

О методе повышенной точности для решения обратной задачи системы Захарова – Шабата

С. Б. МЕДВЕДЕВ^{1,*}, И. А. ВАСЕВА^{1,2}, М. П. ФЕДУРУК^{2,1}

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Медведев Сергей Борисович, e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Поступила 28 мая 2025 г., доработана 11 июня 2025 г., принята в печать 27 июня 2025 г.

В работе представлен численный метод решения обратной задачи Захарова – Шабата в рамках метода обратной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шрёдингера. Метод позволяет повысить точность решения задачи до девятого порядка, сохраняя при этом квадратичную вычислительную сложность. Метод может применяться для восстановления сигнала по его нелинейному спектру с помощью численного решения системы уравнений Гельфанда – Левитана – Марченко или как часть комбинированного метода Дарбу. В втором варианте предложенный метод используется для восстановления сигнала по непрерывной части нелинейного спектра, а солитонная часть добавляется к сигналу с помощью преобразования Дарбу. Численные эксперименты показали высокую эффективность метода.

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, нелинейное уравнение Шрёдингера, задача Захарова – Шабата, уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко, нелинейное преобразование Фурье.

Цитирование: Медведев С.Б., Васева И.А., Федорук М.П. О методе повышенной точности для решения обратной задачи системы Захарова – Шабата. Вычислительные технологии. 2025; 30(4):90–107. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.009.

Введение

Метод обратной задачи рассеяния (ОЗР) является методом решения задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений. Он основан на связи нелинейного уравнения с данными рассеяния семейства вспомогательных линейных дифференциальных операторов, дающей возможность по эволюции данных рассеяния восстановить эволюцию решения нелинейного уравнения. Данные рассеяния называются также спектральными данными или нелинейным спектром задачи. На первом этапе метода ОЗР по известному потенциалу $q(z_0, t)$ решается прямая задача рассеяния и находятся спектральные данные. Далее по элементарным формулам находится эволюция спектральных данных. На третьем этапе решается обратная задача рассеяния, т. е. по известным данным рассеяния определяется потенциал $q(z, t)$ в точке z .

Впервые метод ОЗР был предложен в 1967 г. Гарднером, Грином, Краскалом и Миурой применительно к уравнению Кортевега – де Фриза [1]. В 1971 г. Захаров и Шабат [2], используя прием, впервые предложенный Лаксом [3] (1968), показали, что метод ОЗР применим для решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + |q|^2q = 0, \quad (1)$$

которое описывает огибающую для узких волновых пучков [4]. В (1) через σ обозначена аномальная ($\sigma = 1$) и нормальная дисперсия ($\sigma = -1$).

Прямая задача метода ОЗР для НУШ (1) записывается в виде системы Захарова – Шабата (ЗШ)

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = Q(t)\Psi(t), \quad Q(t) = \begin{pmatrix} -i\zeta & q(t) \\ r(t) & i\zeta \end{pmatrix}, \quad r(t) = -\sigma q^*(t),$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ – комплексный спектральный параметр, $\Psi(t)$ – волновая вектор-функция.

Результатом решения прямой спектральной задачи является нелинейный спектр [5]

$$\sum_l = \{l(\xi), [\zeta_n, l_n]_{n=1}^N\}, \quad \sum_r = \{r(\xi), [\zeta_n, r_n]_{n=1}^N\}, \quad (2)$$

где N – число солитонов в сигнале. Здесь $l(\xi)$ и $r(\xi)$ – левый и правый коэффициенты отражения, определяемые для действительного спектрального параметра ξ . Коэффициенты отражения определяют непрерывный спектр системы ЗШ. В случае аномальной дисперсии существует также дискретный спектр, который определяется дискретными собственными значениями системы ЗШ ζ_n , а также левыми и правыми фазовыми коэффициентами (нормировочными константами) l_n и r_n , $n = 1, \dots, N$. В случае нормальной дисперсии спектр не имеет дискретной части и для его характеристики достаточно знать $l(\xi)$ или $r(\xi)$.

Обратная задача для системы ЗШ состоит в восстановлении потенциала $q(t)$ по известному нелинейному спектру (2). Она может быть сведена к системе уравнений Гельфанда – Левитана – Марченко (ГЛМ) [6], левой

$$A_1^*(t, s) + \int_{-\infty}^t A_2(t, t')\Omega_l(t' + s)dt' = 0, \quad t \geq s, \quad (3)$$

$$-\sigma A_2^*(t, s) + \Omega_l(t + s) + \int_{-\infty}^t A_1(t, t')\Omega_l(t' + s)dt' = 0$$

или правой

$$B_2^*(t, s) + \int_t^\infty B_1(t, t')\Omega_r(t' + s)dt' = 0, \quad t \leq s, \quad (4)$$

$$-\sigma B_1^*(t, s) + \Omega_r(t + s) + \int_t^\infty B_2(t, t')\Omega_r(t' + s)dt' = 0.$$

Уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Левое и правое ядра уравнений ГЛМ определяются для всякого действительного t через нелинейный спектр системы Захарова – Шабата (2):

$$\Omega_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty l(\xi)e^{-i\xi t}d\xi - i \sum_{n=1}^N l_n e^{-i\zeta_n t}, \quad \Omega_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r(\xi)e^{i\xi t}d\xi - i \sum_{n=1}^N r_n e^{i\zeta_n t}.$$

После решения левой (3) или правой (4) систем уравнений ГЛМ потенциал $q(t)$ восстанавливается по формулам [6]

$$q(t) = -2A_2^*(t, t) = 2B_1(t, t). \quad (5)$$

Обзор численных методов для реализации метода ОЗР применительно к нелинейному уравнению Шрёдингера можно найти, например, в [5]. Данная работа посвящена третьему этапу метода ОЗР для нелинейного уравнения Шрёдингера. Существует большое разнообразие методов решения обратной задачи Захарова – Шабата, например метод, основанный на переходе к системе уравнений в частных производных [7], алгоритм параметризации ядер системы ГЛМ полиномами [8], метод тёплицева внутреннего окаймления ТІВ (Toeplitz inner bordering) [9] и его блочный вариант — обобщенный ТІВ (generalized ТІВ, GTІВ) [10]. Для сигналов, содержащих только непрерывный спектр, можно использовать так называемые методы послойного восстановления (layer peeling) [11, 12]. Упомянутые методы имеют порядок аппроксимации не выше второго. Также необходимо отметить метод, основанный на преобразовании Дарбу, который позволяет с максимальной эффективностью строить сигналы, содержащие только дискретный спектр [13]. В случае полного нелинейного спектра предлагалось комбинировать преобразование Дарбу с методом послойного восстановления [14] или с методом ТІВ [15]. Подробный обзор численных методов для обратной задачи ЗШ приведен в [16].

В работе [16] предложен подход к повышению порядка аппроксимации уравнений ГЛМ с помощью квадратурных формул Грегори. Этот метод основан на методе GTІВ и поэтому называется HGTІВ. В [16] показано, что использование шести весовых коэффициентов в формулах Грегори позволяет решать обратную задачу Захарова – Шабата с шестым порядком точности. В работе [17] метод HGTІВ использовался в комбинации с преобразованием Дарбу.

В данной работе мы повышаем точность метода HGTІВ до девятого порядка. Основная цель работы заключается в том, чтобы изучить, как увеличение точности решения обратной задачи влияет на точность метода ОЗР при условии, что для прямой задачи не известны методы выше шестого порядка аппроксимации. В работе более подробно описывается метод HGTІВ [16], в том числе замена переменных, приводящая уравнения к тёплицевому виду, а также приводится алгоритм решения итоговой линейной системы. Предложенная в работе схема девятого порядка используется в тестовых расчетах как самостоятельно, так и в комбинации с преобразованием Дарбу.

1. Метод повышенного порядка решения уравнений ГЛМ

В этом разделе рассмотрим метод HGTІВ повышенного порядка решения уравнений ГЛМ [16]. Дальнейшее изложение приведено только для левых уравнений ГЛМ (3), поскольку для правых уравнений ГЛМ (4) преобразование аналогично. Нижний индекс в обозначении ядра Ω_l далее опускаем.

Сделаем замену переменных $k = t - s$, $n = t$:

$$X_1(k, n) = A_1(t, s), \quad X_2(k, n) = -\sigma A_2^*(t, s).$$

Учитывая условие $t \geq s$, получаем, что функции $X_{1,2}(k, t)$ определены на полуплоскости $k \geq 0$ и формула восстановления потенциала (5) принимает вид

$$q(t) = 2\sigma X_2(0, t). \quad (6)$$

Перепишем уравнения (3) в новых переменных:

$$X_1^*(k, t) - \sigma \int_{-\infty}^t \Omega(t' + t - k) X_2^*(t - t', t) dt' = 0,$$

$$X_2(k, t) + \int_{-\infty}^t \Omega(t' + t - k) X_1(t - t', t) dt' = -\Omega(2t - k).$$

Введем новое обозначение $z = t - t'$ и получим

$$X_1(k, t) - \sigma \int_0^{\infty} \Omega^*(2t - k - z) X_2(z, t) dz = 0,$$

$$X_2(k, t) + \int_0^{\infty} \Omega(2t - k - z) X_1(z, t) dz = -\Omega(2t - k).$$
(7)

Для фиксированного t интегральные операторы (7) являются ганкелевыми, поскольку они зависят только от суммы $k + z$.

Заменим бесконечную область интегрирования на конечную $[0, P]$ при достаточно большом значении P . Получим интегральные уравнения с конечными пределами

$$X_1(k, t) - \sigma \int_0^P \Omega^*(2t - k - z) X_2(z, t) dz = 0,$$

$$X_2(k, t) + \int_0^P \Omega(2t - k - z) X_1(p, t) dz = -\Omega(2t - k).$$
(8)

На рис. 1 показано, как изменяется область интегрирования левых уравнений ГЛМ в результате замены переменных. Считаем, что сигнал требуется восстановить на конечном интервале от t_0 до t_M . Область определения операторов закрашена серым цветом. Красным цветом выделен отрезок, на котором находятся значения, которые используются для восстановления сигнала.

Для конечно-разностной аппроксимации уравнений (8) используем сетку с постоянным шагом $h = P/M$, M — число шагов сетки. Это позволит аппроксимировать ядро интегрального оператора ганкелевыми матрицами H и H^*

$$H = \begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_M \\ \omega_1 & \omega_2 & & & \\ \omega_2 & & \cdot & & \\ \vdots & \cdot & & & \\ \omega_M & & \cdots & \omega_{2M-1} & \omega_{2M} \end{bmatrix}, \quad \omega_m = \Omega(2t - mh).$$

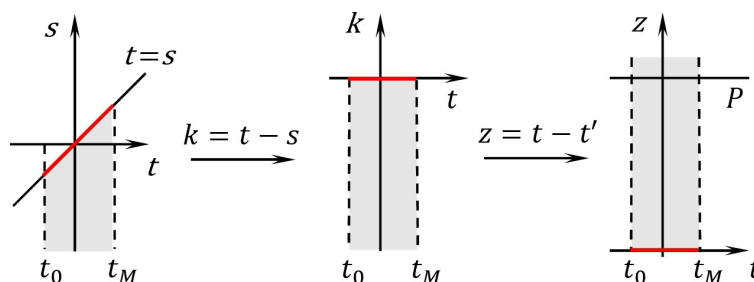


Рис. 1. Область интегрирования левых уравнений ГЛМ в ганкелевом виде
 Fig. 1. The domain of integration of the left GLM equations in Hankel form

Для численного интегрирования уравнений ГЛМ будем использовать формулы Грегори [18, 19]. Квадратурные формулы Грегори содержат минимальное количество весовых коэффициентов, отличных от единицы. Причем эти коэффициенты расположены симметрично по краям области интегрирования. Удобно представить весовые коэффициенты формул Грегори в виде диагональных матриц W_n размерности $M + 1$

$$W_n = \text{diag}[w_1, w_2, \dots, w_n, 1, \dots, 1, w_n, w_{n-1}, \dots, w_1]. \quad (9)$$

Значения весовых коэффициентов для $n = 1, \dots, 9$ можно найти в [20]. В частности, матрицы W_6 и W_9 определяются следующим набором коэффициентов:

$$\begin{aligned} \{w_1, w_2, \dots, w_6\} &= \left\{ \frac{209\,957}{665\,280}, \frac{926\,189}{665\,280}, \frac{207\,559}{332\,640}, \frac{413\,831}{332\,640}, \frac{605\,341}{665\,280}, \frac{674\,773}{665\,280} \right\}, \\ \{w_1, w_2, \dots, w_9\} &= \\ &= \left\{ \frac{25\,713}{89\,600}, \frac{1\,153\,247}{725\,760}, \frac{130\,583}{3\,628\,800}, \frac{903\,527}{403\,200}, \frac{-797}{5670}, \frac{6\,244\,961}{3\,628\,800}, \frac{56\,621}{80\,640}, \frac{3\,891\,877}{3\,628\,800}, \frac{1\,028\,617}{1\,036\,800} \right\}. \end{aligned}$$

Формулы Грегори W_{2k-1} и W_{2k} являются точными для полиномов до $(2k - 1)$ -й степени [18]. В работе [16] были использованы формулы Грегори до $n = 6$. Начиная с $n = 9$ появляются отрицательные весовые коэффициенты. В работе [21] показано, что существуют последовательности типа Грегори с неотрицательными весовыми коэффициентами для $n \geq 9$.

Аппроксимируя (8), получаем систему линейных уравнений с ганкелевыми матрицами

$$\begin{bmatrix} E & -\sigma h H^* W_n \\ h H W_n & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix},$$

где E — единичная матрица размерности $M + 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= [X_1(0, t), X_1(h, t), X_1(2h, t), \dots, X_1((M - 1)h, t), X_1(Mh, t)]^T, \\ \mathbf{X}_2 &= [X_2(0, t), X_2(h, t), X_2(2h, t), \dots, X_2((M - 1)h, t), X_2(Mh, t)]^T, \\ \mathbf{F} &= -[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_M]^T. \end{aligned}$$

Сделаем замену $\mathbf{Y}_j = W_n \mathbf{X}_j$, $j = 1, 2$:

$$\begin{bmatrix} W_n^{-1} & -\sigma h H^* \\ h H & W_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В новых переменных формула восстановления потенциала (6) примет вид

$$q(t) = 2\sigma Y_2(0, t)/w_1, \quad (11)$$

где w_1 — первый весовой коэффициент формулы Грегори W_n (9).

Чтобы перейти к блочно-диагональной матрице $\text{diag}(E, J)$

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_n^{-1} & -\sigma h H^* \\ h H & W_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где J — антидиагональная единичная матрица. Заметим, что $J = J^T$, $J^2 = E$ и умножение вектора на матрицу J переставляет элементы этого вектора в обратном порядке. Упрощая выражение (12), получаем систему с матрицей B

$$\begin{bmatrix} W_n^{-1} & -\sigma T^* \\ T & W_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ J\mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ J\mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} W_n^{-1} & -\sigma T^* \\ T & W_n^{-1} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где матрица T и ее эрмитово сопряжение T^* являются тѐплицевыми матрицами и выражаются через H и J :

$$T = hJH, \quad T^* = hH^*J.$$

Можно также ввести новые обозначения для $\tilde{\mathbf{Y}}_2 = J\mathbf{Y}_2$ и $\tilde{\mathbf{F}} = J\mathbf{F}$, но по сути это просто векторы с обратным порядком элементов. Таким образом, для восстановления потенциала в точке t переходим от формулы (11) к формуле

$$q(t) = \frac{2\sigma\tilde{Y}_2(P, t)}{w_1}, \quad (14)$$

где w_1 — первый весовой коэффициент формулы Грегори (9), P — правая граница области интегрирования.

Представим матрицу B системы (13) в виде разности между блочно-тѐплицевой матрицей A и диагональной матрицей R

$$B = A - R, \quad A = \begin{bmatrix} E & -\sigma T^* \\ T & E \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} E - W_n^{-1} & 0 \\ 0 & E - W_n^{-1} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Ранг r матрицы R равен $4n$. Поскольку $r \ll M$, можно применить формулу Вудбери [22]

$$(A - UV)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(E_r - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1},$$

где $R = UV$, E_r — единичная матрица размерности r . Матрица R — диагональная, поэтому ее легко представить в виде произведения

$$R = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_4 \end{bmatrix},$$

где $D_k = U_kV_k$, D_k — невырожденная диагональная матрица, нули означают подходящие по размеру нулевые матрицы. Проще всего задать матрицы U_k и V_k , взяв $U_k = E_k$, $V_k = D_k$ либо наоборот $U_k = D_k$, $V_k = E_k$.

Таким образом, чтобы решить линейную систему $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, необходимо вычислить

$$\mathbf{x} = (A - UV)^{-1}\mathbf{b} = \underline{A^{-1}\mathbf{b}} + \underline{A^{-1}U} (E_r - V\underline{A^{-1}U})^{-1} V \underline{A^{-1}\mathbf{b}} \quad (16)$$

по следующему алгоритму:

- находим \mathbf{y} , решая систему $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (подчеркнутые члены в (16));
- находим матрицу $Z = A^{-1}U$, решая систему $AZ = U$ (дважды подчеркнутые члены в (16));
- находим \mathbf{z} , решая $(E_r - VZ)\mathbf{z} = V\mathbf{y}$;
- в итоге $\mathbf{x} = \mathbf{y} + Z\mathbf{z}$.

Таким образом, необходимо решить $r + 1$ линейных систем с матрицей A большой размерности $M + 1$ и одну систему с матрицей $(E_r - VZ)$ маленькой размерности r .

Опишем подробнее алгоритм решения системы $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} E & -\sigma T^* \\ T & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J\mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где E — единичная матрица размерности $M + 1$, матрицы T , T^* и правая часть \mathbf{b} задаются следующим образом:

$$T = \begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_{-1} & \dots & \omega_{-M} \\ \omega_1 & \omega_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega_M & \dots & \dots & \omega_0 \end{bmatrix}, \quad T^* = \begin{bmatrix} \omega_0^* & \omega_1^* & \dots & \omega_M^* \\ \omega_{-1}^* & \omega_0^* & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega_{-M}^* & \dots & \dots & \omega_0^* \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_M, z_0, z_1, \dots, z_M]^T, \quad \mathbf{b} = [0, 0, \dots, 0, -\omega_0, -\omega_1, \dots, -\omega_M]^T,$$

где $\omega_{\pm m} = \Omega(2t - P \pm mh)$.

Матрица A размером 2×2 системы (17) является блочной матрицей с трёхдиагональными блоками $(M + 1) \times (M + 1)$. Чтобы решить эту систему, переставим элементы матрицы A и векторов так, чтобы получить блочную трёхдиагональную матрицу $(M + 1) \times (M + 1)$ с блоками 2×2 [23]:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_M \\ c_{-1} & c_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{-M} & \dots & \dots & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_M \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где

$$c_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma\omega_0^* \\ \omega_0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_m = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma\omega_{-m}^* \\ \omega_m & 0 \end{bmatrix}, \quad c_{-m} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma\omega_m^* \\ \omega_{-m} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} y_m \\ z_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_m \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Для выполнения следующих шагов алгоритма аналогичным образом переставим элементы матриц U и V , тогда ненулевые элементы этих матриц будут расположены на $2n$ первых и $2n$ последних позициях главной диагонали.

Чтобы решить систему (19), можно использовать блочную версию алгоритма Левинсона [24], которую приведем далее. На нулевом шаге алгоритма определяем решение системы с матрицей c_0 и правой частью \mathbf{f}_0 (20)

$$\mathbf{x}^{new} = c_0^{-1}\mathbf{f}_0, \quad \alpha = \beta = c_0^{-1}.$$

Затем организуем цикл по $K = 1, \dots, M$. Матрицы α и β размерности $2K \times 2$ определяются через значения на предыдущем шаге:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{K-1} \\ O \end{pmatrix} G + \begin{pmatrix} O \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{K-1} \end{pmatrix} H,$$

где O — нулевая матрица размером 2×2 , а $\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}$ и $\beta_0, \dots, \beta_{K-1}$ — матрицы 2×2 . Аналогично вычисляем

$$\beta = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{K-1} \\ O \end{pmatrix} R + \begin{pmatrix} O \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{K-1} \end{pmatrix} S.$$

Здесь G, H, R, S — матрицы 2×2 , которые определяются следующим образом:

$$G = (E - F_2 F_1)^{-1}, \quad H = -F_1 G, \quad S = (E - F_1 F_2)^{-1}, \quad R = -F_2 S,$$

$$F_1 = \sum_{l=-K}^{-1} c_l \alpha_{l+K}, \quad F_2 = \sum_{l=-K}^{-1} c_{-l} \beta_{-l-1}.$$

Далее определяем вектор \mathbf{g}_{KK} размерности 2 через решение \mathbf{x}^{old} , полученное на предыдущем шаге, блоки c_l исходной системы и элемент правой части \mathbf{f}_K (20):

$$\mathbf{g}_{KK} = \mathbf{f}_K - \sum_{l=-K}^{-1} c_l \mathbf{x}_{l+1}^{old},$$

Отсюда находим вектор $\mathbf{z} = \beta \mathbf{g}_{KK}$ размерности $2K$ и затем вектор \mathbf{x}^{new} , который является решением системы с матрицей $2K \times 2K$,

$$\mathbf{x}^{new} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{old} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{z}, \quad (21)$$

где \mathbf{x}^{old} — решение с предыдущего шага, вектор размерности $2(K-1)$. На последнем шаге цикла, при $K = M$, \mathbf{x}^{new} будет решением системы (19).

На втором шаге алгоритма необходимо решить $r = 4n$ систем с той же матрицей A и столбцами матрицы U в качестве правых частей. В каждой такой правой части имеется только один ненулевой элемент, удобно взять его равным единице, тогда весовые коэффициенты формул Грегори будут содержаться в матрице V . Напомним, что после перехода к блочно-тёплицевой матрице с блоками 2×2 ненулевые элементы матриц U и V расположены на $2n$ первых и $2n$ последних позициях главной диагонали. В результате получим $2n$ систем с правыми частями, содержащими единицы в начале правой части, и $2n$ систем с единицами в конце правой части. Для повышения эффективности можно решать $2n$ систем с единицами в начале правой части одновременно с системой $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Затем можно переставить элементы в блоках (20) матрицы A так, чтобы порядок элементов в правой части изменился на обратный. Таким образом, во вторых $2n$ системах единицы в правых частях перемещаются в начало вектора. Остается решить эти $2n$ системы, используя тот же алгоритм для новой матрицы A .

Важно отметить, что в дальнейшем нам понадобятся только первые $2n$ и последние $2n$ элементов решений \mathbf{y} и Z , полученных на первом и втором шагах алгоритма. Это связано с тем, что на третьем шаге алгоритма эти решения умножаются на матрицу V , в результате чего центральные элементы векторов решений зануляются.

На третьем шаге алгоритма необходимо решить систему $(E_r - VZ)\mathbf{z} = V\mathbf{y}$ с матрицей размера $r = 4n$. Обратить эту матрицу можно с помощью классического метода Гаусса.

На четвертом шаге алгоритма нет нужды находить весь вектор \mathbf{x} , поскольку для восстановления потенциала по формуле (14) нужно знать только одно значение $\dot{Y}_2(P, t)$, которое совпадает со значением последнего элемента вектора \mathbf{x} .

Алгоритм можно упростить и ускорить за счет того, что решение задачи экспоненциально затухает на правом краю области интегрирования. Благодаря этой особенности можно использовать весовые коэффициенты в формулах Грегори только на левом

краю. Тогда ранг матрицы R (15) будет в два раза меньше $r = 2n$, не нужно будет решать $2n$ систем с единицами в конце вектора правой части на втором шаге алгоритма, размерность матрицы, которую нужно обращать на третьем шаге алгоритма, также станет в два раза меньше.

Наиболее трудозатратной частью алгоритма является алгоритм типа Левинсона, используемый на первом и втором шагах алгоритма. Для его реализации необходимо выполнить $O(2^3 M^2)$ операций [24]. В результате применения алгоритма получаем значение потенциала в одной точке t . Однако на практике, как правило, необходимо восстанавливать потенциал на большом количестве точек N , тогда вычислительная сложность алгоритма будет уже порядка $O(NM^2)$. Чтобы повысить скорость вычислений на большом наборе точек, возьмем $M = N$ и для каждой точки $t_m = t_0 + m\tau$, $m = 0, \dots, M$, зададим область интегрирования размера mh , причем размер шага интегрирования h возьмем в два раза больше, чем шаг дискретизации потенциала τ . Тогда при переходе от точки t_m к $t_{m+1} = t_m + \tau$ размер области интегрирования увеличивается на один шаг $h = 2\tau$. В результате, если нарисовать область интегрирования для всего интервала t_0, \dots, t_M , она будет иметь вид треугольника. На рис. 2 показана область интегрирования для системы левых уравнений ГЛМ при переходе от ганкелева вида к тѐплицеву, а затем — переход к треугольной области интегрирования. Красным цветом показана линия, на которой расположены значения, которые используются для восстановления потенциала (14).

Посмотрим, как будет выглядеть матрица T (18) при таком способе дискретизации. Для $t = t_m$ размер области интегрирования $P_m = mh = 2m\tau$, поэтому элемент на главной диагонали матрицы T будет равен $\omega_0 = \Omega(2t_m - P_m) = \Omega(2t_0)$ для любого m . Таким образом, получаем набор из $M + 1$ линейной системы, матрицы которых вложены друг в друга. При решении системы (17) с матрицей максимальной размерности $M + 1$ с помощью описанного алгоритма автоматически будут последовательно найдены решения всех вложенных систем. При этом на каждом K -м шаге алгоритма Левинсона необходимо хранить r элементов вектора решения \mathbf{x}^{new} (21) K -й вложенной системы. Таким образом, самые трудозатратные первый и второй шаги нашего алгоритма достаточно реализовать один раз. Третий и четвертый шаги алгоритма выполняются независимо для каждой точки t_m .

Необходимо отметить, что при таком подходе для самых маленьких вложенных матриц нарушается условие $r \ll M$, поэтому для точек вблизи t_0 невозможно восстановить потенциал с высокой точностью. Точка t_m соответствует матрице размерности $2(m + 1)$, поэтому в расчетах для $m = 0, \dots, r/2 + 1$ потенциал восстанавливался по формуле

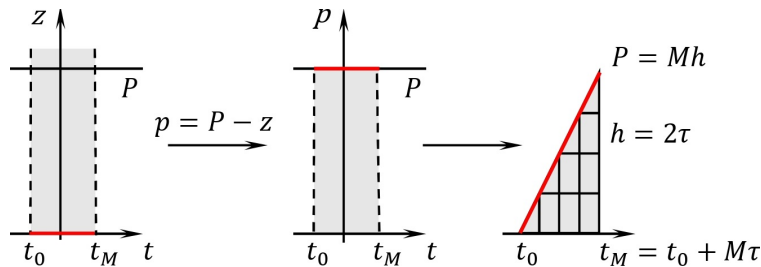


Рис. 2. Область интегрирования левых уравнений ГЛМ при переходе от ганкелева вида к тѐплицеву, а затем переход к треугольной области интегрирования

Fig. 2. The domain of integration of the left GLM equations during the transition from the Hankel form to the Toeplitz form, and then the transition to the triangular domain of integration

$q(t_m) = 2\sigma x^{new}[2(m+1)]$, где $x^{new}[2(m+1)]$ — последний элемент вектора \mathbf{x}^{new} (21). Для повышения точности в окрестности t_0 можно использовать процедуру расширения области интегрирования [10], т. е. добавлять некоторое количество фиктивных точек, сдвигая стартовую точку влево.

Идея треугольной области интегрирования используется в методе ТИВ [9], предложенном для решения уравнений ГЛМ применительно к брэгговским решеткам. Для брэгговской решетки ядро системы равно нулю при $t < t_0$, при $t = t_0$ ядро мало и возрастает в направлении t_M . Для таких задач треугольная область интегрирования не ведет к потере точности в окрестности t_0 . Более того, из-за нулевого ядра для $t < t_0$ матрицы линейной системы становятся треугольными, что значительно упрощает и ускоряет алгоритм решения системы. В работе [10] приведен более общий вариант метода — ГТИВ. В нем не используются предположения о занулении ядра, а для перехода тѐплицеву виду интегральных операторов используется другая замена переменных. Оба метода имеют второй порядок аппроксимации. Основное отличие описанного в данной статье метода НГТИВ заключается в том, что интегральные операторы аппроксимируются формулами Грегори, а не формулами правых прямоугольников, как в ГТИВ.

Алгоритм решения правых уравнений ГЛМ (4) описывается аналогично. При этом стартовой точкой для начала вычислений будет крайняя правая точка интервала t_M , а направление счета будет справа налево, т. е. значение в точке t_m будет вычисляться через решение в точке t_{m+1} .

2. Результаты расчетов

Рассмотрим результаты расчетов для схем, построенных с помощью предложенного подхода. Схемы, полученные на основе формул Грегори W_n (9) с весами только на левом краю области интегрирования, обозначим как G6, G7, G8, G9, в зависимости от того, сколько весовых коэффициентов $n = 6, 7, 8, 9$ входит в формулу Грегори. Схемы, в которых веса используются на обоих краях вычислительного интервала, обозначим как Gd6, Gd7, Gd8, Gd9. Результаты по схемам G6 и Gd6 представлены в работе [16], где они сравнивались со схемой ТИВ [9].

Потенциал $q(t)$ восстанавливался на интервале длиной L на равномерной сетке $t_m = -L/2 + \tau m$, $m = 0, \dots, M$, с шагом $\tau = L/M$. Часть сигнала на интервале $[-L/2, 0]$ восстанавливалась с помощью левых уравнений ГЛМ (3), а на интервале $(0, L/2]$ — с помощью правых уравнений (4). Каждая часть вычислительного интервала $L/2$ соответствует области интегрирования размера $P = L$ с шагом интегрирования $h = 2\tau$.

Погрешность $\epsilon(t)$ восстановления потенциала в точке t и среднеквадратичная погрешность $\text{RMSE}[q(t)]$ на расчетном интервале $[-L/2, L/2]$ вычислялись по формулам

$$\text{error}[q(t)] = \epsilon(t) = \frac{|q(t) - q^{exact}(t)|}{\max |q^{exact}(t)|}, \quad \text{RMSE}[q(t)] = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{j=0}^M \epsilon(t_j)^2}. \quad (22)$$

Расчеты проводились для традиционного модельного потенциала, имеющего вид чирпованного гиперболического секанса с амплитудой A и чирпом C

$$q(t) = A[\text{sech}(t)]^{1+iC}. \quad (23)$$

Аналитические выражения спектральных данных для того сигнала можно найти, например, в [25].

На рис. 3 для сравнения представлены схемы G6–G9 и Gd6–Gd9 в случае аномальной и нормальной дисперсии. На рис. 3 (слева) представлена среднеквадратичная погрешность (22) восстановления сигнала $q(t)$ (23) с параметрами $A = 5.2$, $C = 4$ в зависимости от числа отсчетов сигнала M . На рис. 3 (справа) изображена та же погрешность, но в зависимости от времени расчета. Графики погрешностей получены для аналитических спектральных данных.

Из рис. 3 видно, что схемы G6–G9, использующие весовые коэффициенты только на одном краю вычислительного интервала, сохраняют точность исходных схем Gd6–Gd9, но превосходят их в скорости вычислений. Наилучшая точность получена при использовании схем с девятью весовыми коэффициентами — G9 и Gd9, несмотря на наличие отрицательного весового коэффициента в формулах Грегори W_9 .

По результатам расчетов, представленных на рис. 3, получены значения порядка аппроксимации схем G6–G9. Порядок аппроксимации вычислялся по формуле

$$p = \log_2 \frac{\text{RMSE}^{(M)}[q(t)]}{\text{RMSE}^{(2M)}[q(t)]}, \quad (24)$$

показывающей изменение среднеквадратичной погрешности (22) восстановления сигнала $q(t)$ при увеличении числа отсчетов сигнала M в два раза. В таблице показан порядок аппроксимации в случае аномальной и нормальной дисперсии. Прочерки в таблице соответствуют ситуации, когда погрешность перестала уменьшаться.

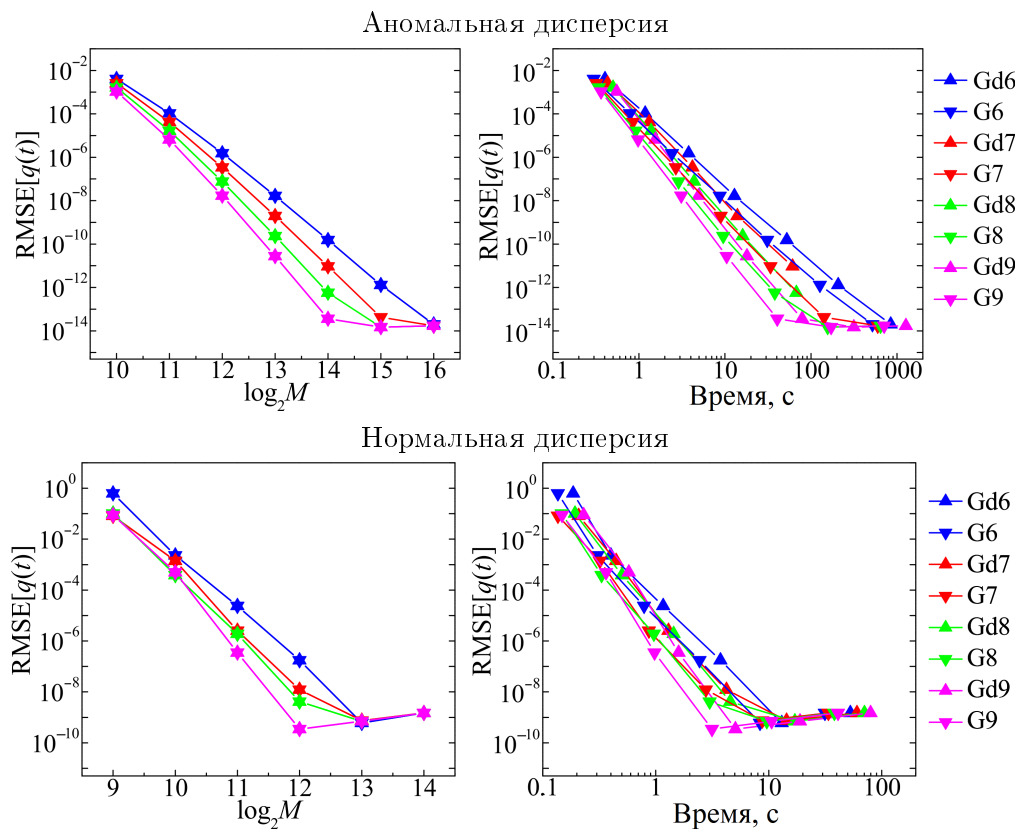


Рис. 3. Погрешность восстановления сигнала $q(t)$ в случае аномальной и нормальной дисперсии в зависимости от числа отсчетов сигнала M (слева) и времени расчета (справа)

Fig. 3. Error in signal reconstruction $q(t)$ in the case of anomalous and normal dispersion with respect to the number of signal samples M (left) and calculation time (right)

На рис. 4 показана среднеквадратичная погрешность (22) восстановления сигнала $q(t)$ (23) с параметрами $A = 5.2$, $C = 4$ и $C = 8$ в зависимости от числа отсчетов сигнала M . В качестве начальных данных использовались либо аналитические спектральные данные (сплошная линия), либо спектральные данные, вычисленные с помощью экспоненциальной схемы шестого порядка (ES6P4) [26] (штриховая линия с треугольниками). В случае нормальной дисперсии (рис. 4, справа) результаты, полученные для аналитических и вычисленных спектральных данных, совпадают. Увеличение чирпа C также незначительно влияет на результаты расчетов при нормальной дисперсии.

В случае аномальной дисперсии (рис. 4, слева) наличие дискретного спектра сильно влияет на вычислительный процесс. При небольшом чирпе $C = 4$ (синие и красные линии) погрешности восстановления сигнала с вычисленных спектральных данных начинают устанавливаться немного раньше, чем при аналитических данных. Увеличение чирпа до $C = 8$ (розовые и зеленые линии) приводит к более раннему установлению погрешности при использовании аналитических спектральных данных. При использовании вычисленных спектральных данных для $C = 8$ погрешность G6 незначительно ухудшается на грубых сетках, но при $M > 2^{13}$ погрешность перестает уменьшаться и устанавливается на достаточно высоком уровне $\sim 10^{-7}$. При этом схема G9 на вычисленных спектральных данных для $C = 8$ дает такие же результаты, что и схема G6. Для того чтобы схема G9 не теряла в точности, необходимо решать прямую задачу с девятым порядком точности, однако в настоящее время не существует численных методов решения прямой задачи ЗШ с точностью выше шестого порядка.

Порядок аппроксимации (24) для тестового примера на рис. 3
Approximation order (24) for the test example in Fig. 3

Аномальная дисперсия							Нормальная дисперсия				
Схема	$\log_2 M$						Схема	$\log_2 M$			
	10	11	12	13	14	15		9	10	11	12
G6	5.27	6.10	6.53	6.76	6.88	6.04	G6	8.09	6.60	7.09	8.16
G7	5.96	6.92	7.45	7.72	7.78	—	G7	5.88	9.12	7.70	—
G8	6.65	7.75	8.36	8.68	—	—	G8	8.06	7.65	8.85	—
G9	7.34	8.58	9.27	9.58	—	—	G9	7.48	10.47	9.98	—

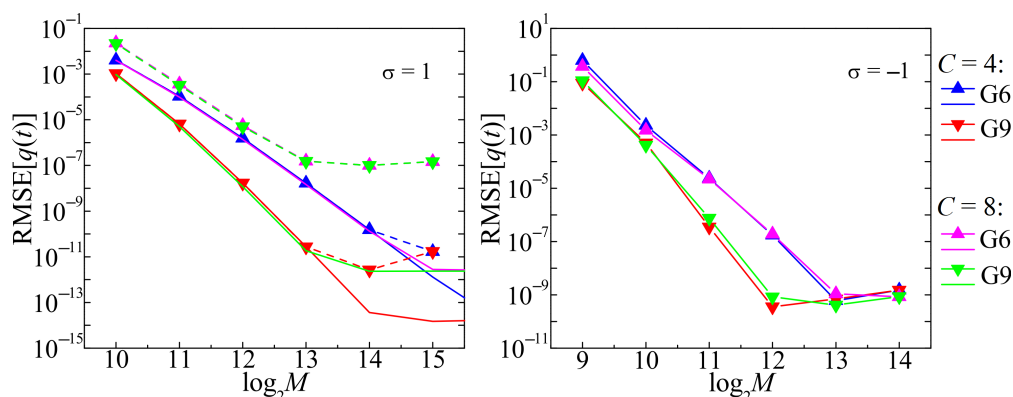


Рис. 4. Погрешность восстановления сигнала $q(t)$ (23) с параметрами $A = 5.2$, $C = 4$ и $C = 8$ в зависимости от числа отсчетов M . Слева — аномальная дисперсия. Справа — нормальная дисперсия

Fig. 4. Error in reconstructing signal $q(t)$ (23) with parameters $A = 5.2$, $C = 4$ and $C = 8$ with respect to the number of signal samples M . Left — anomalous dispersion. Right — normal dispersion

Таким образом, в случае $C = 4$ схема G9 дает значительно более точный результат по сравнению с известной схемой G6 даже при использовании спектральных данных, полученных с помощью схемы шестого порядка. В случае $C = 8$, при использовании вычисленных спектральных данных, схема G9 не дает выигрыша по сравнению с G6. Вычислительные проблемы, возникающие при восстановлении сильно chirпованного гиперболического секанса, описаны в работе [17].

Далее представим результаты расчетов для комбинированного метода Дарбу. В работе [15] предлагается комбинировать решение уравнений ГЛМ и преобразование Дарбу для восстановления сигнала, содержащего непрерывный и дискретный спектры. Комбинированный метод Дарбу состоит из трех шагов:

- строится бессолитонный сигнал с помощью решения системы уравнений ГЛМ;
- решается прямая задача для этого сигнала и каждого собственного значения исходного сигнала;
- добавляются солитоны к бессолитонному сигналу с использованием волновых функций, полученных на втором шаге метода.

Этот алгоритм выглядит очень многообещающим, поскольку решение уравнений ГЛМ при наличии солитонов страдает от численной неустойчивости. Это связано с тем, что матрицы соответствующих линейных систем становятся плохообусловленными из-за экспоненциальных зависимостей, возникающих в ядре при наличии дискретного спектра. В комбинированном методе Дарбу уравнения ГЛМ используются для восстановления сигнала только по непрерывному спектру, в то время как солитоны добавляются при помощи преобразования Дарбу. Однако при таком подходе на втором шаге необходимо решать прямую задачу ЗШ, что может вызывать вычислительные проблемы.

В работе [17] показано, что для эффективной работы комбинированного метода Дарбу критически важно использование высокоточных методов для восстановления сигнала по непрерывному спектру. В частности, показано, что при использовании метода второго порядка точности для решения обратной задачи комбинированный метод Дарбу может проигрывать методу решения уравнения ГЛМ по полному нелинейному спектру. Также показана ситуация, когда недостаточно точно вычисленные хвосты сигнала несущественно влияют на точность решения при использовании уравнения ГЛМ, но сильно портят результат при использовании метода Дарбу, где такой неточный сигнал используется при решении прямой задачи.

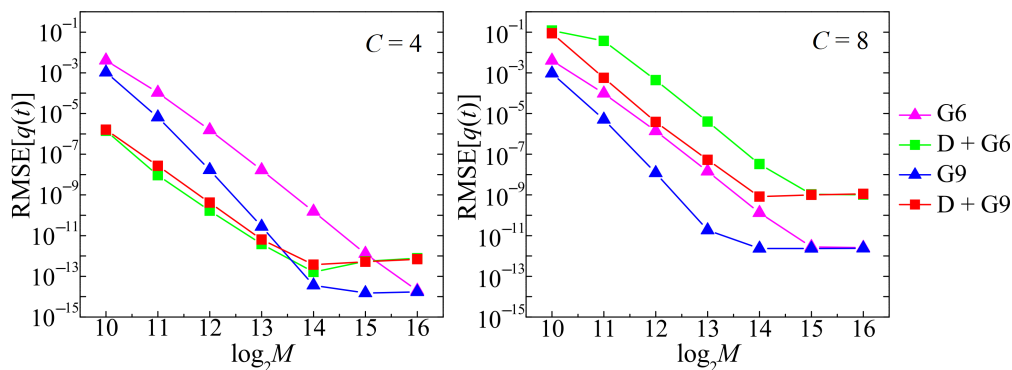


Рис. 5. Сравнение с комбинированным методом Дарбу. Погрешность восстановления сигнала $q(t)$ (23) в зависимости от числа отсчетов M при $A = 5.2$

Fig. 5. Comparison with the combined Darboux method. Error in reconstructing signal $q(t)$ (23) with respect to the number of signal samples M for $A = 5.2$

На рис. 5 представлено сравнение схем G6 и G9 с комбинированным методом Дарбу (D), в котором на первом шаге также используются эти схемы, а на втором шаге, для решения прямой задачи, применяется схема шестого порядка ES6P4 [26]. На рис. 5 показана среднеквадратичная погрешность (22) восстановления сигнала $q(t)$ (23) с параметрами $A = 5.2$, $C = 4$ и $C = 8$ в зависимости от числа отсчетов сигнала M . Спектральные данные заданы в аналитическом виде. Видно, что комбинированный метод Дарбу позволяет получить только шестой порядок точности, несмотря на использование схемы G9 на первом шаге. Это объясняется тем, что метод Дарбу требует решения прямой задачи Захарова – Шабата, для которой неизвестны методы выше шестого порядка точности. В результате для $C = 4$ на мелкой сетке ($M \geq 2^{14}$) схема G9 позволяет получить более точное решение, чем комбинированный метод Дарбу.

С увеличением чирпа C погрешность комбинированного метода Дарбу резко возрастает [17]. При $C = 8$ использование схемы G9 вместо G6 в методе Дарбу позволяет на два порядка улучшить точность решения задачи (при $M \leq 2^{14}$). Тем не менее при $C = 8$ восстановление сигнала решением уравнений ГЛМ с помощью схемы G9 является наиболее точным. По времени работы схемы G6 и G9 практически не отличаются от комбинированного метода Дарбу на основе этих схем.

Заключение

Подход к повышению порядка аппроксимации уравнений Гельфанда – Левитана – Марченко с помощью квадратурных формул Грегори, предложенный в [16], использован для решения обратной задачи Захарова – Шабата с девятым порядком точности (схема G9). Показано, что даже при решении прямой задачи с шестым порядком схема G9 позволяет значительно повысить точность решения задачи в случае нормальной дисперсии и для некоторых примеров в случае аномальной дисперсии. Также показано, что схема G9 может успешно применяться в комбинированном методе Дарбу. Однако для полноценного применения схемы G9 в методе обратной задачи рассеяния необходимы схемы аналогичной точности для прямой задачи Захарова – Шабата.

Благодарности. Исследование Медведева С.Б. и Федорука М.П. выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 25-61-00010, <https://rscf.ru/project/25-61-00010/>). Исследование Васевой И.А. выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки России для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий.

Список литературы

- [1] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–deVries equation. *Physical Review Letters*. 1967; (19):1095–1097. DOI:10.1103/PhysRevLett.19.1095.
- [2] Zakharov V.E., Shabat A.B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one dimensional self-modulation of waves in non-linear media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1972; 34(1):62–69.
- [3] Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1968; 21(5):467–490. DOI:10.1002/cpa.3160210503.

- [4] **Карпман В.И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука; 1973: 176.
- [5] **Медведев С.Б., Васева И.А., Чеховской И.С., Федорук М.П.** О численных алгоритмах решения прямой и обратной задач рассеяния системы Захарова – Шабата. Вычислительные технологии. 2023; 28(3):60–83. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.005.
- [6] **Lamb G.L.** Elements of soliton theory. Wiley; 1980: 304.
- [7] **Xiao G.B., Yashiro K.** An efficient algorithm for solving Zakharov – Shabat inverse scattering problem. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2002; (50):807–811.
- [8] **Ahmad F., Razzagh M.** A numerical solution to the Gel’fand–Levitan–Marchenko equation. Applied Mathematics and Computation. 1998; (89):31–39.
- [9] **Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method of the fiber Bragg grating synthesis. Journal of the Optical Society of America B. 2007; 24(7):1451–1457. DOI:10.1364/JOSAB.24.001451.
- [10] **Medvedev S.B., Vaseva I.A., Fedoruk M.P.** Block Toeplitz inner-bordering method for the Gelfand–Levitan–Marchenko equations associated with the Zakharov–Shabat system. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2023; 31(2):191–202. DOI:10.1515/jiip-2022-0072.
- [11] **Bruckstein A.M., Levy B.C., Kailath T.** Differential methods in inverse scattering. SIAM Journal on Applied Mathematics. 1985; 45(2):312–335. DOI:10.1137/014501.
- [12] **Rosenthal A., Horowitz M.** Inverse scattering algorithm for reconstructing strongly reflecting fiber Bragg gratings. IEEE Journal of Quantum Electronics. 2003; (39):1018–1026. DOI:10.1109/jqe.2003.814365.
- [13] **Aref V.** Control and detection of discrete spectral amplitudes in nonlinear Fourier spectrum. arXiv preprint. 2016: 1605.06328.
- [14] **Vaibhav V.** Fast inverse nonlinear Fourier transform. Physical Review E. 2018; 98(1):013304. DOI:10.1103/PhysRevE.98.013304.
- [15] **Aref V., Le S.T., Buelow H.** Modulation over nonlinear Fourier spectrum: continuous and discrete spectrum. Journal of Lightwave Technology. 2018; 36(6):1289–1295.
- [16] **Medvedev S.B., Vaseva I.A., Fedoruk M.P.** High-order block Toeplitz inner-bordering method for solving the Gelfand–Levitan–Marchenko equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2024; (138):108255. DOI:10.1016/j.cnsns.2024.108255.
- [17] **Medvedev S.B., Vaseva I.A., Fedoruk M.P.** On the combined method for solving the inverse problem of the Zakharov–Shabat system. Preprint. 2025. DOI:10.2139/ssrn.5177756.
- [18] **Hamming R.** Numerical methods for scientists and engineers. McGraw-Hill; 1962: 411.
- [19] **Phillips G.M.** Gregory’s method for numerical integration. The American Mathematical Monthly. 1972; 79(3):270–274.
- [20] **Fornberg B., Reeger J.A.** An improved Gregory-like method for 1-D quadrature. Numerische Mathematik. 2019; 141(1):1–19. DOI:10.1007/s00211-018-0992.
- [21] **Половинкин В.И., Половинкина Л.В.** Последовательности типа Грегори с неотрицательными коэффициентами. Вычислительные технологии. Специальный выпуск, посвященный 50-летию Красноярского государственного технического университета. 2005; (10):84–89.
- [22] **Hager W.W.** Updating the inverse of a matrix. SIAM Review. 1989; 31(2):221–239. DOI:10.1137/1031049.
- [23] **Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.** Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука; 1987: 319.

- [24] **Воеводина С.Н.** Решение системы уравнений с клеточно-теплицевыми матрицами. Вычислительные методы и программирование. 1975; (24):94–100.
- [25] **Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.** Exponential fourth order schemes for direct Zakharov–Shabat problem. Optics Express. 2020; 28(1):20–39. DOI:10.1364/OE.377140.
- [26] **Medvedev S., Chekhovskoy I., Vaseva I., Fedoruk M.** Fast sixth-order algorithm based on the generalized Cayley transform for the Zakharov–Shabat system associated with nonlinear Schrodinger equation. Journal of Computational Physics. 2022; (448):110764. DOI:10.1016/j.jcp.2021.110764.

Вычислительные технологии, 2025, том 30, № 4, с. 90–107. © ФИЦ ИВТ, 2025
Computational Technologies, 2025, vol. 30, no. 4, pp. 90–107. © FRC ICT, 2025

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.009

On a high precision method for solving the inverse problem of the Zakharov–Shabat system

S. B. MEDVEDEV^{1,*}, I. A. VASEVA^{1,2}, M. P. FEDORUK^{2,1}

¹Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Sergey B. Medvedev, e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Received May 28, 2025, revised June 11, 2025, accepted June 27, 2025.

Abstract

The inverse scattering transform (IST) method allows integrating the nonlinear Schrödinger equation (NLSE), thereby obtaining information about the structure of the solution and the presence of solitons. NLSE is widely used, in particular, in nonlinear fiber optics, since it describes the pulse propagation in optical fiber.

The paper presents a numerical method for solving the inverse Zakharov–Shabat (ZS) problem, which is a part of the IST method for the NLSE. It is described using the Gelfand–Levitan–Marchenko system of equations. The method allows increasing the accuracy of solving the inverse ZS problem to the ninth order (G9 scheme), while maintaining quadratic computational complexity. The method is based on the block version of the Toeplitz Inner-Bordering algorithm of Levinson’s type. To approximate integrals, the high-precision one-sided and two-sided Gregory quadrature formulas are used, while an efficient computational algorithm employs the Woodbury formula.

The main objective of the paper is to study how increasing the accuracy of the inverse problem affects the accuracy of the IST method, provided that there are no known methods higher than the sixth order of approximation for the direct problem. Numerical experiments have shown that solving a direct problem even with the sixth order of approximation, the G9 scheme allows to significantly increase the accuracy of the solution of the problem in the case of normal dispersion and for some examples in the case of anomalous dispersion. It is also shown that the G9 scheme can be successfully applied in the combined Darboux method. However, to fully utilize the G9 scheme in the IST method, schemes of similar accuracy for the direct ZS problem are required.

The development of efficient methods for implementing the IST method will be useful for modelling soliton data transmission systems, as well as for signal processing and coding.

Keywords: inverse scattering transform, nonlinear Schrödinger equation, Zakharov–Shabat problem, Gelfand–Levitan–Marchenko equations, nonlinear Fourier transform.

Citation: Medvedev S.B., Vaseva I.A., Fedoruk M.P. On a high precision method for solving the inverse problem of the Zakharov–Shabat system. Computational Technologies. 2025; 30(4):90–107. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.009. (In Russ.)

Acknowledgements. The research of Medvedev S.B. and Fedoruk M.P. was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 25-61-00010, <https://rscf.ru/project/25-61-00010/>). The research of Vaseva I.A. was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia for the Federal Research Center for Information and Computational Technologies.

References

1. **Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.** Method for solving the Korteweg–deVries equation. Physical Review Letters. 1967; (19):1095–1097. DOI:10.1103/PhysRevLett.19.1095.
2. **Zakharov V.E., Shabat A.B.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one dimensional self-modulation of waves in non-linear media. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1972; 34(1):62–69.
3. **Lax P.D.** Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968; 21(5):467–490. DOI:10.1002/cpa.3160210503.
4. **Karpman V.I.** Nelineynye volny v dispergiruyushchikh sredakh [Nonlinear waves in dispersive media]. Moscow: Nauka; 1973: 176. (In Russ.)
5. **Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.** On numerical algorithms for solving the direct and inverse scattering problem of the Zakharov–Shabat system. Computational Technologies. 2023; 28(3):60–83. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.005. (In Russ.)
6. **Lamb G.L.** Elements of soliton theory. Wiley; 1980: 304.
7. **Xiao G.B., Yashiro K.** An efficient algorithm for solving Zakharov–Shabat inverse scattering problem. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2002; (50):807–811.
8. **Ahmad F., Razzagh M.** A numerical solution to the Gelfand–Levitan–Marchenko equation. Applied Mathematics and Computation. 1998; (89):31–39.
9. **Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method of the fiber Bragg grating synthesis. Journal of the Optical Society of America B. 2007; 24(7):1451–1457. DOI:10.1364/JOSAB.24.001451.
10. **Medvedev S.B., Vaseva I.A., Fedoruk M.P.** Block Toeplitz inner-bordering method for the Gelfand–Levitan–Marchenko equations associated with the Zakharov–Shabat system. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2023; 31(2):191–202. DOI:10.1515/jiip-2022-0072.
11. **Bruckstein A.M., Levy B.C., Kailath T.** Differential methods in inverse scattering. SIAM Journal on Applied Mathematics. 1985; 45(2):312–335. DOI:10.1137/014501.
12. **Rosenthal A., Horowitz M.** Inverse scattering algorithm for reconstructing strongly reflecting fiber Bragg gratings. IEEE Journal of Quantum Electronics. 2003; (39):1018–1026. DOI:10.1109/jqe.2003.814365.
13. **Aref V.** Control and detection of discrete spectral amplitudes in nonlinear Fourier spectrum. arXiv preprint. 2016: 1605.06328.
14. **Vaibhav V.** Fast inverse nonlinear Fourier transform. Physical Review E. 2018; 98(1):013304. DOI:10.1103/PhysRevE.98.013304.
15. **Aref V., Le S.T., Buelow H.** Modulation over nonlinear Fourier spectrum: continuous and discrete spectrum. Journal of Lightwave Technology. 2018; 36(6):1289–1295.
16. **Medvedev S.B., Vaseva I.A., Fedoruk M.P.** High-order block Toeplitz inner-bordering method for solving the Gelfand–Levitan–Marchenko equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2024; (138):108255. DOI:10.1016/j.cnsns.2024.108255.
17. **Medvedev S.B., Vaseva I.A., Fedoruk M.P.** On the combined method for solving the inverse problem of the Zakharov–Shabat system. Preprint. 2025. DOI:10.2139/ssrn.5177756.
18. **Hamming R.** Numerical methods for scientists and engineers. McGraw-Hill; 1962: 411.
19. **Phillips G.M.** Gregory’s method for numerical integration. The American Mathematical Monthly. 1972; 79(3):270–274.
20. **Fornberg B., Reeger J.A.** An improved Gregory-like method for 1-D quadrature. Numerische Mathematik. 2019; 141(1):1–19. DOI:10.1007/s00211-018-0992.

21. **Polovinkin V.I., Polovinkina L.V.** Gregory-type sequences with non-negative coefficients. *Journal of Computational Technologies. Special Issue Dedicated to the 50th Anniversary of Krasnoyarsk State Technical University.* 2005; (10):84–89. (In Russ.)
22. **Hager W.W.** Updating the inverse of a matrix. *SIAM Review.* 1989; 31(2):221–239. DOI:10.1137/1031049.
23. **Voevodin V.V., Tyrtyshnikov E.E.** Vychislitel'nye protsessy s teplitsevymi matritsami [Computational processes with Toeplitz matrices]. Moscow: Nauka; 1987: 319. (In Russ.)
24. **Voevodina S.N.** Solution of a system of equations with block-Toeplitz matrices. *Numerical Methods and Programming.* 1975; (24):94–100. (In Russ.)
25. **Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.** Exponential fourth order schemes for direct Zakharov–Shabat problem. *Optics Express.* 2020; 28(1):20–39. DOI:10.1364/OE.377140.
26. **Medvedev S., Chekhovskoy I., Vaseva I., Fedoruk M.** Fast sixth-order algorithm based on the generalized Cayley transform for the Zakharov–Shabat system associated with nonlinear Schrodinger equation. *Journal of Computational Physics.* 2022; (448):110764. DOI:10.1016/j.jcp.2021.110764.