

# ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ ИЗ ПОВРЕЖДАЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

С. В. ЖИЖЕРИН, В. В. СТРУЖАНОВ, В. И. МИРОНОВ  
*Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
e-mail [sgigerin@r66.ru](mailto:sgigerin@r66.ru)

The model of material which is damaging under stretching is considered. The material possesses the property of deformational weakening. Different iterative methods for determining the stressed state in pure bending of a beam of such material are suggested. Calculations are performed up to the moment of destruction of the most stretched fibers. The destruction takes place after beginning of material weakening.

Кинетические уравнения накопления повреждений при растяжении материала с переходом на стадию деформационного разупрочнения, которая характеризуется падающей ветвью диаграммы деформирования, получены аналогично работе [1]. Их вывод основан на использовании эффекта выполаживания модуля разгрузки, происходящего вследствие образования микроповреждений. При этом значение поврежденности, равное единице, достигается в конце падающего участка полной диаграммы. Итерационные методы, приведенные в [1] для решения задачи кручения круглых стержней, распространены на задачу об определении напряженного состояния при чистом изгибе балки в предположении о линейном характере распределения деформации по ее высоте. Расчеты проведены до момента разрушения наиболее растянутых волокон. Установлено, что разрушение всегда происходит при разупрочнении и в этот момент значение поврежденности не всегда равно единице.

1. Рассмотрим чистый изгиб балки прямоугольного поперечного сечения, имеющего высоту  $h$  и ширину  $b$ . Деформирование осуществляется заданием либо изгибающего момента  $M$  (мягкое нагружение), либо кривизны балки  $\kappa$  (жесткое нагружение). Известно [2], что в этом случае единственной ненулевой компонентой тензора напряжений будет продольное напряжение  $\sigma_x = \sigma$ , а продольная деформация  $\varepsilon_x = \varepsilon$  линейно распределена по высоте балки (рис. 1, *a*). Нагружение осуществляем квазистатически, т. е. значения  $M$  и  $\kappa$  монотонно возрастают с малой скоростью.

Свойства материала балки определяет полная диаграмма деформирования  $\sigma - \varepsilon$  (рис. 1, *b*, кривая *A*). Ее наклон характеризует функция  $E^p(\varepsilon) = d\sigma/d\varepsilon$ , имеющая смысл касательного модуля. На восходящей ветви (упрочнение)  $E^p > 0$ , на ниспадающей (разупрочнение)  $E^p < 0$ . На диаграмме  $\sigma^T, \sigma^B, \varepsilon^T, \varepsilon^B$  — соответственно предел текучести, предел прочности при растяжении и деформации растяжения, им отвечающие,  $\varepsilon^z$  — деформация разрушения. При сжатии материал считаем идеально упругим (модуль упругости  $E$ ).

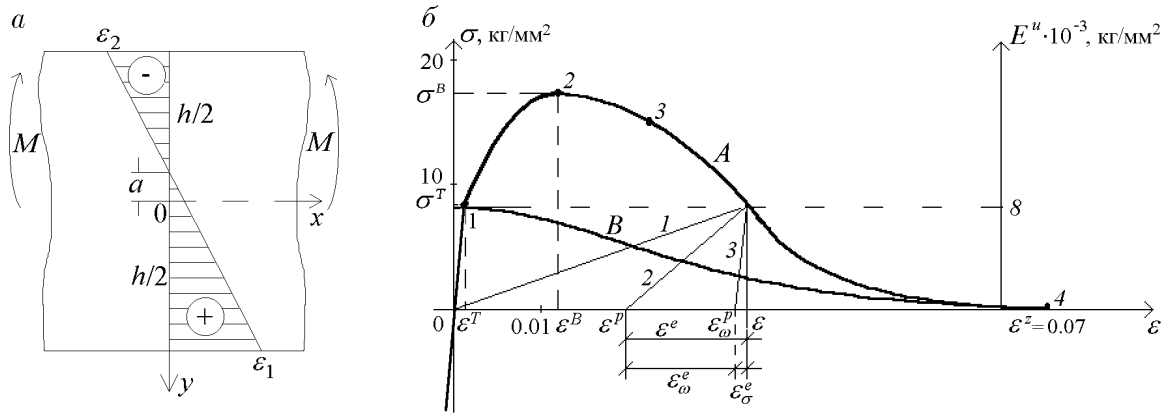


Рис. 1.

В зависимости от процессов, происходящих в материале балки при деформировании, возможны три варианта разгрузки [1]. Первый — без остаточных деформаций с секущим модулем  $E^s = \sigma/\varepsilon$  (прямая 1, на рис. 1, б), второй — с модулем разгрузки, равным  $E$  (прямая 3), третий — с модулем разгрузки  $E^u < E$  (прямая 2). Во втором и третьем случаях после разгрузки появляются остаточные деформации. Считаем, что функция  $E^u(\varepsilon) = \sigma/(\varepsilon - \varepsilon^p)$  известна (кривая B).

Используя уравнение второго закона термодинамики с учетом необратимости и изотермичности процесса деформирования, получим уравнение [1, 3]

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e} - \frac{\sigma}{\rho}\right) d\varepsilon^e + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega - \frac{\sigma}{\rho} d\varepsilon^p + dg\right) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $F = F(\varepsilon^e, \omega)$  — свободная энергия;  $\varepsilon^e, \varepsilon^p$  — упругая и пластическая составляющие деформации ( $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ); параметр  $\omega$  характеризует поврежденность материала;  $\rho$  — плотность;  $dg \geq 0$  — некомпенсированное тепло. Из (1) следует, что

$$\sigma = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e}, \quad \rho dg = \sigma d\varepsilon^p - \rho \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega = dg' + dg'', \quad (2)$$

где  $dg'$  — механическая диссипация, определяемая пластической деформацией;  $dg''$  — диссипация континуального разрушения, определяемая поврежденностью материала.

Для рассматриваемого процесса деформирования функцию свободной энергии можно представить в виде

$$F = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} E \varepsilon^e \varepsilon^e - \frac{1}{2} \omega E \varepsilon^e \varepsilon^e \right), \quad (3)$$

где первый член — потенциальная энергия упругих деформаций после механической диссипации (релаксации напряжений вследствие пластической деформации), а второй — энергия, потерянная из-за континуального разрушения (релаксации напряжений вследствие микроразрушений). Тогда, подставляя (3) в выражения (2), получаем

$$\sigma = E \varepsilon^e - \omega E \varepsilon^e = E(1 - \omega)(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad dg'' = \frac{1}{2} E \varepsilon^e \varepsilon^e d\omega. \quad (4)$$

Наконец, из (4) следует, что  $\varepsilon^e = \sigma/E + \omega \varepsilon^e = \varepsilon_\sigma^e + \varepsilon_\omega^e$  (рис. 1, б). Так как  $\sigma = E^u \varepsilon^e$ , то

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon_\sigma^e}{\varepsilon^e} = 1 - \frac{\sigma}{E(\varepsilon - \varepsilon^p)} = 1 - \frac{E^u}{E}, \quad d\omega = -\frac{dE^u}{E}. \quad (5)$$

Далее, используя формулу (4), находим  $d\sigma = E(1-\omega)(d\varepsilon - d\varepsilon^p) - E(\varepsilon - \varepsilon^p)d\omega$ . С другой стороны, справедливо соотношение  $d\sigma = E^p d\varepsilon$ . Приравняв выражения для  $d\sigma$ , получаем дифференциальное уравнение

$$(\varepsilon - \varepsilon^p) \frac{d\omega}{d\varepsilon} + \omega \left( 1 - \frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} \right) = 1 - \frac{E^p}{E} - \frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \quad \varepsilon^p(0) = 0, \quad E^p(0) = E.$$

С учетом (5) уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} = 1 - \frac{E^p}{E^u} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon^p) dE^u}{E^u d\varepsilon}. \quad (7)$$

Если деформирование не сопровождается повреждениями ( $\omega = 0, E^u = E$ ), то из (7) получаем

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} = 1 - \frac{E^p}{E}, \quad d\varepsilon^p = \left( 1 - \frac{E^p}{E} \right) d\varepsilon. \quad (8)$$

Если отсутствует пластическая деформация ( $\varepsilon^p = 0$ ), то

$$\varepsilon \frac{d\omega}{d\varepsilon} + \omega = 1 - \frac{E^p}{E}. \quad (9)$$

Уравнения (6), (7) определяют кинетику совместного формирования поврежденности и пластической деформации, уравнение (8) — кинетику пластической деформации при отсутствии поврежденности, а уравнение (9) — кинетику формирования поврежденности при отсутствии пластической деформации. Легко проверить, что значение  $\omega$  из (5) является общим решением дифференциального уравнения (6) и уравнения (9) при  $E^u = E^s$ .

Вернемся к уравнению (4) и запишем его в виде

$$\sigma = E[\varepsilon - \varepsilon^p - \omega(\varepsilon - \varepsilon^p)] = E[\varepsilon - (\varepsilon^p + \varepsilon_\omega^e)] = E(\varepsilon - \varepsilon_\omega^p), \quad (10)$$

где  $\varepsilon_\omega^p$  — величина полной псевдопластической деформации, определяемой разгрузкой с модулем  $E$ . Кинетика ее формирования зависит от изменения  $\varepsilon^p$  и  $\omega$  и описывается уравнением (8).

2. Определим напряженно-деформированное состояние балки, используя связь между напряжениями и деформациями (10). При мягком нагружении граничные условия имеют вид

$$b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y) y dy = M, \quad (11)$$

а при жестком нагружении выполняются условия

$$\varepsilon_1 = \kappa(h/2 + a), \quad \varepsilon_2 = \kappa(-h/2 + a). \quad (12)$$

Здесь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — соответственно деформации нижних и верхних волокон балки,  $a$  — расстояние от нейтральной оси балки, где отсутствуют напряжения и деформации, до ее средней линии (см. рис. 1, а). Очевидно, что во всех случаях должно выполняться еще равенство

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y) dy = 0. \quad (13)$$

Исходная задача разбивается на две, а именно, основную задачу, где  $\sigma' = E\varepsilon'$  и граничные условия (11) или (12) при  $a = 0$ , и корректирующую задачу, где  $\sigma'' = E(\varepsilon' - \varepsilon_\omega^p)$  и граничные условия

$$b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'' y dy = 0 \quad (14)$$

для мягкого нагружения и

$$\kappa = 0 \quad (15)$$

для жесткого нагружения.

Основная задача является обычной задачей изгиба упругой балки. Ее решение для мягкого нагружения имеет вид

$$\sigma' = \frac{My}{I}, \quad \varepsilon' = \frac{My}{EI}, \quad \kappa' = \frac{M}{EI}, \quad (16)$$

а для жесткого нагружения —

$$\sigma' = E\kappa y, \quad \varepsilon' = \kappa y, \quad M' = EI\kappa. \quad (17)$$

Здесь  $I = bh^3/12$  — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси симметрии. В первом случае  $\kappa'$  — кривизна, соответствующая изгибающему моменту  $M$ , во втором  $M'$  — момент, соответствующий  $\kappa$ .

Корректирующая задача — это задача об определении собственных (остаточных) напряжений в балке при заданной величине остаточной деформации  $\varepsilon_\omega^p$ . Ее решение для граничных условий (14) имеет вид

$$\sigma'' = \frac{M^\Phi y}{I} + \frac{R^\Phi}{bh} - E\varepsilon_\omega^p, \quad \varepsilon' = \frac{M^\Phi y}{EI} + \frac{R^\Phi}{Ebh}, \quad \kappa'' = \frac{M^\Phi}{EI}, \quad (18)$$

причем  $\varepsilon' = \kappa''(y + a')$ ,  $a' = (R^\Phi I)/(M^\Phi bh)$ . Для граничных условий (15) имеем

$$\sigma'' = \frac{R^\Phi}{bh} - E\varepsilon_\omega^p, \quad \varepsilon' = \frac{R^\Phi}{Ebh}, \quad M'' = -M^\Phi. \quad (19)$$

Здесь  $M''$  — величина момента, удерживающего балку в положении  $\kappa = 0$ ;

$$M^\Phi = bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_\omega^p y dy, \quad R^\Phi = bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_\omega^p dy$$

— соответственно фиктивные изгибающий момент и растягивающее усилие.

Непосредственно проверяется, что решением исходной задачи при заданной функции  $\varepsilon_\omega^p(y)$  является сумма решений основной и корректирующей задач.

Рассмотрим итерационную процедуру определения параметров положений равновесия. Пусть при некоторых  $M_0, \kappa_0$  балка находится в равновесии и в каждой точке ее сечения известны  $\varepsilon_0, \sigma_0, \varepsilon_{0\omega}^p, E_0^p, E_0^u, \omega_0$ , а также  $\sigma_0^T$  — предел текучести для данного состояния материала, который для упругих областей равен  $\sigma_0^T$ , а в областях неупругости —  $\sigma_0$ . Увеличим кривизну на  $\Delta\kappa$ . Сначала подставляя в формулы (17) вместо  $\kappa$  величину  $\Delta\kappa$ , получаем решение основной задачи  $\sigma'_1, \varepsilon'_1, M'_1$  и вычисляем значения  $\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1, \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon'_1, M_1 = M_0 + M'_1$ , которые представляют собой первое приближение к решению исходной задачи для  $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa$ . В заключение первого этапа в области, где  $\sigma_1 > \sigma_0^T$ , находим

$E_1^p = E^p(\varepsilon_1)$  и, используя диаграмму деформирования, получим  $\sigma_1^T = \sigma(\varepsilon_1)$ . В оставшейся области очевидно  $E_1^p = E$ ,  $\sigma_1^T = \sigma_0^T$ .

Далее, используя второе равенство (8) и подставляя  $d\varepsilon = \varepsilon'_1$ ,  $E^p = E_0^p$ , вычисляем в точках, где  $\sigma_1 > \sigma_0^T$ , значения  $d\varepsilon_{1\omega}^p(y)$  — приближенное решение дифференциального уравнения (8) на отрезке  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ . Отметим, что в точках, где  $\sigma_1 > \sigma_0^T = \sigma^T$  (материал переходит из упругого состояния в упругопластическое)  $d\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon^T$ . Затем по формулам (19), в которых  $\varepsilon_\omega^p$  заменяем на  $d\varepsilon_{1\omega}^p$ , получаем решение корректирующей задачи  $\sigma_1''$ ,  $\varepsilon'_1$ ,  $M_1''$ . Тогда второе приближение равно  $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_1''$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon'_1$ ,  $M_2 = M_1 + M_1''$ . В заключение второго этапа в области, где  $\sigma_2 > \sigma_1^T$ , находим  $E_2^p = E^p(\varepsilon_2)$  и  $\sigma_2^T = \sigma(\varepsilon_2)$ . Снова по формуле (8), где полагаем  $d\varepsilon = \varepsilon'_1$  (либо  $d\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon^T$ ),  $E^p = E_1^p$ , вычисляем  $d\varepsilon_{2\omega}^p$  и повторяем корректировку.

Приведенный итерационный процесс сходится, так как ряд  $M = M_1 + \sum_{i=1}^n M_i''$  при  $n \rightarrow \infty$  монотонно убывает и ограничен снизу ( $M_1 > 0$ ,  $M_i'' < 0$ ,  $M \geq 0$ ). Тогда решение равно  $\sigma = \lim \sigma_n$ ,  $\varepsilon = \lim \varepsilon_n (n \rightarrow \infty)$ . И наконец находим  $E^u = E^u(\varepsilon)$  и по формуле (5) вычисляем значение поврежденности  $\omega$ .

Рассмотрим теперь случай мягкого нагружения. Возмутим положение равновесия, увеличив изгибающий момент на величину  $\Delta M (M_1 = M_0 + \Delta M)$ . Для определения параметров нового положения равновесия применяем ту же итерационную схему, только вместо формул (17), (19) используем формулы (16), (18) и при каждой корректировке вычисляем значения  $a'_i$ .

Однако итерационный процесс при мягком нагружении сходится не всегда. В результате итераций получаем ряд

$$\kappa = \kappa_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i, \quad (20)$$

где  $\beta_1 = \kappa'_1 = \Delta M / EI$ ;  $\beta_{n+1} = c_{n-1} \beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ );

$$c_k = 1 - \frac{b}{EI} \int_{-h/2}^{h/2} E_k^p y (y + a'_k) dy \quad (k = 0, 1, 2, \dots, a'_0 = 0).$$

Ряд (20) сходится, если  $c_k < 1$ , и расходится, если, начиная с некоторого момента,  $c_k \geq 1$ .

Численные решения различных задач показали, что еще до начала расходимости итерационного процесса в наиболее растянутых слоях балки появляется зона разупрочнения, величина которой зависит от характеристик упрочнения и разупрочнения материала и размеров зон упругости и упрочнения. В качестве примера приведем результаты расчета чистого изгиба балки ( $b = 15$  мм,  $h = 40$  мм), выполненной из серого чугуна. Свойства материала описывает зависимость

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^T, \\ -9.92E(\varepsilon - \varepsilon^B)^2 + 18, & \varepsilon^T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B, \\ -2.17E(\varepsilon - \varepsilon^B)^2 + 18, & \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, \\ 3.45 \cdot 10^{-2} E e^{-100\varepsilon}, & \varepsilon^* \leq \varepsilon \leq \varepsilon^z, \end{cases}$$

где  $E = 8 \cdot 10^3$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\varepsilon^T = 1.07 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon^B = 1.2 \cdot 10^{-2}$ ;  $\varepsilon^* = 3.8 \cdot 10^{-2}$ ;  $\varepsilon^z = 0.07$ . Данная зависимость получена при осреднении серии испытаний на растяжение цилиндрических микрообразцов (рабочая часть высотой 2 и диаметром 2 мм) на специальной жесткой установке [4].

При жестком нагружении получаем диаграмму  $M - \kappa$  (рис. 2, б). Точка 1 отвечает переходу наиболее растянутых волокон на стадию упрочнения (соответствует точке 1 рис. 1, б), точка 2 — переходу на стадию разупрочнения (соответствует точке 2 рис. 1, б), точка 4 соответствует разрушению наиболее растянутых волокон (соответствует точке 4 рис. 1, б). При мягком нагружении получается только восходящая ветвь диаграммы  $M - \kappa$ . После достижения точки 3 итерационный процесс расходится — деформирование балки приобретает динамический характер. Итерационная процедура схематически показана на рис. 2, а. На рис. 2, б жесткому нагружению отвечает путь I, а мягкому — путь II. Здесь крестиками показаны экспериментальные точки, полученные при изгибе балки заданных размеров. Экспериментальные данные приведены до тех пор, пока на центральном участке балки реализовывалось состояние чистого изгиба.

На рис. 3 показаны эпюры напряжений, отвечающие точке 3 на рис. 2, б, зависимости  $M(\kappa)$  (кривая 1) и точке 4 (кривая 2), на рис. 4 — эпюры повреждаемости, также отвечающие точкам 3 (кривые 3, 4) и 4 (кривые 1, 2). Кривые 1, 3 построены при  $E^u = E^s$ , кривые 2, 4 — с использованием функции  $E^u(\varepsilon) = E(1 - 14.25\varepsilon)/(0.117E\varepsilon^2 - 14\varepsilon + 1)$  (рис. 1, б, кривая B), полученной в эксперименте при разгрузках из точек диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ .

Результаты расчетов подтверждают, что при сохранении состояния чистого изгиба разрушение при любом способе нагружения происходит в наиболее растянутых волокнах, когда они переходят уже на стадию разупрочнения, только для жесткого нагружения зона разупрочнения имеет бóльшие размеры. Отметим также, что при жестком нагружении поврежденность материала наиболее растянутых волокон достигает единицы, а при мягком нагружении их разрушение происходит, когда поврежденность меньше единицы.

3. Учтем повреждаемость в явном виде, используя связь между напряжениями и деформациями в форме (4). Пусть сначала модуль разгрузки  $E^u = E^s$ ,  $\varepsilon^p = 0$ . В исходном положении равновесия  $(\kappa_0, M_0)$  имеем  $\varepsilon_0 = \kappa_0(y + a_0)$ ,  $\sigma_0 = E_0^s \varepsilon_0 = E(1 - \omega_0(y))\kappa_0(y + a_0)$ . Воспользовавшись условием (13), находим, что

$$a_0 = \left( \int_{-h/2}^{h/2} \omega_0(y)y dy \right) / \left( \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega_0(y)) dy \right).$$

Эта величина не зависит от  $\kappa$ . Возмутим исходное положение, увеличив кривизну на

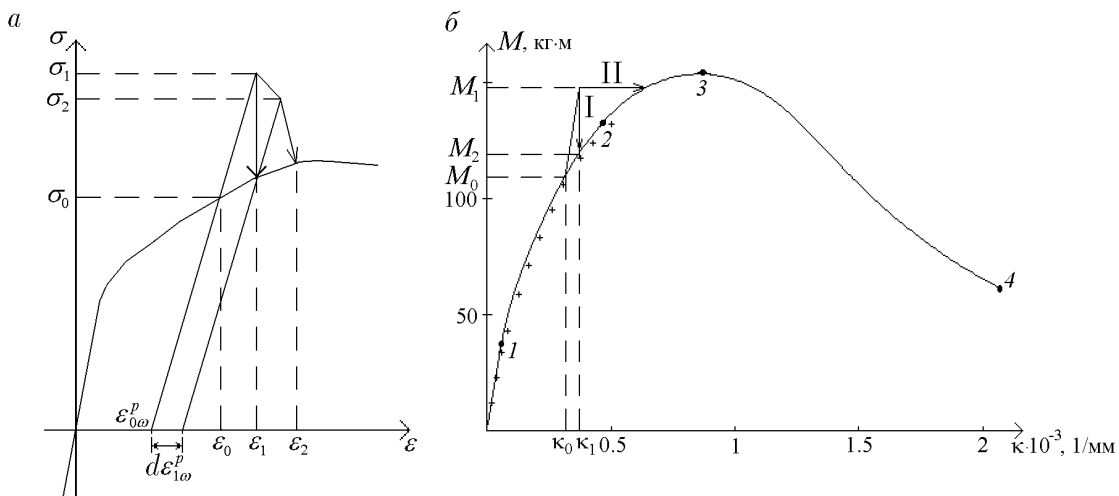


Рис. 2.

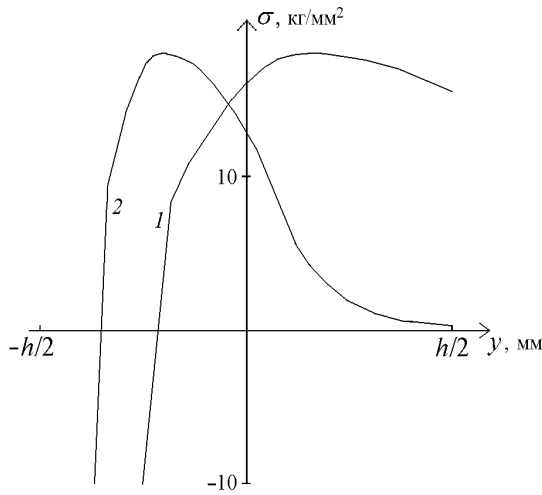


Рис. 3.

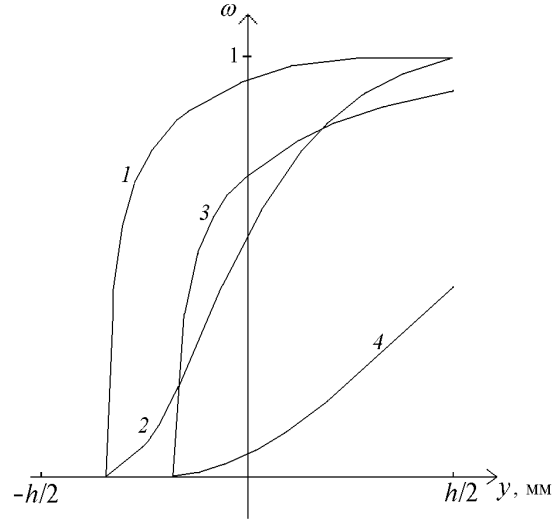


Рис. 4.

$\Delta\kappa$  ( $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa$ ). Получаем

$$\varepsilon'_1 = \Delta\kappa(y + a_0), \quad \sigma'_1 = E_0^s \varepsilon'_1.$$

Тогда первое приближение равно  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon'_1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1$ . Используя затем зависимость  $\sigma(\varepsilon)$ , по величине  $\varepsilon_1(y)$  определяем  $E_1^s(y) = \sigma(\varepsilon_1)/\varepsilon_1$  и по формуле (5), где  $E^u = E_1^s$ , вычисляем значение  $\omega_1$  в каждой точке отрезка  $[-h/2, h/2]$ . Теперь  $a = a_1$ , где

$$a_1 = \left( \int_{-h/2}^{h/2} \omega_1(y) y dy \right) / \left( \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega_1(y)) dy \right).$$

Следующее приближение определяем, решая задачу об изгибе до кривизны  $\kappa_1$  упругой неоднородной балки, свойства материала которой характеризуют секущие модули  $E_1^s$ . Имеем

$$\varepsilon_2 = \kappa_1(y + a_1), \quad \sigma_2 = E_1^s \varepsilon_2.$$

Снова находим  $E^s = E_2^s(y)$ ,  $\omega = \omega_2(y)$ ,  $a = a_2$  и процесс повторяем. Итерации сходятся, так как числовая последовательность  $a_n$  монотонно возрастает и ограничена сверху ( $a_n < h/2$ ). Схематически процесс показан на рис. 5. На рис. 2, б ему отвечает путь I.

По окончании итерационной процедуры вычисляем значение изгибающего момента

$$M_1 = bE \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega(y)) \kappa_1(y + a) y dy,$$

где  $\omega = \lim \omega_n$ ;  $a = \lim a_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Возмутим исходное положение равновесия, увеличив изгибающий момент на  $\Delta M$  ( $M_1 = M_0 + \Delta M$ ). Тогда

$$\varepsilon'_1 = \kappa'_1(y + a_0), \quad \sigma'_1 = E_0^s \varepsilon'_1, \quad \kappa'_1 = \Delta M / \left( b \int_{-h/2}^{h/2} E_0^s(y + a_0) y dy \right)$$

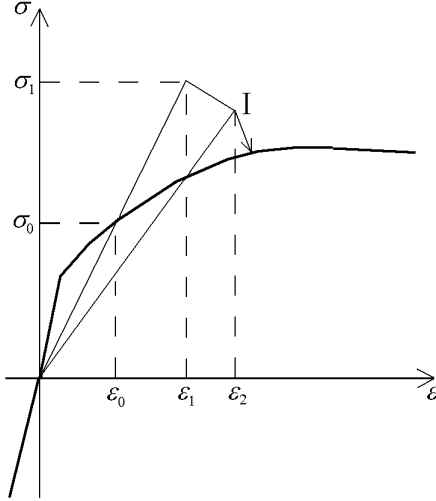


Рис. 5.

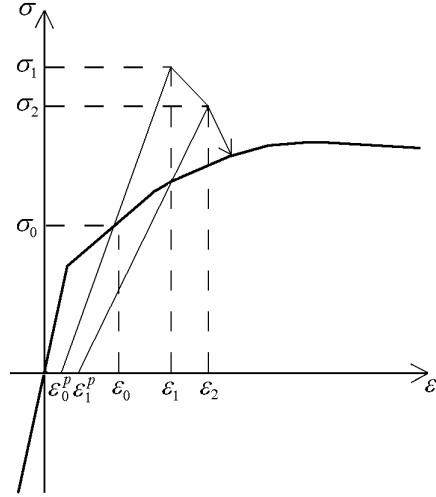


Рис. 6.

и первое приближение равно  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon'_1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_0 + \kappa'_1$ . Как и ранее, определяем  $E_1^s(y)$ ,  $\omega_1(y)$ ,  $a_1$  и второе приближение

$$\varepsilon_2 = \kappa_2(y + a_1), \quad \sigma_2 = E_1^s \varepsilon_2, \quad \kappa_2 = M_1 / \left( b \int_{-h/2}^{h/2} E_1^s(y + a_1) y dy \right).$$

В результате итераций находим, что

$$\kappa_{n+1} = \frac{M_1}{b \int_{-h/2}^{h/2} E_n^s(y + a_n) y dy} = f(\kappa_n), \quad (21)$$

где  $E_n^s = E^s(\varepsilon_n)$ ,  $\varepsilon_n = \kappa_n(y + a_n)$ . На рис. 2, б этому процессу отвечает путь II.

Формула (21) определяет метод простой итерации, который сходится, если  $k = \sup_{\kappa} |df/d\kappa| < 1$  [5], где производная вычисляется в силу условия равновесия

$$M_1 = b\kappa \int_{-h/2}^{h/2} E^s(y + a) y dy$$

и равенств

$$\frac{dE^s}{d\varepsilon} = \frac{d(\sigma/\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{E^p - E^s}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \kappa(y + a).$$

Производя необходимые действия, получаем

$$k = 1 - \left( \int_{-h/2}^{h/2} E^p(y + a) y dy \right) / \left( \int_{-h/2}^{h/2} E^s(y + a) y dy \right).$$

4. Исследуем общий случай, когда модуль разгрузки равен  $E^u(\varepsilon_p \neq 0)$ . В исходном положении равновесия имеем

$$\varepsilon_0 = \kappa_0(y + a_0), \quad \sigma_0 = E_0^u(\varepsilon_0 - \varepsilon_0^p) = E(1 - \omega_0)[\kappa_0(y + a_0) - \varepsilon_0^p].$$



Из условия (13) находим

$$a_0 = \frac{1}{\kappa_0} \left( \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega_0(y)) \varepsilon_0^p(y) dy + \kappa_0 \int_{-h/2}^{h/2} \omega_0(y) y dy \right) / \left( \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega_0(y)) dy \right).$$

При жестком догружении ( $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa$ ) сначала при фиксированных  $\omega_0, \varepsilon_0^p$  получаем

$$\varepsilon'_1 = \Delta\kappa(y + a_0), \quad \sigma'_1 = E_0^u \varepsilon'_1$$

и первое приближение  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon'_1, \sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1$ . Аналогично изложенному выше вычисляем  $E_1^u(y), \omega_1(y)$ . Затем определяем  $\varepsilon_1^p$ . Для этого используем приближенное решение уравнения (7) на отрезке  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ . Имеем

$$d\varepsilon_1^p = \left( 1 - \frac{E_0^p}{E_0^u} \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) - \left( 1 - \frac{E_1^u}{E_0^u} \right) (\varepsilon_0 - \varepsilon_0^p). \quad (22)$$

Тогда  $\varepsilon_1^p = \varepsilon_0^p + d\varepsilon_1^p$ . Далее вычисляем

$$a_1 = \frac{1}{\kappa_1} \left( \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega_1) \varepsilon_1^p dy + \kappa_1 \int_{-h/2}^{h/2} \omega_1 y dy \right) / \left( \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega_1) dy \right) \quad (23)$$

и второе приближение

$$\varepsilon_2 = \kappa_1(y + a_1), \quad \sigma_2 = E_1^u(\varepsilon_2 - \varepsilon_1^p).$$

Снова находим  $E_2^u(y), \omega_2(y), \varepsilon_2^p(y), a_2$  и процесс повторяем. Итерации сходятся, так как последовательность  $a_n$  монотонно возрастает и ограничена сверху. Схематически процесс показан на рис. 6. На рис. 2, б ему отвечает путь I.

В заключение вычисляем значение изгибающего момента

$$M_1 = bE \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \omega(y)) [\kappa_1(y + a) - \varepsilon^p(y)] y dy,$$

где  $\omega = \lim \omega_n; a = \lim a_n; \varepsilon^p = \lim \varepsilon_n^p (n \rightarrow \infty)$ .

Произведем мягкое догружение ( $M_1 = M_0 + \Delta M$ ). Имеем

$$\varepsilon'_1 = \kappa'_1(y + a_0), \quad \sigma'_1 = E_0^u \varepsilon'_1, \quad \kappa'_1 = \Delta M / \left( b \int_{-h/2}^{h/2} E_0^u(y + a_0) y dy \right).$$

Первое приближение  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon'_1, \sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1, \kappa_1 = \kappa_0 + \kappa'_1$ . Определяем  $E_1^u(y), \omega_1(y)$  и с использованием формул (22), (23) — значения  $\varepsilon_1^p(y), a_1$ . Находим второе приближение

$$\varepsilon_2 = \kappa_2(y + a_1), \quad \sigma_2 = E_1^u[\kappa_2(y + a_1) - \varepsilon_1^p],$$

$$\kappa_2 = \left( M_1 + b \int_{-h/2}^{h/2} E_1^u \varepsilon_1^p y dy \right) / \left( b \int_{-h/2}^{h/2} E_1^u(y + a_1) y dy \right).$$

В результате итераций имеем

$$\kappa_{n+1} = \frac{M_1 + b \int_{-h/2}^{h/2} E_n^u \varepsilon_n^p y dy}{b \int_{-h/2}^{h/2} E_n^u (y + a_n) y dy} = \varphi(\kappa_n),$$

где  $E_n^u = E^u(\varepsilon_n)$ ,  $\varepsilon_n = \kappa_n(y + a_n)$ . Итерационный процесс, показанный на рис. 2, б, отвечает пути II.

Вычислим производную функции  $\varphi(\kappa)$  в силу условия равновесия

$$M_1 = b \int_{-h/2}^{h/2} E^u(\varepsilon - \varepsilon^p) y dy$$

и уравнения (7). Производя необходимые действия, получим

$$k = \frac{d\varphi}{d\kappa} = 1 - \left( \int_{-h/2}^{h/2} E^p(y + a) y dy \right) / \left( \int_{-h/2}^{h/2} E^u(y + a) y dy \right).$$

Отметим, что при  $E^u = E$  условие  $k < 1$  эквивалентно условию  $c_k < 1$ , приведенному в п. 2.

Расчет чугунной балки при  $E^u = (0.6 + 0.4 \cos(50\varepsilon))E$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 0.07$  (см. рис. 1, б, кривая B) дает тот же результат, что и в п. 2. Данная функция изменения модуля разгрузки является аппроксимацией экспериментальных данных, полученных при периодических разгрузках растягиваемого чугунного образца.

## Список литературы

- [1] СТРУЖАНОВ В. В., ЖИЖЕРИН С. В. Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчета напряженного состояния при кручении // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, №2. С. 92–104.
- [2] ТИМОШЕНКО С. П., ГЕРЕ ДЖ. Механика материалов. М.: Мир, 1976.
- [3] СЕДОВ Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970.
- [4] ВЛАДИМИРОВ А. П., СТРУЖАНОВ В. В. Исследование раскрытия трещины после скачкообразного подрастания методами лазерной интерферометрии // Физика металлов и металловедение. 1986. Т. 62, №5. С. 1029–1032.
- [5] КОЛМОГОРОВ А. Н., ФОМИН С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

*Поступила в редакцию 27 ноября 2000 г.,  
в переработанном виде — 25 апреля 2001 г.*