} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2(0, y_0, z_2, t)}{\partial t} \Big|_{z_2=H_2} \right], \quad (14)$$

$$\eta_2(0, y_0, t) = \frac{1}{(\rho_3 - \rho_2)g} \left[ \rho_2 \frac{\partial \varphi_2(0, y_0, z_2, t)}{\partial t} \Big|_{z_2=0} - \rho_3 \frac{\partial \varphi_3(0, y_0, z_3, t)}{\partial t} \Big|_{z_3=H_3} \right]. \quad (15)$$

Поставленная контактная начально-краевая задача решена аналитически путем последовательного применения интегрального преобразования Лапласа по времени  $t$  и конечного косинус-интегрального преобразования Фурье по двум координатам  $x$  и  $y$ :

$$\tilde{\varphi}_{i,n,m} = \int_0^{L_1} \cos \frac{n\pi}{L_1} x \int_0^{L_2} \cos \frac{m\pi}{L_2} y \int_0^\infty \varphi_i(x, y, z_i, t) e^{-pt} dt dx dy. \quad (16)$$

В результате применения интегральных преобразований (16) начально-краевая задача (5)–(13) приводится к решению следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_{i,n,m}}{dz_i^2} - \lambda^2 \tilde{\varphi}_{i,n,m} = -\alpha_m \tilde{V}_l(p) S_i(z_i), \quad (17)$$

$$\tilde{V}_l(p) = \int_0^\infty \bar{V}_i(t) e^{-pt} dt = \frac{V_i}{t_0} \frac{1 - e^{-pt_0}}{p^2},$$

$$\alpha_m = \begin{cases} 2b & \text{при } m = 0, \\ \frac{2 \cos a_m y_0 \sin a_m b}{a_m} & \text{при } m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (18)$$

$$S_i(z_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } z_i \in [z_i^0 - a, z_i^0 + a], \\ 0 & \text{при } z_i \notin [z_i^0 - a, z_i^0 + a], \end{cases} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \sqrt{a_n^2 + a_m^2}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L_1}, \quad a_m = \frac{m\pi}{L_2}$$

с граничными условиями

$$\frac{d\tilde{\varphi}_{1,n,m}}{dz_1} \Big|_{z_1=H_1} = 0, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_{i,n,m}}{dz_i} \Big|_{z_i=0} = \frac{d\tilde{\varphi}_{i+1,n,m}}{dz_{i+1}} \Big|_{z_{i+1}=H_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

$$\rho_i \left( p^2 \tilde{\varphi}_{i,n,m} + g \frac{d\tilde{\varphi}_{i,n,m}}{dz_i} \right) \Big|_{z_i=0} = \rho_{i+1} \left( p^2 \tilde{\varphi}_{i+1,n,m} + g \frac{d\tilde{\varphi}_{i+1,n,m}}{dz_{i+1}} \right) \Big|_{z_{i+1}=H_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}_{3,n,m}}{dz_3} \Big|_{z_3=0} = 0. \quad (21)$$

После решения дифференциальных уравнений (17), удовлетворения граничным условиям (19)–(21), а затем выполнения обратных интегральных преобразований Лапласа и Фурье (16) в явных видах получатся все потенциалы скоростей  $\varphi_i(x, y, z_i, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

В результате подстановки потенциалов в выражения (14) и (15) для законов искривления поверхностей раздела слоев у водозаборных окон запишем следующую совокупность расчетных формул:

$$\begin{aligned}
 \eta_1(t) &= \frac{1}{L_1 L_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,m} \alpha_m \eta_{1,n,m}(t) \cos \frac{m\pi y_0}{L_2}, \\
 \eta_2(t) &= \frac{1}{L_1 L_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,m} \alpha_m \eta_{2,n,m}(t) \cos \frac{m\pi y_0}{L_2}, \\
 \delta_{n,m} &= \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, m = 0, \\ 2 & \text{при } n = 0, m = 1, 2, \dots, \\ 2 & \text{при } m = 0, n = 1, 2, \dots, \\ 4 & \text{при } n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots \end{cases} \\
 \eta_{1,n,m}(t) &= \frac{(\psi_1 V_1 - \psi_2 V_2 - \psi_3 V_3) \phi_1(t) - g\lambda \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \text{th } \lambda H_3 (\psi_7 V_1 - \psi_8 V_2) \phi_2(t)}{\gamma_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \\
 \eta_{2,n,m}(t) &= \frac{(\psi_4 V_1 + \psi_5 V_2 - \psi_6 V_3) \phi_1(t) - g\lambda \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \text{th } \lambda H_1 (\psi_9 V_2 - \psi_{10} V_3) \phi_2(t)}{\gamma_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \\
 \psi_1 &= \left( \frac{\rho_1}{\rho_3} \text{th } \lambda H_3 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{th } \lambda H_2 \right) R_1, \quad \psi_2 = \frac{\rho_2}{\rho_3} \text{th } \lambda H_1 \text{th } \lambda H_3 d_1 + \text{th } \lambda H_1 d_2, \\
 \psi_3 &= \text{th } \lambda H_1 d_3 R^*, \quad \psi_4 = \frac{\rho_1}{\rho_3} \text{th } \lambda H_3 R_1 R^*, \\
 \psi_5 &= \frac{\rho_2}{\rho_3} \text{th } \lambda H_1 \text{th } \lambda H_3 R_2 + \frac{\rho_1}{\rho_3} \text{th } \lambda H_3 R_3, \quad \psi_6 = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{th } \lambda H_2 + \text{th } \lambda H_1 \right) d_3, \\
 \psi_7 &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{th } \lambda H_2 R_1, \quad \psi_8 = \text{th } \lambda H_1 d_2, \quad \psi_9 = \frac{\rho_2}{\rho_3} \text{th } \lambda H_3 R_3, \quad \psi_{10} = \text{th } \lambda H_2 d_3, \\
 R_1 &= \frac{1}{\text{ch } \lambda H_1} \int_{z_1^0 - a}^{z_1^0 + a} \text{ch } \lambda (H_1 - x) dx, \quad R_2 = \frac{1}{\text{ch } \lambda H_2} \int_{z_2^0 - a}^{z_2^0 + a} \text{sh } \lambda (H_2 - x) dx, \\
 R_3 &= \frac{1}{\text{ch } \lambda H_2} \int_{z_2^0 - a}^{z_2^0 + a} \text{ch } \lambda (H_2 - x) dx, \\
 d_1 &= \frac{1}{\text{ch } \lambda H_2} \int_{z_2^0 - a}^{z_2^0 + a} \text{sh } \lambda x dx, \quad d_2 = \frac{1}{\text{ch } \lambda H_2} \int_{z_2^0 - a}^{z_2^0 + a} \text{ch } \lambda x dx, \quad d_3 = \frac{1}{\text{ch } \lambda H_3} \int_{z_3^0 - a}^{z_3^0 + a} \text{ch } \lambda x dx, \\
 \gamma_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_3} \text{th } \lambda H_3 + \frac{\rho_2}{\rho_3} \text{th } \lambda H_1 \text{th } \lambda H_2 \text{th } \lambda H_3 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{th } \lambda H_2 + \text{th } \lambda H_1, \\
 \gamma_2 &= \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) \text{th } \lambda H_1 \text{th } \lambda H_3 + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \text{th } \lambda H_1 \text{th } \lambda H_2 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) \text{th } \lambda H_2 \text{th } \lambda H_3, \\
 \gamma_3 &= \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \text{th } \lambda H_1 \text{th } \lambda H_2 \text{th } \lambda H_3,
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$R^* = \frac{2e^{-\lambda H_2}}{1 + e^{-2\lambda H_2}}, \quad \omega_1 = \sqrt{g\lambda \frac{\gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 - 4\gamma_1\gamma_3}}{2\gamma_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{g\lambda \frac{\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 - 4\gamma_1\gamma_3}}{2\gamma_1}},$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{1}{t_0}[\cos \omega_1 t - \cos \omega_1(t - t_0) - \cos \omega_2 t + \cos \omega_2(t - t_0)] & \text{при } t > t_0, \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0} \left( \frac{1 - \cos \omega_2 t}{\omega_2^2} - \frac{1 - \cos \omega_1 t}{\omega_1^2} \right) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{1}{t_0} \left[ \frac{\cos \omega_2(t - t_0) - \cos \omega_2 t}{\omega_2^2} - \frac{\cos \omega_1(t - t_0) - \cos \omega_1 t}{\omega_1^2} \right] & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Все величины в совокупности формул (22) кроме своих индексов зависят еще от натуральных чисел  $n$  и  $m$ . Например,  $\lambda = \lambda_{n,m}$ ,  $R_1 = R_{1,n,m}$ ,  $R_2 = R_{2,n,m}$ , ...

### 3. Математический и компьютерный анализ полученной совокупности расчетных формул

В полученных расчетных формулах для критических положений поверхностей раздела слоев содержатся все входные параметры стратифицированного водоема и селективных водозаборных окон:  $H_i$ ,  $\rho_i$  — толщины и плотности слоев воды;  $2a$ ,  $2b$ ,  $z_i^0$  — размеры водозаборных окон и отметки их геометрических центров относительно исходных горизонтальных поверхностей разделов слоев воды водоема;  $\bar{V}_i(t)$  — скорость забора воды из  $i$ -го слоя через  $i$ -е окно;  $L_1$  и  $L_2$  — длина и ширина водоема, схематизированного в виде прямоугольного параллелепипеда. Кроме вышеперечисленных среди параметров содержится  $t_0$  — промежуток времени медленного открытия окон. Все формулы совокупности являются весьма громоздкими, и вычисления по ним возможны только на быстродействующем компьютере. В данной статье приведены результаты компьютерных вычислительных экспериментов при частном случае, когда значения ширины водоема и водозаборных окон равны. В этом случае трехмерная задача приводится к вертикально двумерной задаче.

На рис. 2 и 3 представлены графики зависимостей от времени законов искривления поверхностей раздела слоев при различных расходах воды  $q_2$  в промежуточном слое. Параметры системы:  $H_1 = H_2 = H_3 = 2$  м; плотности воды  $\rho_1 = 998$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_3 = 1005$  кг/м<sup>3</sup>; отметки геометрических центров окон  $z_1^0 = z_2^0 = z_3^0 = 1$  м; габаритные размеры водозаборных окон  $2a = 0.25$  м,  $2b = 1$  м,  $L_1 = 1000$  м. На рисунках сплошные линии соответствуют:  $\eta_1(t)$  — уравнению поверхности раздела верхнего и промежуточного слоев, пунктирные линии соответствуют  $\eta_2(t)$  — уравнению раздела промежуточного и нижнего слоев.

Графики на рис. 2 соответствуют случаю, когда открывается только промежуточное окно, а остальные два окна закрыты. Отсюда следует, что по мере увеличения расхода забираемой воды обе поверхности раздела слоев притягиваются к проему промежуточного окна, в результате нарушается водозаборный процесс из промежуточного слоя водоема.

Графики на рис. 3 соответствуют случаю, когда открываются все три окна и вода из всех трех слоев забирается синхронно. Из рисунка видно, что по мере увеличения

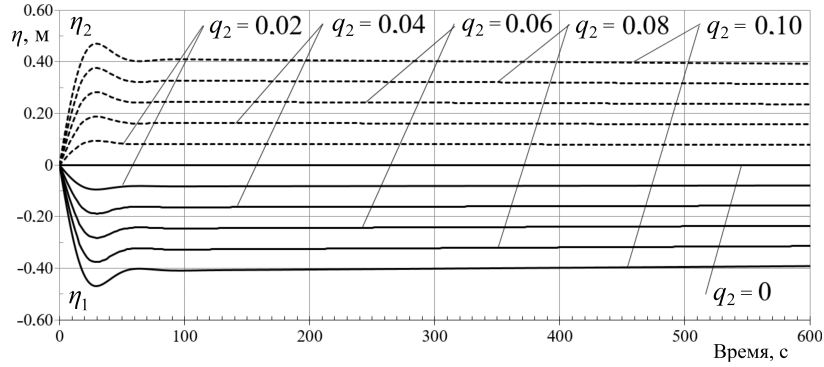


Рис. 2. Графики зависимостей от времени законов искривления поверхностей раздела слоев при различных расходах воды  $q_2$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) в промежуточном слое. Открыто только промежуточное окно

Fig. 2. Graphs of time dependences for laws of curvature interface at different water flow rates  $q_2$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) in the intermediate layer. Only the intermediate window is open

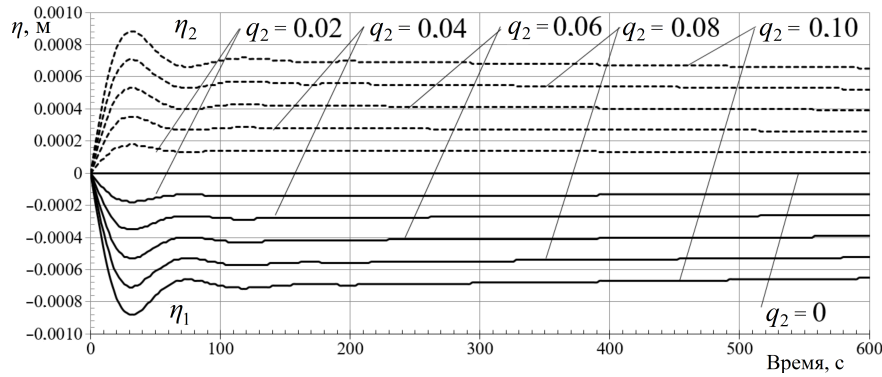


Рис. 3. Графики зависимостей от времени законов искривления поверхностей раздела слоев при различных расходах воды  $q_2$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) в промежуточном слое. Открыты все три окна

Fig. 3. Graphs of time dependences for laws of curvature interface at different water flow rates  $q_2$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) in the intermediate layer. All three windows are open

расходов забираемой воды обе поверхности раздела слоев практически сохраняют свои исходные положения. В этом случае селективный водозаборный процесс не нарушается и из промежуточного слоя можно забирать воду с большим расходом.

Для обеспечения устойчивого селективного водозаборного процесса помимо критических расходов (скоростей) необходимо знать и соблюдать условия, при которых не нарушаются разноплотностные течения слоистого потока воды вблизи водозаборных окон. Известно, что условия возможности существования разноплотностного течения определяются по критерию Ричардсона [1, 2]. Разноплотностное течение двух слоев воды нарушается, как только число Ричардсона становится меньше критического [1, 2].

$$\text{Ri} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \frac{gH}{V_2^2 - V_1^2} < \text{Ri}_{\text{кр}}.$$

Здесь  $V_1$  и  $V_2$  — скорости течения воды в верхнем и нижнем слоях соответственно;  $H$  — полная толщина потока воды. Диапазон вариации критического числа Ричардсона представляет интервал  $\text{Ri} \in (0.1, 2)$ . Очевиден тот факт, что при заборе воды через три окна разность скоростей течения в слоях существенно уменьшится. В результате



этого число Ричардсона резко увеличится, а разноплотностные потоки станут более устойчивыми, чем при заборе воды через одно окно.

Поставленной контактной начально-краевой задачей и совокупностью полученных расчетных формул (22) смоделирован селективный водозаборный процесс в трехслойном стратифицированном водоеме, когда необходим забор воды из промежуточного слоя. Из них как частный случай получают расчетные формулы для селективного водозаборного процесса в двухслойном стратифицированном водоеме. При следующих числовых значениях и переобозначениях входных параметров системы  $\rho_1 = 0$ ,  $H_2 \rightarrow H_1$ ,  $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ ,  $H_3 \rightarrow H_2$ ,  $\rho_3 \rightarrow \rho_2$ ,  $z_2^0 \rightarrow z_1^0$ ,  $V_2 \rightarrow V_1$ ,  $V_3 = 0$  совокупность расчетных формул (22) вырождается в совокупность расчетных формул для селективного водозаборного процесса в двухслойном водоеме, когда вода забирается из верхнего слоя. Следовательно, получается решение гидравлической задачи А. Края в гидродинамической постановке.

При следующих значениях  $\rho_1 = 0$ ,  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 0$  и переобозначениях входных параметров  $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ ,  $\rho_3 \rightarrow \rho_2$ ,  $V_3 \rightarrow V_2$ ,  $z_3^0 \rightarrow z_2^0$  трехслойный водоем вновь превращается в двухслойный. Вода из него забирается через нижнее окно. При таких переобозначениях входных параметров системы селективный водозаборный процесс в трехслойном водоеме превращается в селективный водозаборный процесс в двухслойном водоеме, когда вода забирается из его нижнего слоя. В этом случае получится решение гидравлической задачи Д. Харлемана — И. Макарова в гидродинамической постановке.

## Заключение

Разработан новый эффективный способ селективного забора воды из трехслойного стратифицированного водоема для случая, когда бывает целесообразным селективно забирать воду из промежуточного слоя, где вода бывает холоднее примерно на 8–10 °С по сравнению с температурой поверхностного слоя и одновременно чище и качественнее, чем в придонном мутном слое водоема. Новизна предложенного способа заключается в том, что вода забирается из слоев через три окна, устроенных на его боковой грани. Промежуточное окно является основным, и оно предназначено для селективного забора воды из промежуточного слоя водоема. Верхнее и нижнее окна являются вспомогательными, и через них обеспечивается селективный водозабор с высоким значением расхода забираемой воды.

В рамках гидродинамики безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости в статье поставлена и решена пространственная трехслойная контактная начально-краевая задача, которая моделирует вышеописанный способ селективного забора воды из стратифицированного водоема. Получена совокупность расчетных формул для процессов искривления и колебания поверхностей раздела слоев. На базе полученной совокупности расчетных формул выполнены компьютерные вычислительные эксперименты, которые позволили доказать следующие три утверждения:

1. При заборе воды из промежуточного слоя через промежуточное окно, когда остальные два окна закрыты, обе поверхности раздела слоев сильно искривляются. При низком расходе верхняя поверхность раздела слоев опускается ниже отметки верхней кромки окна. Одновременно нижняя поверхность раздела слоев поднимается выше отметки нижней кромки окна. В результате этого будет нарушаться селективный водозабор из промежуточного слоя водоема.

2. При синхронном заборе воды из слоев через все три окна обе поверхности раздела слоев практически остаются в первоначальных горизонтальных положениях. В результате такого эффекта становится возможным забирать воду с высоким расходом из промежуточного слоя. Селективный водозабор не будет нарушен.
3. Для обеспечения устойчивого селективного водозаборного процесса необходимо знать, отслеживать и соблюдать условия, накладываемые на разноплотностные течения слоистого потока вблизи водозаборных окон. Известно, что условия возможности существования разноплотностного течения определяются по критерию устойчивости Ричардсона, согласно которому чем больше величина числа Ричардсона, тем более устойчиво разноплотностное течение жидкости. В знаменателе числа Ричардсона содержится разность квадратов скоростей в слоях. При синхронном заборе воды через три окна разность квадратов скоростей в слоях резко уменьшается. При этом значение числа Ричардсона увеличивается, а следовательно, разноплотностные течения в слоях становятся более устойчивыми, чем при заборе воды только через одно окно.

Этими компьютерно-аналитическими доказательствами трех утверждений в свою очередь доказывается эффективность предложенного в статье способа селективного водозабора из стратифицированного водоема.

## Список литературы

- [1] Аверкиев А.Г., Макаров И.И., Синотин В.И. Бесплотинные водозаборные сооружения. М.; Л.: Энергия; 1969: 164.
- [2] Справочник по гидравлике / Под ред. В.А. Большакова. Киев: Вища школа; 1977: 223–225.
- [3] Соколов А.С., Макаров И.И., Кравец В.И., Филиппова З.Р. Методические указания по технологическим расчетам водоемов-охладителей. СПб.: ВНИИГ; 2003: 116.
- [4] Craуа А. Recherches theoriques sur l'ecoulement de couches superposees de fluides de densites differentes. La Houille Blanche. 1949; (4):44–55.
- [5] Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Математическое моделирование способа управления селективным водозаборным процессом в стратифицированном водоеме. Вычислительные технологии. 2020; 25(5):4–16. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.002.
- [6] Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Теоретические положения автоматизации проектирования селективных водозаборных устройств. Вычислительные технологии. 2016; 21(4):99–110.
- [7] Музаев И.Д., Созанов В.Г. К теории поверхностных гравитационных волн Коши–Пуассона в узких непрямоугольных водоемах. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1995; (3):40–43.
- [8] Шокин Ю.И., Рычков А.Д., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б. О численных методах решения задач о накате волн на берег. I. Сравнительный анализ численных алгоритмов для одномерных задач. Вычислительные технологии. 2015; 20(5):214–232.
- [9] Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука; 1991: 176.
- [10] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука; 1977: 815.
- [11] Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1947: 929.

- [12] **Harleman D.R.F., Stozenbach K.D.** Fluid mechanics of heat disposal from power generation. Annual Review of Fluid Mechanics. 1972; (4):7–32.
- [13] **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа; 1970: 710.
- [14] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука; 1977: 830.
- [15] **Гинзбург И.П.** Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Издательство Ленинградского университета; 1970: 378.
- [16] **Букреев В.И.** Способ управления селективным водозабором через отверстие в вертикальной стенке. Прикладная механика и техническая физика. 2010; 51(3):49–54.

---

Вычислительные технологии, 2024, том 29, № 5, с. 5–16. © ФИЦ ИВТ, 2024  
Computational Technologies, 2024, vol. 29, no. 5, pp. 5–16. © FRC ICT, 2024

ISSN 1560-7534  
eISSN 2313-691X

---

MATHEMATICAL MODELLING

---

DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.002

**Mathematical modelling of an effective method of selective water intake from the intermediate layer of a three-layer stratified reservoir**

I. D. MUZAEV<sup>1,2,\*</sup>, K. S. KHAREBOV<sup>1</sup>, N. I. MUZAEV<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Geophysical Institute — the Affiliate of VSC RAS, 362002, Vladikavkaz, Russia

<sup>2</sup>Financial University, 362002, Vladikavkaz, Russia

\*Corresponding author: Illarion D. Muzaev, e-mail: [illarion.muzaev@yandex.ru](mailto:illarion.muzaev@yandex.ru)

*Received September 06, 2023, revised March 27, 2024, accepted April 24, 2024.*

**Abstract**

The purpose of the article is to develop an effective water intake method for selective water intake from the intermediate layer of a three-layer reservoir with density stratification, where the water is colder by 8–10 °C compared to the temperature of the surface layer and at the same time cleaner than in the bottom layer of the reservoir. Methodology of hydrodynamics of vortex-free motion of an ideal incompressible fluid is used. A spatial three-layer contact initial boundary value problem has been set and solved analytically, which mechanically and mathematically models the above-described new method of selective water intake from the intermediate layer. A set of calculation formulas for the laws of oscillation and curvature of the interface of layers is obtained. The novelty of the method relies on the fact that water from all three layers is synchronously taken through three windows arranged on the side of the reservoir so that they fit in one vertical strip symmetrically relative to the initially stationary horizontal planes of the water layers section. Computer experiments have proved that with synchronous water intake from all three windows, the interface surfaces of the layers practically retain their original horizontal positions. In this regard, it becomes possible to selectively take water from the intermediate layer through an intermediate window with a relatively high flow rate. This is the effectiveness of the proposed method of water intake from a stratified reservoir.

**Keywords:** stratified reservoir, selective water intake, contact initial-boundary value problem, integral Fourier and Laplace transformations, vortex-free motion of an ideal fluid, critical flow.

**Citation:** Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I. Mathematical modelling of an effective method of selective water intake from the intermediate layer of a three-layer stratified reservoir. Computational Technologies. 2024; 29(5):5–16. DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.002. (In Russ.)

## References

1. **Averkiev A.G., Makarov I.I., Sinotin V.I.** Besplotinnye vodozabornye sooruzheniya [Damless water intake structures]. Moscow; Leningrad: Energiya; 1969: 164. (In Russ.)
2. Spravochnik po gidravlike [Reference book on hydraulics]. Ed. V.A. Bolshakov. Kiev: Vyshcha shkola; 1977: 223–225. (In Russ.)
3. **Sokolov A.S., Makarov I.I., Kravets V.I., Filippova Z.R.** Metodicheskie ukazaniya po tekhnologicheskim raschetam vodoemov-okhladiteley [Guidance on technological calculations of water coolers]. SPb: VNIIG; 2003: 116. (In Russ.)
4. **Craya A.** Recherches theoriques sur l'ecoulement de couches superposees de fluides de densites defferents. La Houille Blanche. 1949; (4):44–55.
5. **Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I.** Mathematical modelling of the method for controlling selective water intake process in a stratified reservoir. Computational Technologies. 2020; 25(5):4–16. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.002. (In Russ.)
6. **Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I.** Automation of theoretical design for selective water intake devices. Computational Technologies. 2016; 21(4):99–110. (In Russ.)
7. **Muzaev I.D., Sozanov V.G.** On the theory of surface gravity waves Cauchy – Poisson in narrow non-prismatic reservoirs. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Severo-Kavkazskiy Region. Estestvennye Nauki. 1995; (3):40–43. (In Russ.)
8. **Shokin Yu.I., Rychkov A.D., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** On numerical methods for solving run-up problems. I. Comparative analysis of numerical algorithms for one-dimensional problems. Computational Technologies. 2015; 20(5):214–232. (In Russ.)
9. **Belolipetskiy V.M., Kostyuk V.Yu., Shokin Yu.I.** Matematicheskoe modelirovanie techeniy stratifitsirovannoy zhidkosti [Mathematical modelling of stratified fluid flows]. Novosibirsk: Nauka; 1991: 176. (In Russ.)
10. **Sretenskiy L.N.** Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [Theory of wave motions of fluid]. Moscow: Nauka; 1977: 815. (In Russ.)
11. **Lamb G.** Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moscow; Leningrad: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tekhniko-Teoreticheskoy Literatury; 1947: 929. (In Russ.)
12. **Harleman D.R.F., Stozenbach K.D.** Fluid mechanics of heat disposal from power generation. Annual Review of Fluid Mechanics. 1972; (4):7–32.
13. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Partial differential equations in mathematical physics]. Moscow: Vysshaya Shkola; 1970: 710. (In Russ.)
14. **Korn G., Korn T.** Mathematical handbook for scientists and engineers. McGraw-Hill Book Company; 1968: 818.
15. **Ginzburg I.P.** Teoriya soprotivleniya i teploperedachi [The theory of resistance and heat transfer]. Leningrad: Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta; 1970: 378. (In Russ.)
16. **Bukreev V.I.** Method for controlling selective water intake through a hole in a vertical wall. Applied Mechanics and Technical Physics. 2010; 51(3):49–54. (In Russ.)