

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ БЕЗУДАРНОГО СИЛЬНОГО СЖАТИЯ ОДНОМЕРНЫХ СЛОЕВ ГАЗА

Ю. В. НИКОЛАЕВ

Уральский государственный университет путей сообщения

Екатеринбург, Россия

e-mail: YNikolaev@math.usart.ru

The results of numerical calculations of shock-free compression of plane and spherical ideal gas layers to the density, which is in $10^7 - 10^8$ times higher than the initial density of homogeneous gas at rest, are presented. For the plane symmetry the well-known solution (interfacing of the centralized wave and the homogeneous flow) is accurately restored. From the inside compression of spherical layers, when the analytical solution is represented by locally converging series, the constraints on the initial width of the layer, which can be compressed shock-free, are found. The calculations make it possible to restore the trajectory of the piston, which performs the required compression.

Математическое описание процесса безударного изэнтропического сжатия идеального газа до любого наперед заданного значения плотности, в том числе до бесконечной плотности (подробную библиографию см. в [1]) представляет интерес в связи с проблемой лазерного термоядерного синтеза [2, 3]. В случае плоскосимметричных течений ($\nu = 0$) простая центрированная волна Римана описывает сжатие плоского слоя газа в конечный момент времени $t = t_*$ до бесконечной плотности [4]. Состыковка центрированной волны Римана с однородным потоком газа дает решение задачи о получении в сжатом плоском слое любого конечного значения плотности [5]. В [6] приведены результаты расчетов центрированной волны Римана с использованием вычислительного комплекса “Тигр”, который хорошо себя зарекомендовал на протяжении тридцати лет при решении широкого класса прикладных задач. В расчетах из работы [6] максимально достигнутое значение плотности в $3 \cdot 10^4$ раз превышает исходную плотность. При этом среднее значение плотности в центрированной волне равно $8 \cdot 10^3$.

В [1] разработана математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. В частности, для случая сжатия цилиндрически $\nu = 1$ и сферически $\nu = 2$ симметричных слоев политропного газа с показателем $\gamma > 1$ доказано, что непрерывная состыковка двух течений дает решение задачи о безударном сильном сжатии до любой наперед заданной плотности.

Первое из этих двух течений является обобщением центрированной волны Римана. Не только доказано существование этого течения, но и приведен бесконечный сходящийся

ряд, описывающий его. Проанализирована структура коэффициентов ряда, что позволило получить, обосновать [1] и уточнить [7] асимптотические законы движения сжимающего поршня, а также строго описать особенность течения в момент сильного сжатия.

Второе из течений является решением задачи о получении наперед заданных распределений газодинамических параметров [1, 8]. Это течение через звуковую характеристику примыкает к обобщению центрированной волны Римана и особенностей не имеет. При этом в качестве наперед заданного распределения произвольно можно задавать либо плотность, либо скорость газа. Второй из этих газодинамических параметров в момент сильного сжатия и все течение до момента сжатия определяются однозначно, как решение характеристической задачи Коши стандартного вида [1, 9]. Доказанные в [1] теоремы утверждают, что существуют цилиндрические и сферические слои с ненулевой массой газа, которые можно безударно сжать до любой плотности. Однако эти теоремы не позволяют определить ширину исходных слоев, которые при фиксированных ν, γ можно безударно сжать до заданной плотности ρ_* .

В работе [10] предложен алгоритм расчета безударного сильного сжатия одномерных слоев первоначально однородного и покоящегося газа с $\rho_0 = 1$ до любой наперед заданной конечной постоянной плотности $\rho_* > 1$. В настоящей работе представлены результаты расчетов на ЭВМ, основанных на алгоритме из работы [10].

Пусть фоновое течение, по которому распространяется волна сжатия, отделенная от него звуковой характеристикой, является однородным покоем. Тогда все рассматриваемые течения в газе будут изэнтропическими.

С учетом этого система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_t + u\sigma_r + \frac{\gamma - 1}{2}\sigma u_r &= -\nu \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sigma u}{r}, \\ u_t + \frac{2}{\gamma - 1}\sigma\sigma_r + uu_r &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2} \geq 0$; $\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}$ — скорость звука; ρ — плотность; γ — константа в

уравнении состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$, $\gamma > 1$, p — давление; $\mathbf{U} = (\sigma, u)$ — искомые функции. При $\nu = 2$ u — проекция вектора скорости газа \mathbf{V} в точке $M \in \mathbf{R}^3$ на радиус-вектор этой точки в \mathbf{R}^3 и предполагается, что \mathbf{V} параллелен этому радиус-вектору; при $\nu = 1$ u — проекция \mathbf{V} на радиус-вектор этой точки в \mathbf{R}^2 , причем проекция \mathbf{V} на ось Ox_3 считается равной нулю; при $\nu = 0$ u — проекция \mathbf{V} на ось Ox_1 и равны нулю проекции \mathbf{V} на другие декартовы оси.

Скорость газа u и плотность ρ — безразмерные величины. За единицу скорости берется скорость звука c в покоящемся газе, а за единицу плотности — плотность несжатого газа, т. е. сжатие происходит в число раз, равное ρ_* . Переменные r, t также являются безразмерными величинами, а их масштабные величины подбираются так, чтобы $r_* = 1$ и $t_* = 1$. Здесь r_* — расстояние от точки $r = 0$ до точки, в которой в момент времени t_* наступает особенность в обобщении центрированной волны (рис. 1). Ниже линии 1 лежит область однородного покоящегося газа, между линиями 1, 2 — область искомой волны сжатия. Требуется найти траекторию поршня, безударно сжимающего однородный покоящийся газ с $\rho = 1$ до плотности $\rho = \rho_*$, постоянной в сжатом слое (рис. 2).

Теоремы, доказанные в [1, 8], утверждают, что существует ненулевая масса газа m_0 ($|r_p - r_*| > 0$), которую можно безударно сжать до любой наперед заданной плотности $\rho_*(r)$. Но эти теоремы не определяют максимально возможное значение m_0 .

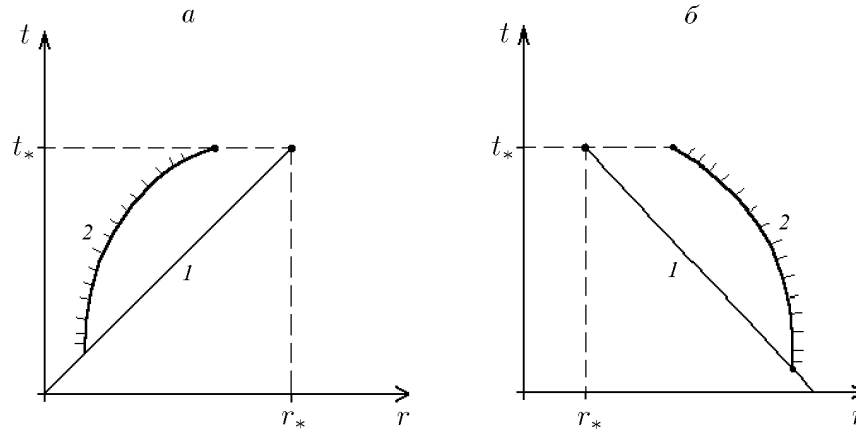


Рис. 1. Конфигурация течений при сжатии слоя газа изнутри (а) и снаружи (б): 1 — траектория звуковой характеристики, 2 — траектория поршня.

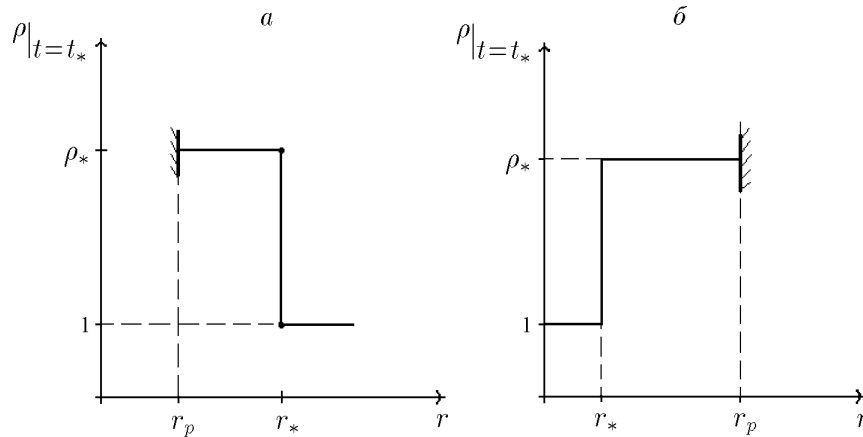


Рис. 2. Распределение плотности газа в момент $t = t_*$ при сжатии слоя изнутри (а) и снаружи (б): r_p — координата сжимающего поршня в этот момент времени.

Цель данных исследований безударного сильного сжатия — определение численными методами ширины d_0 исходного несжатого слоя, который можно сжать безударно. Под безударностью понимается то, что в течении не возникают ударные волны, вызванные пересечением характеристик одного семейства.

Расчеты производятся стандартным методом характеристик с пересчетом [11]. Приведем краткое описание алгоритма расчета (подробности см. в [10]). Все происходит в пространстве независимых переменных t, r . Поскольку в точке $(t = t_*, r = r_*)$ имеет место скачок плотности от $\rho = 1$ до $\rho = \rho_*$ (рис. 2), то из этой точки выпускаются n характеристик C^+ при сжатии изнутри (или C^- при сжатии снаружи). Каждая характеристика имеет свой наклон, определяемый своей скоростью звука $1 \leq \sigma_i \leq \sigma_*$ и своим [1] значением скорости газа

$$u_i = \pm \frac{2}{(\gamma - 1)} (\sigma_i - 1).$$

Затем из точек, лежащих на характеристике, отделяющей однородный покой и искомую волну сжатия (линия 1 на рис. 1), с интервалом Δt при изменении t в обратном направлении выпускаются характеристики другого семейства (при сжатии изнутри — ха-

рактеристики C^- , при сжатии снаружи — характеристики C^+). В точках пересечения характеристик разных семейств стандартным образом рассчитываются значения σ и u . Из точек пересечения рассчитанных характеристик одного семейства с прямой $t = t_*$ выпускаются новые характеристики другого семейства, уже не выходящие из точки $(t = t_*, r = r_*)$. Таким образом вычисляются значения газодинамических параметров в некоторой области. Затем в этой области строится траектория сжимающего поршня.

Входными параметрами вычислительного алгоритма являются числа n и Δt , от них зависит точность расчетов, которая проверяется как совпадение масс газа в сжатом и несжатом слоях. Во всех рассчитанных вариантах в случае $\nu = 0$ известное составное решение [5] этим алгоритмом восстанавливалось точно. Ниже приводятся результаты нескольких вариантов расчетов для случая сжатия слоя газа изнутри при $\nu = 2$ ($d_0 = 1 - r_0$ — ширина исходного слоя однородного покоящегося газа; $m_* = 3.68$ — масса газа в сжатом слое; $\Delta m = |m_0 - m_*|/m_*$; m_0 — масса газа в исходном слое).

γ	n	Δt	ρ_*	$\max u _{t=t_*}$	d_0	Δm
1.4	100000	0.001	10^8	245	0.5	0.0041
1.5	100000	0.001	10^8	396	0.5	0.0075
5/3	200000	0.001	10^8	1392	0.5	0.006
2	200000	0.0001	10^8	20000	0.5	0.06

Отметим, что результаты расчетов получены при неравномерном разбиении отрезка $[1, \sigma_*]$ точками σ_i , которые сгущались возле $\sigma = 1$. При равномерном распределении точек σ_i на указанном отрезке получались значения $d_0 = 0.2$.

Для иллюстрации работы алгоритма и большей наглядности на рис. 3, 4 приведены результаты расчета не очень сильного ($\rho_* = 8$) сжатия сферического слоя газа. При больших значениях ρ_* ширина сжатого слоя ($r_p - r_*$) очень мала и на рисунках практически не видна.

По полученным результатам расчетов можно сделать некоторые выводы.

Для случая сжатия изнутри удалось рассчитать траекторию поршня, сжимающего сферический слой шириной 0.5. Для слоя большей ширины расчеты показывают пересечение

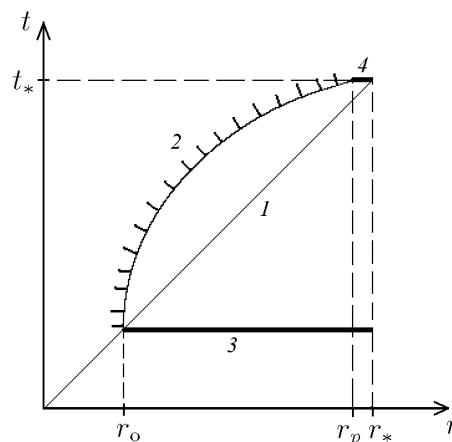


Рис. 3. Конфигурация рассчитанного течения при $\rho_* = 8$, $\nu = 2$, $\gamma = 1.4$: 1 — звуковая характеристика, 2 — траектория поршня, 3 — исходный слой газа, 4 — сжатый слой газа.

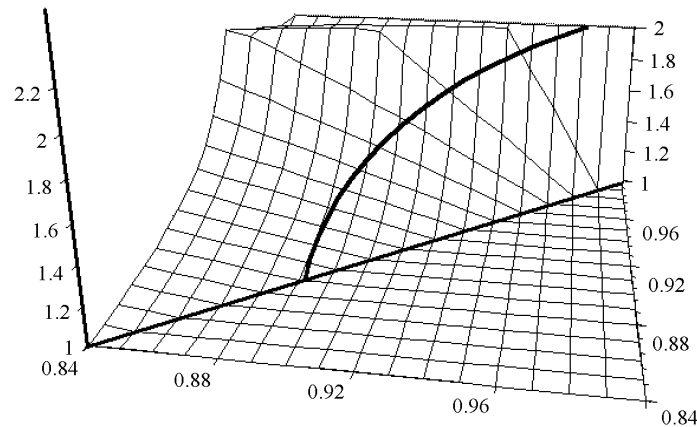


Рис. 4. Распределение скорости звука $\sigma = \sigma(t, r)$ при $\rho_* = 8$, $\nu = 2$, $\gamma = 1.4$.

характеристик одного семейства. Возможно, что это возникает из-за ограничения разрядной сетки компьютера, не позволяющей считать с еще более мелкими ячейками характеристической сетки, и при ее увеличении подобными расчетами можно будет приблизиться к линии $r = 0$. Заметим также, что при $r = 0$ в системе уравнений газовой динамики имеется математическая особенность. Возможно, что наличие этой особенности также не позволило рассчитать сжатие изнутри слоя большей ширины.

При безударном сжатии слоя газа снаружи до $\rho_* = 10^8$ ширина несжатого слоя была вычислена до значения $d_0 = 10$. Сопоставляя это с результатами других работ (см. например [12–14]), можно предположить, что при увеличении d_0 рассчитанное течение становится близким к автомодельному [15], которое описывает сжатие на ось или в центр симметрии и не имеет ограничений на d_0 .

Автор выражает своему научному руководителю профессору С. П. Баутину признательность за внимание и помощь.

Список литературы

- [1] БАУТИН С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.
- [2] ЗАБАБАХИН Е. И., ЗАБАБАХИН И. Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
- [3] НАККОЛС Дж. Г. Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза // Успехи физ. наук. 1984. Т. 143, №3. С. 467–482.
- [4] СТАНИУКОВИЧ К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. 1955.
- [5] МИЗЕС Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит. 1961.
- [6] АНУЧИН М. Г. Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя // ПМТФ. 1998. Т. 39, №4. С. 25–32.

- [7] БАУТИН С. П. Асимптотические законы безударного сильного сжатия квазиодномерных слоев газа // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 415–423.
- [8] БАУТИН С. П. О задаче получения наперед заданных распределений параметров газа // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 6. С. 938–946.
- [9] БАУТИН С. П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, №1. С. 2052–2063.
- [10] БАУТИН С. П., НИКОЛАЕВ Ю. В. Об одном методе расчета безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, №4. С. 3–12.
- [11] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б. Л., ЯНЕНКО Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
- [12] ЗАБАБАХИН И. Е., СИМОНЕНКО В. А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 3. С. 373–576.
- [13] КАЖДАН Я. М. К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // ПМТФ. 1977. №1. С. 23–30.
- [14] КРАЙКО А. Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 1000–1007.
- [15] СЕДОВ Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 5 января 2001 г.