Вычислительные технологии **Том 6, № 5, 2001**

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ*

Ю. В. Шанько
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия
e-mail: shanko@ksc.krasn.ru

For the equation $\psi_{xx} + \psi_{zz} = F(\psi)z + G(\psi)$ describing two-dimensional stationary flows of stratified fluid all kinds of the right-hand parts have been found under which the generalized separation of variables is allowed. The corresponding exact solutions have been constructed.

1. Постановка задачи

В настоящей работе ищутся некоторые классы частных решений уравнения, описывающего плоские стационарные течения стратифицированной жидкости [1]:

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = Fz + G, \tag{1}$$

где F и G — произвольные, достаточно гладкие функции от ψ.

Будем говорить, что уравнение (1) допускает обобщенное разделение переменных, если у него существует нетривиальное решение, представимое в виде

$$\psi = \theta(\mu(x) + \nu(z)). \tag{2}$$

Тривиальными считаются решения, зависящие только от x или только от z. Условие (2) использовалось ранее в [2].

Найдем все уравнения вида (1), допускающие обобщенное разделение переменных. В дальнейшем предполагается, что выполнены следующие условия: 1) $F \neq 0$; 2) уравнение (1) нелинейное, т.е. $F'' \neq 0$ или $G'' \neq 0$. Случай $F = 0$ рассмотрен в работах [2, 3].

Уравнение (1) допускает преобразования эквивалентности [5], порождаемые операторами

$$\begin{gathered} x\partial_x + z\partial_z - 3F\partial_F - 2G\partial_G, \\ \partial_z - F\partial_G,\ \partial_\psi,\ \psi\partial_\psi + F\partial_F + G\partial_G. \end{gathered} \tag{3}$$

Условие (2) инвариантно относительно преобразований эквивалентности (3).

*Работа выполнена в рамках Интеграционной программы фундаментальных исследований СО РАН при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки.

Сформулируем результат классификации, который будет обоснован ниже.

Теорема. *Уравнение (1), допускающее обобщенное разделение переменных, преобразованиями эквивалентности (3) приводится к одному из следующих типов:*

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = \psi \ln \psi + b\psi z, \tag{4}$$

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = \sin \psi + k \left(\cos \psi + \cos \frac{\psi}{2} \right) z, \tag{5}$$

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = \operatorname{sh} \psi + k \left(\operatorname{ch} \psi \pm \operatorname{ch} \frac{\psi}{2} \right) z, \tag{6}$$

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = 2\tau''\tau/\tau'^3 - 1/\tau' - 2\tau''/\tau'^3 z, \tag{7}$$

где $b, k \in R$, $\tau(\psi)$ — произвольная функция.

2. Исследование переопределенной системы

Переформулируем задачу в терминах новых независимых переменных z, ψ и новых неизвестных функций A, C. Введем неизвестные функции $A(z,\psi)$ и $C(z,\psi)$ посредством уравнений

$$\psi_x^2 + \psi_z^2 = C(z,\psi), \quad \psi_z = A(z,\psi). \tag{8}$$

Переход к новым независимым переменным корректен, поскольку якобиан

$$\frac{\partial(\psi, z)}{\partial(x, z)} = \psi_x \neq 0.$$

Условие совместности уравнений (8) задается соотношением

$$C_z - 2AA_z + C_\psi A - 2CA_\psi = 0. \tag{9}$$

Уравнение (1) будет выполняться в силу уравнений (8) тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2}C_\psi + A_z = F(\psi)z + G(\psi). \tag{10}$$

Условие (2) эквивалентно соотношению

$$A = L(\psi)M(z), \tag{11}$$

где L — суперпозиция производной функции θ и функции, обратной к ней, $L = \theta' \circ \theta^{-1}$, а $M = \nu'$.

Пусть функции $P(\psi)$, $S(\psi)$ и $T(\psi)$ таковы, что $F = P'$, $G = S'$, $L = T'$. Так как нас интересуют только нетривиальные решения, то из условия $\psi_z = A \neq 0$ следует, что $M \neq 0$, $T' \neq 0$.

Интегрируя соотношение (10), в силу (11) находим

$$C = 2(-TM' + Pz + S + N(z)).$$

Подставляя C и A в соотношение (9), получим уравнение

$$2MM'(TT'' - T'^2) - M''T + Mz(P'T' - 2PT'') + M(S'T' - 2ST'') + N' - 2T''MN + P = 0, \tag{12}$$

которое является суммой семи попарных произведений функций от z и ψ.

Теперь переходим к решению уравнения (12). При его решении будет возникать множество частных случаев. Задача данного параграфа состоит в том, чтобы уравнение (12) свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, связывающим функции P, T, S или M, N.

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — набор k-функций одной независимой переменной. Обозначим через $\rho(f_1, \ldots, f_k)$ максимальное число линейно независимых функций среди $f_1, \ldots, f_k$. Для существования решения уравнения (12) необходимо, чтобы $\rho(Z)+\rho(\Psi) \leq 7$, где через Z и Ψ обозначены соответствующие наборы функций из соотношения (12): $Z = \{MM', M'', Mz, M, N', MN, 1\}$ и $\Psi = \{TT'' - T'^2, T, P'T' - 2PT'', S'T' - 2ST'', 1, T'', P\}$. Отсюда следует, что либо $\rho(Z)$, либо $\rho(\Psi)$ не превышает 3.

Пусть $\rho(Z)$ меньше либо равен 3. Возможны два случая: 1) функции $Mz, M, 1$ являются линейно зависимыми, т.е. $\gamma_1 Mz + \gamma_2 M + \gamma_3 = 0$, где γ_1, γ_2, γ_3 — константы, не все равные 0; 2) все функции системы выражаются через функции Mz, M, 1.

Первый случай включает два варианта. Либо $\gamma_1 = 0$, тогда $M = \alpha$, либо $\gamma_1 \neq 0$, что влечет $M = \alpha/(z-\beta)$. Здесь α, β — некоторые константы.

Пусть $M = \alpha$, тогда $\rho(Z)$ будет равен $\rho(Z_1)$, где $Z_1 = \{z, N', N, 1\}$. Следовательно, либо $N = \beta z + \gamma$ и $\rho(Z_1) = 2$ (случай $Z1$), либо N' линейно выражается через N, z, 1, т. е. $N' = \delta N + \beta z + \gamma$ (δ, β, γ — константы) и $\rho(Z_1) = 3$ (случай $Z2$). Если же $M = \alpha/(z-\beta)$, то $\rho(Z) = \rho(Z_2)$, где $Z_2 = \{(z-\beta)^{-3}, (z-\beta)^{-1}, N', (z-\beta)^{-1}N, 1\}$. Так как максимальное число линейно независимых функций в Z_2 равно трем, то $(z-\beta)^{-1}N$ выражается через функции $(z-\beta)^{-3}$, $(z-\beta)^{-1}$, 1. Следовательно, $N = \gamma(z-\beta) + \delta + \varepsilon(z-\beta)^{-2}$. Тогда $N' = \gamma - 2\varepsilon(z-\beta)^{-3}$ тоже выражается через функции $(z-\beta)^{-3}$, $(z-\beta)^{-1}$, 1 (случай $Z3$).

Случай Z1. Подставив функции $M = \alpha$ и $N = \beta z + \gamma$ в (12), приходим к уравнению

$$\alpha z(P'T' - 2PT'') + \alpha(S'T' - 2ST'') + \beta - 2\alpha(\beta z + \gamma)T'' + P = 0.$$

Заметим, что поскольку $M \neq 0$, то и α отлична от нуля. Тогда в последнем уравнении, собирая коэффициенты при z и 1, получим равенства

$$P'T' - 2PT'' - 2\beta T'' = 0, \tag{13}$$

$$\alpha(S'T' - 2ST'') + \beta - 2\alpha\gamma T'' + P = 0. \tag{14}$$

Случай Z2. Подстановка функций $M = \alpha$ и $N' = \delta N + \beta z + \gamma$ в (12) дает уравнение

$$\alpha z(P'T' - 2PT'') + \alpha(S'T' - 2ST'') + \delta N \beta z + \gamma - 2\alpha N T'' + P = 0.$$

Аналогично предыдущему случаю, собирая коэффициенты при N, z и 1 и приравнивая их нулю, получим соотношения

$$\delta - 2\alpha T'' = 0, \tag{15}$$

$$\alpha(P'T' - 2PT'') + \beta = 0, \tag{16}$$

$$\alpha(S'T' - 2ST'') + \gamma + P = 0. \tag{17}$$

Случай Z3. Подстановка M и N в уравнение (12) дает соотношение

$$-2\alpha^2(z-\beta)^{-3}(TT'' - T'^2) - 2\alpha(z-\beta)^{-3}T + \alpha(1 + \beta(z-\beta)^{-1})(P'T' - 2PT'')+$$

$$+\alpha(z-\beta)^{-1}(S'T' - 2ST'') + (\gamma - 2\varepsilon(z-\beta)^{-3}) - 2\alpha(\gamma + \delta(z-\beta)^{-1} + \varepsilon(z-\beta)^{-3})T'' + P = 0.$$

Собирая коэффициенты при $(z-\beta)^{-3}$, $(z-\beta)^{-1}$ и 1 и приравнивая их нулю, получим уравнения

$$-2\alpha^2(TT''-T'^2)-2\alpha T-2\varepsilon-2\alpha\varepsilon T''=0, \tag{18}$$

$$\alpha\beta(P'T'-2PT'')+\alpha(S'T'-2ST'')-2\alpha\delta T''=0, \tag{19}$$

$$\alpha(P'T'-2PT'')+\gamma-2\alpha\gamma T''+P=0. \tag{20}$$

Пусть теперь функции Mz, M, 1 линейно независимы. Тогда должны быть выполнены следующие соотношения:

$$MM'=(a_1z+b_1)M+c_1, \tag{21}$$

$$M''=(a_2z+b_2)M+c_2, \tag{22}$$

$$MN=(a_3z+b_3)M+c_3, \tag{23}$$

$$N'=(a_4z+b_4)M+c_4. \tag{24}$$

Здесь a_i, b_i, c_i — некоторые константы. Дифференцируя уравнение (21) и вычитая уравнение (22), умноженное на M, получим соотношение

$$c_1M'=(a_1-c_2)M^2-(a_2z+b_2)M^3. \tag{25}$$

Аналогичные преобразования с уравнениями (23), (24) дают еще одно соотношение

$$c_3M'=(a_3-c_4)M^2-(a_4z+b_4)M^3. \tag{26}$$

Пусть $c_1=0$. Из уравнения (25) следует, что $(a_1-c_2)-(a_2z+b_2)M=0$. Поскольку функции Mz, M, 1 линейно независимы, то $c_2=a_1$, $a_2=b_2=0$. Разделив уравнение (21) на M и проинтегрировав, получим $M=a_1z^2/2+b_1z+\alpha$ (α — некоторая константа). Подставив последнее выражение для M в уравнение (26), получим

$$c_3(a_1z+b_1)=(a_3-c_4)(a_1z^2/2+b_1z+\alpha)^2-(a_4z+b_4)(a_1z^2/2+b_1z+\alpha)^3. \tag{27}$$

Если $a_1\neq 0$, то из равенства коэффициентов при одинаковых степенях z следует, что $a_4=b_4=0$, $a_3=c_4$, $c_3a_1=c_3a_2=0$ и окончательно $c_3=0$. С учетом полученных ограничений на константы a_i, b_i, c_i запишем в качестве следствия уравнений (21)–(24) систему

$$M'=a_1z+b_1,\quad N=a_3z+b_3. \tag{28}$$

Если же $a_1=0$, то из уравнения (27) следует

$$c_3b_1=(a_3-c_4)(b_1z+\alpha)^2-(a_4z+b_4)(b_1z+\alpha)^3.$$

Из линейной независимости функций M и 1 и уравнения (21) вытекает, что $b_1\neq 0$. Тогда $a_4=b_4=0$ и $a_3-c_4=c_3=0$. В результате $M'=b_1$, $N=a_3z+b_3$ и мы получаем частный случай уравнений (28) при $a_1=0$.

Подстановка M', N из соотношений (28) в уравнение (12) дает

$$2(a_1z+b_1)M(TT''-T'^2)-a_1T+Mz(P'T'-2PT'')+M(S'T'-2ST'')+a_3-2M(a_3z+b_3)T''+P=0.$$

Собирая коэффициенты при Mz, M и 1 и приравнивая их нулю, получим

$$2a_1(TT''-T'^2)+(P'T'-2PT'')-2a_3T''=0,$$

$$2b_1(TT'' - T'^2) + (S'T' - 2ST'') - 2b_3T'' = 0,$$
$$-a_1T + a_3 + P = 0.$$

Подставив P из третьего уравнения в первое, получим $a_1T'^2 = 0$. Так как $T' \neq 0$, то $a_1 = 0$. Следовательно, $P = -a_3 = \text{const}$, что противоречит условию $F = P' \neq 0$.

Пусть теперь $c_1 \neq 0$. Выразив M' из уравнения (25) и подставив в уравнение (21), имеем

$$(a_2z + b_2)M^4 - (a_1 - c_2)M^3 + c_1(a_1z + b_1)M + c_1^2 = 0 \tag{29}$$

или

$$A_1z + B_1 = 0, \tag{30}$$

где $A_1 = a_1c_1M + a_2M^4$; $B_1 = c_1^2 + b_1c_1M + (c_2 - a_1)M^3 + b_2M^4$. Считая, что $z = z(M)$, уравнение (21) перепишется следующим образом:

$$((a_1z + b_1)M + c_1)\frac{dz}{dM} = M. \tag{31}$$

Заметим, что $A_1 \neq 0$, так как это влечет равенство нулю B_1, а следовательно, и c_1, что противоречит предположению. Выразив z из уравнения (30) и подставив в (31), получим

$$(-a_1MB_1 + A_1(b_1M + c_1))(B_1A_1' - B_1'A_1) = MA_1^3. \tag{32}$$

Степень по M первого сомножителя в уравнении (32) равна 5, второго — 7, а степень правой части — 13. Приравнивая коэффициент при M^{13} в правой части (32) нулю, имеем $a_2 = 0$, что влечет равенство $A_1 = a_1c_1M$. С учетом последнего получаем равенство

$$(-a_1b_2M^5 + \ldots)(b_2a_1c_1(-3M^4) + \ldots) = (a_1c_1)^3M^4,$$

где многоточием обозначены члены младших степеней. Аналогичная процедура дает $a_1b_2c_1 = 0$, следовательно, $b_2 = 0$, поскольку $c_1 \neq 0$ по предположению, а $a_1 \neq 0$, так как в противном случае коэффициент A_1 тоже равен нулю. В результате $A_1 = a_1c_1M$ и $B_1 = c_1^2 + b_1c_1M + (c_2 - a_1)M^3$. С учетом этого последнее уравнение запишется в виде

$$(-a_1(c_2 - a_1)M^4 + \ldots)((c_2 - a_1)a_1c_1(-2M^3) + \ldots) = (a_1c_1)^3M^4,$$

что влечет $c_2 - a_1 = 0$. Тогда $A_1 = a_1c_1M$ и $B_1 = c_1^2 + b_1c_1M$, а уравнение (29) примет вид $c_1^2 + (a_1z + b_1)c_1M = 0$, что противоречит предположению о линейной независимости функций Mz, M, 1. Таким образом, и в этом случае уравнение (12) не имеет решения.

Пусть теперь $\rho(\Psi)$ не превосходит 3 (напомним, что $\Psi = \{TT'' - T'^2, T, P'T' - 2PT'', S'T' - 2ST'', 1, T'', P\}$). Как и в случае системы функций Z, рассмотрим два варианта: 1) функции 1, T, P являются линейно зависимыми, т. е. существуют константы γ_1, γ_2, γ_3, не все равные нулю, для которых выполняется условие $\gamma_1Mz + \gamma_2M + \gamma_3 = 0$; 2) все функции системы выражаются через функции 1, T, P (случай $\Psi1$).

Рассмотрим подробно первый вариант. Поскольку $T' \neq 0$, то, не нарушая общности, можно считать, что $P = \alpha T + \beta$. Тогда

$$T'P' - 2T''P = \alpha T'^2 - 2T''(\alpha T + \beta).$$

Так как $P' = F \neq 0$, то $\alpha \neq 0$ и $\rho(\Psi)$ будет равен $\rho(\Psi_1)$, где $\Psi_1 = \{1, T, T'', T'^2, TT'', S'T' - 2ST''\}$. Теперь вновь существуют две возможности: 1) функции 1, T, T'^2 являются линейно зависимыми; 2) эти же функции — линейно независимы (случай $\Psi2$). Первый случай немедленно приводит к равенству $T'^2 = \gamma T + \delta$, откуда следует, что $T'' = \gamma/2$. Тогда $\rho(\Psi)$ будет равен $\rho(1, T, S'T' - 2ST'')$ и, следовательно, равен 3, если $S'T' - 2ST''$ не является линейной комбинацией T и 1, и равен 2 — в противном случае (см. ниже соответственно случаи $\Psi 3$ и $\Psi 4$), т.е. $S'T' - 2ST'' = a_1 T + b_1$.

Случай $\Psi 3$. С учетом полученных выше результатов из (12) следует

$$2MM'(-\gamma T/2 - \delta) - M''T + Mz(\alpha\delta - \beta\gamma) + M(S'T' - 2ST'') + N' - 2MN(\gamma/2) + (\alpha T + \beta) = 0.$$

Коэффициент при $S'T' - 2ST''$ должен быть равен нулю, следовательно, и $M = 0$, что влечет равенство $\psi_z = A = T'M = 0$, которое противоречит начальным предположениям. Таким образом, и в этом случае уравнение (12) не имеет решения.

Случай $\Psi 4$. Как уже отмечалось, $P = \alpha T + \beta$, $T'^2 = \gamma T + \delta$, $S'T' - 2ST'' = a_1 T + b_1$. Отсюда следует, что $T = \gamma\psi^2/4 + \varepsilon_1\psi + \varepsilon_2$, где константы связаны соотношением $\varepsilon_1^2 = \gamma\varepsilon_2 + \delta$. Если $\gamma = 0$, то

$$F = P' = (\alpha T + \beta)' = \alpha\varepsilon_1,$$

$$G = S' = (2ST'' + a_1 T + b_1)/T' = a_1\psi + (a_1\varepsilon_2 + b_1)/\varepsilon_1,$$

следовательно, уравнение (1) является линейным. Если же $\gamma \neq 0$, то, решая уравнение $S'T' - 2ST'' = a_1 T + b_1$ относительно S и учитывая, что $T'^2 = \gamma T + \delta$, имеем

$$S = \varepsilon_3 T'^2 + 2a_1 T'^2 \ln T'/\gamma^2 + (a_1\delta - b_1\gamma)/\gamma^2.$$

Отсюда

$$F = P' = \alpha(\gamma\psi/2 + \varepsilon_1),$$

$$G = S' = 4a_1 T'T'' \ln T'/\gamma^2 + 2(\varepsilon_3 + a_1/\gamma^2)T'T''.$$

Действуя преобразованиями эквивалентности (3), можно привести функции F и G к виду $F = \psi$, $G = b\psi\ln\psi$, при этом $T' = \psi$. Подстановка $T = \psi^2/2$, $P = \psi^2/2$, $S = b(2\psi^2\ln\psi - \psi^2)/4$ в уравнение (12) дает

$$-MM'\psi^2 - M''\psi^2/2 + bM\psi^2/2 + N' - 2MN + \psi^2/2 = 0.$$

Отсюда

$$-2MM' - M'' + bM + 1 = 0,$$

$$N' - 2MN = 0.$$

Случай $\Psi 2$. Если же функции 1, T, T'^2 линейно независимы, то остальные функции системы Ψ выражаются через них:

$$T'' = c_1 T'^2 + a_1 T + b_1, \qquad (33)$$

$$TT'' = c_2 T'^2 + a_2 T + b_2, \qquad (34)$$

$$S'T' - 2ST'' = c_3 T'^2 + a_3 T + b_3.$$

Умножим уравнение (33) на T и вычтем из результата (34), тогда имеем

$$(c_1 T - c_2)T'^2 + a_1 T^2 + (b_1 - a_2)T - b_2 = 0. \qquad (35)$$

Полученное уравнение продифференцируем, разделим на T' и, подставив T'', выраженное из (33), имеем

$$(2c_1^2 T - 2c_1c_2 + c_1)T'^2 + 2c_1a_1T^2 + (2c_1b_1 - 2c_2a_1 + 2a_1)T + (b_1 - a_2 - 2c_2b_1) = 0. \qquad (36)$$

Из результата вычтем уравнение (35), умноженное на $2c_1$, и окончательно получим

$$c_1T'^2 + (2c_1a_2 - 2c_2a_1 + 2a_1)T + (b_1 - a_2 - 2c_2b_1 + 2c_1b_2) = 0.$$

Из линейной независимости функций 1, T, T'^2 следует, что $c_1 = 2c_1a_2 - 2c_2a_1 + 2a_1 = b_1 - a_2 - 2c_2b_1 + 2c_1b_2 = 0$, тогда $a_1(1 - c_2) = b_1 - a_2 - 2c_2b_1 = 0$. Заметим, что $a_1 \neq 0$, так как в противном случае $T'' = b_1$ и T — квадратичная функция, что влечет линейную зависимость функций 1, T, T'^2. Тогда $c_2 = 1$ и $a_2 = -b_1$. В результате получаем систему

$$T'' = a_1T + b_1,$$

$$TT'' = T'^2 - b_1T + b_2,$$

$$P = \alpha T + \beta,$$

$$T'P' - 2T''P = -\alpha T'^2 + 2(\alpha b_1 - \beta a_1)T - 2(\alpha b_2 + \beta b_1).$$

Подстановка этих равенств в (12) дает уравнение

$$2MM'(-b_1T + b_2) - M''T + Mz(-\alpha T'^2 + 2(\alpha b_1 - \beta a_1)T - 2(\alpha b_2 + \beta b_1)) +$$

$$+ M(c_3T'^2 + a_3T + b_3) + N' - 2MN(a_1T + b_1) + (\alpha T + \beta) = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при T'^2, имеем

$$(-\alpha z + c_3)M = 0.$$

Тогда либо $\alpha = 0$, откуда $P' = 0$, что противоречит условию $F = P' \neq 0$, либо $M = 0$, что в свою очередь противоречит условию $\psi_z = A = MT' \neq 0$. Таким образом, и в этом случае уравнение (12) не имеет решения.

Случай Ψ1. Пусть теперь функции 1, T, P линейно независимы. Тогда имеем

$$T'' = c_1P + a_1T + b_1, \tag{37}$$

$$TT'' - T'^2 = c_2P + a_2T + b_2, \tag{38}$$

$$T'P' - 2T''P = c_3P + a_3T + b_3. \tag{39}$$

Подставим T'' из (37) в уравнение (38), продифференцируем полученное соотношение и вновь подставим T'' из (37), в результате запишем

$$T'(c_1P + b_1 + a_2) = (c_1T - c_2)P'. \tag{40}$$

Если $c_1 \neq 0$, то, интегрируя (40), получаем соотношение $P + (b_1 + a_2)/c_1 = k(T - c_2/c_1)$, где k — некоторая константа. Последнее уравнение свидетельствует о линейной зависимости функций 1, T, P, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $c_1 = 0$, тогда из (40) вытекает равенство $(b_1 + a_2)T' + c_2P' = 0$. Если выполнено хотя бы одно из условий $b_1 + a_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то интегрируя полученное уравнение, вновь устанавливаем линейную зависимость между 1, T, P. В результате $c_1 = b_1 + a_2 = c_2 = 0$, что дает уравнения

$$T'' = a_1T + b_1, \tag{41}$$

$$TT'' - T'^2 = -b_1T + b_2, \tag{42}$$

$$T'P' - 2T''P = c_3P + a_3T + b_3, \tag{43}$$

$$S'T' - 2ST'' = c_4P + a_4T + b_4. \tag{44}$$

Подставив эти соотношения в (12), имеем

$$2MM'(-b_1T' + b_2) - M''T + Mz(c_3P + a_3T + b_3) + M(c_4P + a_4T + b_4) +$$

$$+N' - 2MN(a_1T + b_1) + P = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при 1, P и T в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений

$$c_3Mz + c_4M + 1 = 0, \tag{45}$$

$$-2b_1MM' - M'' + a_3Mz + a_4M - 2a_1MN = 0, \tag{46}$$

$$2b_2MM' + b_3Mz + b_4M + N' - 2b_1MN = 0. \tag{47}$$

3. Решения редуцированных уравнений

Процесс получения решений начнем со случая $\Psi 1$. Ему соответствует система уравнений (45) – (47). Пусть сначала $c_3 = 0$, тогда из уравнения (45) найдем, что M — тождественная константа. Тогда из (46) следует, что

$$a_3z + a_4 - 2a_1N = 0.$$

Если $a_1 \neq 0$, то функция $N(z)$ является линейной и мы оказываемся в рамках случая $Z1$. Если же $a_1 = 0$, то и $a_3 = a_4 = 0$. Тогда из уравнений (41)–(43) следует, что

$$T'^2 = 2b_1T - b_2,\ T'P' = 2b_1P + b_3. \tag{48}$$

Выпишем определитель Вронского для функций T, P, 1:

$$W(T, P, 1) = T'P'' - T''P'.$$

Нетрудно показать, что при выполнении условий (48) определитель $W(T, P, 1)$ будет тождественно равен нулю. Это противоречит предположению о линейной независимости функций T, P и 1.

Если же $c_3 \neq 0$, то $M = \alpha(z-\beta)^{-1}$, с $\alpha = -1/c_3$, $\beta = -c_4/c_3$. Подставив M в уравнение (46), получим

$$2b_1\alpha^2(z-\beta)^{-3} - 2\alpha(z-\beta)^{-3} + a_3\alpha(1 + \beta(z-\beta)^{-1}) + a_4\alpha(z-\beta)^{-1} - 2a_1\alpha(z-\beta)^{-1}N = 0.$$

Если $a_1 \neq 0$, то $N = \gamma(z-\beta) + \delta + \varepsilon(z-\beta)^{-2}$, что соответствует случаю Z3. При $a_1 = 0$, собирая коэффициенты при различных степенях $z - \beta$ и приравнивая их нулю, получим уравнения

$$2b_1\alpha^2 - 2\alpha = 0, \quad a_3\alpha = 0, \quad a_3\alpha\beta + a_4\alpha = 0,$$

следовательно, $a_3 = a_4 = 0$, $b_1 = 1/\alpha = -c_3$. Подстановка полученных значений констант в уравнения (41), (43) дает соотношения $T'' = b_1$ и $T'P' - 2T''P = c_3P + b_3$, откуда следует $T' = b_1\psi + b_0$. В результате получаем уравнение

$$(b_1\psi + b_0)P' - b_1P = b_3.$$

Его решение P является функцией, линейной по ψ. Подстановка T' в (44) дает уравнение

$$(b_1\psi + b_0)S' - 2b_1 S = c_4 P + b_4,$$

его решение S — квадратичная по ψ функция, тогда $G = S'$ — линейная, а $F = P'$ — тождественная константы, что противоречит предположению о нелинейности уравнения (1).

Случай Z2. Этому случаю соответствует система (15)–(17). Покажем, что его можно свести к случаю $\Psi 4$, т. е. докажем, что P и $S'T' - 2ST''$ — линейные комбинации функций T и 1. При $\delta = 0$ производная T' — отличная от нуля константа, и из уравнений (16), (17) следует, что P и $S'T' - 2ST''$ — функции, линейные по ψ, т. е. являются линейной комбинацией T и 1. Если же $\delta \neq 0$, то $T = \delta\psi^2/(4\alpha) + \alpha_0\psi + \alpha_3$, что вместе с (16) дает $P = \alpha_1(\delta\psi/(2\alpha) + \alpha_0)^2 + \alpha_2$. Следовательно, P является линейной комбинацией T и 1, откуда и $S'T' - 2ST''$ — линейная комбинация этих функций.

Случай Z1. Этому случаю соответствует система (13), (14). Интегрирование уравнения (13) дает $P = \delta T'^2 - \beta$. Подставим P в уравнение (14):

$$\alpha(S'T' - 2ST'') + \beta - 2\alpha\gamma T'' + \delta T'^2 - \beta = 0,$$

проинтегрировав его, получим

$$S = \varepsilon T'^2 - \gamma - (\delta/\alpha)T'^2 - \int \frac{d\psi}{T'}.$$

Теперь подставим найденные выражения в формулы для A и C:

$$A = \alpha T',$$

$$C = 2\left(\delta z T'^2 + \varepsilon T'^2 - \delta T'^2 \int \frac{d\psi}{\alpha T'}\right).$$

Интегрирование первого уравнения дает

$$\psi = \phi(\alpha z + q(x)).$$

Здесь функция ϕ является обратной функции τ; функции $\tau(\psi)$ и $T(\psi)$ связаны соотношением $T'\tau' = 1$. Подставив ψ во второе уравнение, имеем

$$q'^2 = -2\delta q/\alpha + 2\varepsilon - \alpha^2. \tag{49}$$

Причем параметр $\delta \neq 0$, так как в противном случае $F = 0$, что противоречит начальным предположениям. Тогда решение уравнения (49) имеет вид

$$q = -\delta(x + c_0)^2/2\alpha + \alpha(2\varepsilon - \alpha^2)/(2\delta).$$

Поскольку $P = \delta T'^2 - \beta$, то

$$F = P' = -2\delta\frac{\tau''}{\tau'^3}; \quad S = \varepsilon T'^2 - \gamma - \frac{\delta}{\alpha}\int \frac{d\psi}{T'} = \frac{\varepsilon}{\tau'^2} - \gamma - \frac{\delta}{\alpha}\frac{\tau}{\tau'^2},$$

отсюда

$$G = -2\varepsilon\frac{\tau''}{\tau'^3} + 2\frac{\delta}{\alpha}\frac{\tau\tau''}{\tau'^3} - \frac{\delta}{\alpha}\frac{1}{\tau'}.$$

Действуя преобразованиями эквивалентности, приведем исходное уравнение к виду

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = -2\frac{\tau''}{\tau'^3}z + 2\frac{\tau\tau''}{\tau'^3} - \frac{1}{\tau'}.$$

Константы имеют значения $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, $\delta = 1$. Тогда для ψ получим решение

$$\psi = \phi\left(z - \frac{(x+c_0)^2+1}{2}\right). \tag{50}$$

Случай Z3. Этому случаю соответствует система (18)–(20). Поскольку $M \neq 0$, то и $\alpha \neq 0$. Интегрирование уравнения (18) дает для T одно из следующих соотношений:

$$T = (\psi + \gamma_0)^2/(2\alpha) - \varepsilon/\alpha, \tag{51}$$

$$T = \sin^2(\gamma\psi + \gamma_0)/(2\alpha\gamma^2) - \varepsilon/\alpha, \tag{52}$$

$$T = \operatorname{sh}^2(\gamma\psi + \gamma_0)/(2\alpha\gamma^2) - \varepsilon/\alpha, \tag{53}$$

$$T = -\operatorname{ch}^2(\gamma\psi + \gamma_0)/(2\alpha\gamma^2) - \varepsilon/\alpha. \tag{54}$$

Интегрируя уравнения (20) и (19), получим для функций P и S выражения

$$P = c_1 T'^2 \exp\left(-\int\frac{d\psi}{\alpha T'}\right) - \gamma,$$

$$S = -\beta P + c_2 T'^2 - \delta,$$

где c_1, c_2 — некоторые константы. Тогда для A и C имеем

$$A = \alpha T'(z-\beta)^{-1},$$

$$C = 2\left(\alpha T(z-\beta)^{-2} + \varepsilon(z-\beta)^{-2} + c_2T'^2 + c_1(z-\beta)T'^2\exp\left(-\int\frac{d\psi}{\alpha T'}\right)\right).$$

Рассмотрим каждое из четырех представлений для функции T. Если T описывается уравнением (51), то

$$F = P' = (c_3(\psi+\gamma_0) - \gamma)' = c_3,$$

$$G = S' = (-\beta P + c_4(\psi+\gamma_0)^2 - \delta)' = -\beta c_3 + 2c_4(\psi+\gamma_0).$$

Здесь и далее $c_3 = c_1/\alpha^2$, $c_4 = c_2/\alpha^2$. В результате уравнение (1) линейно, что противоречит начальным предположениям.

Соотношение (52) для T даст

$$F = P' = \left(\frac{c_3}{4\gamma^2}\sin^2(2\gamma\psi + 2\gamma_0)\operatorname{tg}^{-1}(\gamma\psi+\gamma_0) - \gamma\right)' = \frac{c_3}{2\gamma}\left(\cos(4\gamma\psi + 4\gamma_0) + \cos(2\gamma\psi + 2\gamma_0)\right),$$

$$G = S' = \left(-\beta P + \frac{c_4}{4\gamma^2}\sin^2(2\gamma\psi + 2\gamma_0) - \delta\right)' = -\beta F + \frac{c_3}{2\gamma}\sin(4\gamma\psi + 4\gamma_0).$$

Действуя преобразованиями эквивалентности, приведем функции F и G к виду

$$F = k(\cos\psi + \cos\psi/2), \quad G = \sin\psi,$$

при этом

$$\gamma_0 = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1/4, \quad c_4 = 1/2, \quad k = 2c_3. \tag{55}$$

Тогда

$$\psi_z = A = 2z^{-1}\sin\psi/2,$$

$$\psi_z^2 + \psi_x^2 = C = 16z^{-2}\sin^2\psi/4 + 4(1 + kz\operatorname{ctg}\psi/4)\sin^2\psi/2.$$

Из первого уравнения находим

$$\psi = 4\operatorname{arctg}(K(x)z) \tag{56}$$

и, подставив ψ во второе соотношение, получим для функции $K(x)$ уравнение $K'^2 = K^4 + K^2 + kK$. Замена $K = 1/R$ дает уравнение для эллиптических функций

$$R'^2 = 1 + R^2 + kR^3. \tag{57}$$

Если же T задается уравнением (53), то

$$F = P' = \left(\frac{c_3}{4\gamma^2}\operatorname{sh}^2(2\gamma\psi + 2\gamma_0)\operatorname{th}^{-1}(\gamma\psi + \gamma_0) - \gamma\right)' = \frac{c_3}{2\gamma}(\operatorname{ch}(4\gamma\psi + 4\gamma_0) + \operatorname{ch}(2\gamma\psi + 2\gamma_0)),$$

$$G = S' = \left(-\beta P + \frac{c_4}{4\gamma^2}\operatorname{sh}^2(2\gamma\psi + 2\gamma_0) - \delta\right)' = -\beta F + \frac{c_3}{2\gamma}\operatorname{sh}(4\gamma\psi + 4\gamma_0).$$

Действуя преобразованиями эквивалентности, приведем функции F и G к виду

$$F = k(\operatorname{ch}\psi + \operatorname{ch}\psi/2), \quad G = \operatorname{sh}\psi,$$

где константы заданы соотношением (55). В результате получаем уравнения

$$\psi_z = A = 2z^{-1}\operatorname{sh}\psi/2,$$

$$\psi_z^2 + \psi_x^2 = C = 16z^{-2}\operatorname{sh}^2\psi/4 + 4(1 + kz\operatorname{cth}\psi/4)\operatorname{sh}^2\psi/2.$$

Их интегрирование дает решение

$$\psi = 4\operatorname{arth}(z/R(x)), \tag{58}$$

где функция $R(x)$ удовлетворяет уравнению

$$R'^2 = -1 + R^2 + kR^3. \tag{59}$$

Наконец, если T задается уравнением (54), то

$$F = P' = \left(\frac{c_3}{4\gamma^2}\operatorname{sh}^2(2\gamma\psi + 2\gamma_0)\operatorname{th}(\gamma\psi + \gamma_0) - \gamma\right)' = \frac{c_3}{2\gamma}(\operatorname{ch}(4\gamma\psi + 4\gamma_0) - \operatorname{ch}(2\gamma\psi + 2\gamma_0)),$$

$$G = S' = \left(-\beta P + \frac{c_4}{4\gamma^2}\operatorname{sh}^2(2\gamma\psi + 2\gamma_0) - \delta\right)' = -\beta F + \frac{c_3}{2\gamma}\operatorname{sh}(4\gamma\psi + 4\gamma_0).$$

Действуя преобразованиями эквивалентности, приведем функции F и G к виду

$$F = k(\operatorname{ch}\psi - \operatorname{ch}\psi/2), \quad G = \operatorname{sh}\psi,$$

где константы вновь задаются уравнениями (55). Тогда соответствующие уравнения имеют вид

$$\psi_z = A = -2z^{-1}\operatorname{sh}\psi/2,$$
$$\psi_z^2 + \psi_x^2 = C = -16z^{-2}\operatorname{ch}^2\psi/4 + 4(1 + kz\operatorname{th}\psi/4)\operatorname{sh}^2\psi/2.$$

Их интегрирование дает решение

$$\psi = 4\operatorname{arth}(R(x)/z), \tag{60}$$

где функция $R(x)$ вновь удовлетворяет уравнению (59).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Как следует из доказательства теоремы, уравнение (5) имеет решение, заданное соотношениями (56), (57), уравнения (6) — решения, заданные соотношениями (58) – (60), а уравнение (7) — решение, заданное соотношением (50). Решения уравнения (4) с разделенными переменными рассматривались в работах [3, 4].

Автор благодарит О. В. Капцова за советы и Е. Д. Карепову за помощь в подготовке статьи.

Список литературы

[1] Йи Ч. Волновые движения в слоистых жидкостях // Нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

[2] Капцов О. В. Новые решения двумерных стационарных уравнений Эйлера // ПММ. 1990. Т. 54, №3. С. 409–415.

[3] Андреев В. К., Капцов О. В. и др. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.

[4] Капцов О. В. Стационарные вихревые структуры в идеальной жидкости // ЖЭТФ. 1990. Т. 98, №2. С. 532–541.

[5] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 14 декабря 2000 г.