Вычислительные технологии **Том 2, № 1, 1997**

ОДИН СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ФАКТОРА СХОДИМОСТИ ПОЛНОШАГОВОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СЛАУ*

М. А. Ляшко
Государственный педагогический институт
Балашов, Россия

Для специального класса интервальных линейных систем $x = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$ дается нижняя оценка асимптотического фактора сходимости α_T полношагового метода $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$. Показано, что эта оценка почти всегда совпадает с точным значением α_T.

Основные обозначения

В настоящей статье интервалы и интервальные величины обозначим жирным шрифтом: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ Для других объектов будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{IR}$ — множество вещественных интервалов;

$\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}$ — левый и правый конец интервала $\mathbf{x}$ соответственно, так что $\mathbf{x}:=[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$, $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$, $\underline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{x}}$;

$\mathbb{R}^n$ — множество n-мерных вещественных векторов;

$\mathbb{IR}^n$ — множество n-мерных интервальных векторов;

$\mathbb{R}^{m\times n}$ — множество вещественных $m\times n$-матриц;

$\mathbb{IR}^{m\times n}$ — множество интервальных $m\times n$-матриц;

$|\mathbf{x}|:=\max\{|\underline{\mathbf{x}}|, |\overline{\mathbf{x}}|\}$ — модуль интервала $\mathbf{x}$;

$|\mathbf{A}|$ — вещественная $m\times n$-матрица, составленная из модулей интервальных элементов матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$;

$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}):=\max\left\{|\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mathbf{y}}|, |\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{y}}|\right\}$ — расстояние между интервалами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$;

если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$, то под записью $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ подразумевается n-мерный вещественный вектор, компонентами которого являются расстояния между соответствующими интервальными компонентами векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$;

$\rho(A)$ — спектральный радиус вещественной квадратной матрицы A.

1. Введение

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$x = Ax + b, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

о которой известно, что элементы матрицы A могут принимать любые значения, принадлежащие соответствующим интервальным элементам матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, а компоненты вектора b — соответствующим интервальным компонентам вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$. Возникающее при этом множество систем можно обозначить одной формальной записью

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n \tag{1}$$

и назвать “интервальной системой линейных алгебраических уравнений". Предметом исследования в данной работе является скорость сходимости индуцированного системой (1) полношагового итерационного метода

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{IR}^n, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \qquad k = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{2}$$

к интервальному вектору $\mathbf{x}^* = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$, являющемуся неподвижной точкой отображения $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ и, следовательно, удовлетворяющему равенству

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}. \tag{3}$$

Поскольку при подстановке $\mathbf{x}^*$ в правую часть уравнения (1) и выполнении всех арифметических операций по правилам классической интервальной арифметики снова получается вектор $\mathbf{x}^*$, то при условии сходимости последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ интервальный вектор $\mathbf{x}^*$ является *алгебраическим решением* системы (1). Для сходимости метода (2) необходимо и достаточно [1], чтобы

$$\rho(|\mathbf{A}|) < 1.$$

Итерационную процедуру (2) на множестве $\mathbb{IR}^n$ интервальных векторов по аналогии с соответствующим итерационным методом в $\mathbb{R}^n$ можно отнести к так называемым одношаговым стационарным методам, которые в общем виде можно записать как

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{IR}^n, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Скорость сходимости последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ к $\mathbf{x}^* = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$ оценивается с помощью асимптотического фактора сходимости, являющегося обобщением понятия R_1-множителя (или множителя сходимости по корням) для последовательностей точечных векторов [2].

Определение 1. *Пусть $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}^*)$ и пусть $\mathcal{G}$ — множество всех последовательностей $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, вычисленных по формуле (4) и удовлетворяющих условию $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$. Тогда величина*

$$\alpha = \sup\left\{\limsup_{k\to\infty} \|q(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*)\|^{1/k} \mid \{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{G}\right\}$$

называется асимптотическим фактором сходимости итераций (4) к точке $\mathbf{x}^*$. (Здесь $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, а α не зависит от выбранной нормы.)

Хорошо известно [2], что в вещественном случае метод, аналогичный методу (2),

$$\begin{aligned} &x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \\ &x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b, \qquad k = 0, 1, \ldots, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

глобально сходится к решению системы $x = Ax + b$ тогда и только тогда, когда $\rho(A) < 1$, при этом $R_1 = \rho(A)$. Для асимптотического же фактора сходимости метода (2), обозначаемого α_T, в [1] была доказана только верхняя оценка:

$$\alpha_T \leq \rho(|\mathbf{A}|). \tag{5}$$

Чтобы доказать равенство в оценке (5), в [1] предлагалось найти начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$, для которого имело бы место соотношение

$$\limsup_{k \to \infty} \|q(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*)\|^{1/k} = \rho(|\mathbf{A}|).$$

В некоторых конкретных случаях удалось найти вид такого начального приближения, но равенство $\alpha_T = \rho(|\mathbf{A}|)$ в общем случае не было доказано. Как показали дальнейшие исследования, это равенство выполняется не всегда. В частности, Г. Майер привел [3] и доказал [4] необходимые и достаточные условия выполнения строгого неравенства $\alpha_T < \rho(|\mathbf{A}|)$ для $\mathbf{A}$ с неотрицательными интервальными коэффициентами (то есть с $\underline{\mathbf{a}}_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1, n}$) и неразложимой матрицей $|\mathbf{A}|$. Насколько известно автору, до настоящего времени не получен универсальный способ вычисления α_T и асимптотических факторов сходимости других одношаговых стационарных методов. Имеются результаты, касающиеся сравнения факторов сходимости различных методов для упомянутого случая [5] и для других [6], [7], но при достаточно жестких условиях на систему (1).

В настоящей работе указывается способ определения точного значения α_T, основывающийся на изучении поведения итерационного процесса (2) в некоторой окрестности решения $\mathbf{x}^*$ (раздел 2), а затем на основе полученного результата для достаточно широкого класса систем доказывается способ вычисления α_T без учета информации о решении, то есть только по виду исходной системы (1) (раздел 3). Предложенный подход может быть распространен на другие интервальные итерационные методы.

2. Вычисление точного значения асимптотического фактора сходимости α_T

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{IR}$, $\mathbf{a} = [\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]$, $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$. Тогда в интервальной арифметике

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = [\min(\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}), \max(\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}})] = [\underline{\mathbf{ax}}, \overline{\mathbf{ax}}].$$

Рассмотрим случай (назовем его невырожденным),когда левый $\underline{\mathbf{ax}}$ и правый $\overline{\mathbf{ax}}$ концы произведения $\mathbf{ax}$ определяются однозначно, то есть когда $\min(\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{ax}}$ и $\max(\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{ax}}$ достигаются лишь для одного из четырех значений $\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}$. Совершенно очевидно, что для достаточно близкого к $\mathbf{x}$ интервала $\mathbf{y} = [\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}]$, в формировании левого конца $\underline{\mathbf{ay}}$ произведения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$ участвует тот же самый конец интервала $\mathbf{a}$ ($\underline{\mathbf{a}}$ или $\overline{\mathbf{a}}$), который формирует и левый конец $\underline{\mathbf{ax}}$ произведения $\mathbf{ax}$. То же самое выполняется и для $\overline{\mathbf{ay}}$. Исключение могут составить вырожденные случаи, когда $\underline{\mathbf{ax}}$ или $\overline{\mathbf{ax}}$

достигаются сразу для нескольких из чисел $\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}$. Например, вырожденным будет случай, когда

$$\mathbf{a} = [-0.8, 0.5], \quad \mathbf{x} = [-0.1, 0.16].$$

Здесь

$$\mathbf{ax} = [-0.128, 0.08]; \quad \overline{\mathbf{ax}} = \underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}} = -0.8 \cdot (-0.1) = 0.08$$

$$\text{или } \overline{\mathbf{ax}} = \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}} = 0.5 \cdot 0.16 = 0.08.$$

Поэтому для достаточно малой величины $\delta > 0$ имеем

$$[-0.8, 0.5] \cdot [-0.1 - \delta, 0.16] = [-0.8 \cdot 0.16, -0.8 \cdot (-0.1 - \delta)]$$

и

$$[-0.8, 0.5] \cdot [-0.1, 0.16 + \delta] = [-0.8 \cdot (0.16 + \delta), 0.5 \cdot (0.16 + \delta)].$$

Видно, что в данном примере для интервала, достаточно близкого к $\mathbf{x}$, в формировании правого конца произведения $\mathbf{a}$ на этот интервал может участвовать как левый, так и правый конец интервала $\mathbf{a}$.

В невырожденном случае произведение интервалов $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$ можно представить однозначно в виде произведения вещественной 2×2-матрицы и вещественного 2-мерного вектора, первая компонента которого равна $\underline{\mathbf{x}}$, а вторая — $\overline{\mathbf{x}}$; компоненты результирующего вектора — соответственно $\underline{\mathbf{ax}}$ и $\overline{\mathbf{ax}}$:

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{ax}} \\ \overline{\mathbf{ax}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Элементы 2×2-матрицы $a_{ij} \in \{0, \underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}\}$, $i, j = 1, 2$, причем один из элементов каждой строки обязательно равен нулю. Произведение $\mathbf{ay}$ того же самого интервала $\mathbf{a}$ и достаточно близкого к $\mathbf{x}$ интервала $\mathbf{y}$ также может быть представлено в виде

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{ay}} \\ \overline{\mathbf{ay}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} \\ \overline{\mathbf{y}} \end{pmatrix},$$

где 2×2-матрица совпадает с матрицей из равенства (6).

Обозначим через $W(\mathbf{A})$ множество векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$, таких что в произведениях $\mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{x}_j$ элементов матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ из системы (1) и компонент вектора $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_j)_{j=1}^n$ не встречается вырожденных случаев при $i, j = \overline{1, n}$. Далее, пусть в уравнении (3) $\mathbf{x}^* \in W(\mathbf{A})$. Тогда в некоторой окрестности решения $\mathbf{x}^*$ в процессе формирования левых и правых концов компонент интервального вектора, являющегося очередным приближением в методе (2), будут участвовать соответственно те же самые концы коэффициентов $\mathbf{a}_{ij}$, которые формируют и концы компонент решения $\mathbf{x}^*$. В этом случае от интервальной n-матрицы $\mathbf{A}$ и интервальных n-векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{x}^*$ можно перейти к обычным точечным $2n\times2n$-матрице $A(\mathbf{x}^*)$ и $2n$-векторам b и x^*, которые будут выглядеть следующим образом:

$$x^* = (\underline{\mathbf{x}}_1^*, \overline{\mathbf{x}}_1^*, \underline{\mathbf{x}}_2^*, \overline{\mathbf{x}}_2^*, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n^*, \overline{\mathbf{x}}_n^*)^\top, \quad b = (\underline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \overline{\mathbf{b}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{b}}_n, \overline{\mathbf{b}}_n)^\top.$$

Такая замена соответствует отображению

$$\sigma\colon \mathbb{IR}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \quad \sigma(\mathbf{x}) = x = (\underline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_n)^\top.$$

Коэффициенты a_{ij}, $i, j = \overline{1, 2n}$, вещественной $2n{\times}2n$-матрицы $A(\mathbf{x}^*)$ определяются с помощью равенства

$$\sigma(\mathbf{A}\mathbf{x}^*) = A(\mathbf{x}^*) \cdot \sigma(\mathbf{x}^*).$$

Поэтому $A(\mathbf{x}^*)$ удовлетворяет соотношению

$$x^* = A(\mathbf{x}^*) \cdot x^* + b, \tag{7}$$

что, по существу, является другой записью равенства (3), а для элементов последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, порождаемой начальным вектором $\mathbf{x}^{(0)}$ из достаточно малой окрестности $\mathbf{x}^*$ и итерационным процессом (2), выполняются равенства

$$A(\mathbf{x}^*) \cdot (\underline{\mathbf{x}}_1^{(k)}, \overline{\mathbf{x}}_1^{(k)}, \underline{\mathbf{x}}_2^{(k)}, \overline{\mathbf{x}}_2^{(k)}, \ \ldots, \ \underline{\mathbf{x}}_n^{(k)}, \overline{\mathbf{x}}_n^{(k)})^\top + b =$$

$$(\underline{\mathbf{x}}_1^{(k+1)}, \overline{\mathbf{x}}_1^{(k+1)}, \underline{\mathbf{x}}_2^{(k+1)}, \overline{\mathbf{x}}_2^{(k+1)}, \ \ldots, \ \underline{\mathbf{x}}_n^{(k+1)}, \overline{\mathbf{x}}_n^{(k+1)})^\top.$$

Для определения структуры матрицы $A(\mathbf{x}^*)$ выпишем равенство (3) по строкам:

$$\mathbf{x}_i^* = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Из сопоставления (7) и (8) следует, что матрица $A(\mathbf{x}^*)$ состоит из n^2 блоков $2{\times}2$. При этом, как видно из равенства (8), ij-й блок $2{\times}2$ соответствует распределению концов интервала $\mathbf{a}_{ij}$ при умножении на $\mathbf{x}_j^*$ для формирования концов $\mathbf{x}_i^*$. Например, при $\overline{\mathbf{a}}_{ij} < 0$ и $\mathbf{x}_j^* \ni 0$ $\quad ij$-й блок $2{\times}2$ матрицы $A(\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -|\mathbf{a}_{ij}| \\ -|\mathbf{a}_{ij}| & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{a}}_{ij} \\ \underline{\mathbf{a}}_{ij} & 0 \end{pmatrix},$$

так как в этом случае $|\mathbf{a}_{ij}| = -\underline{\mathbf{a}}_{ij}$ и $[\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}] \cdot [\underline{\mathbf{x}}_j^*, \overline{\mathbf{x}}_j^*] = [\underline{\mathbf{a}}_{ij}\, \overline{\mathbf{x}}_j^*, \underline{\mathbf{a}}_{ij}\, \underline{\mathbf{x}}_j^*]$, откуда

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^*} \\ \overline{\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{a}}_{ij} \\ \underline{\mathbf{a}}_{ij} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_j^* \\ \overline{\mathbf{x}}_j^* \end{pmatrix}.$$

В работе [8] доказано

Предложение. $\alpha_T = \rho(A(\mathbf{x}^*))$.

Как видим, в этом случае для определения α_T необходимо найти решение. Гораздо более привлекательной кажется возможность нахождения значения α_T по виду исходной системы, то есть только с использованием информации об $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$. В следующем разделе для некоторого достаточно широкого класса систем строится способ нахождения по виду исходной системы эффективной нижней оценки α_T, которая почти всегда является точной.

3. Основной результат

В силу того, что в невырожденном случае левый $\underline{\mathbf{ax}}$ и правый $\overline{\mathbf{ax}}$ концы произведения $\mathbf{ax}$ определяются однозначно, выполняются 6 строгих неравенств:

$$\begin{aligned} &)\quad \underline{\mathbf{ax}} < \{\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}\} \setminus \underline{\mathbf{ax}}, \\ &)\quad \overline{\mathbf{ax}} > \{\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}\} \setminus \overline{\mathbf{ax}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где под записью $a)$ подразумеваются 3 строгих неравенства с наименьшим из элементов $\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}$ в левой части и с каждым из 3-х оставшихся элементов множества $\{\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}\}$ после удаления из него минимального элемента в правой части. Запись) истолковывается аналогично. Для неравенств типа (9), получающихся при рассмотрении произведения произвольных интервалов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$ в невырожденном случае, введем краткую запись $s(\mathbf{a},\mathbf{x})$. Например, для $\mathbf{a} = [-2, 1]$, $\mathbf{x} = [3, 7]$ запись $s(\mathbf{a},\mathbf{x})$ обозначает такие неравенства:

$$\begin{array}{rcr} -2\cdot 7 & < & -2\cdot 3, \\ -2\cdot 7 & < & 1\cdot 3, \\ -2\cdot 7 & < & 1\cdot 7, \\ 1\cdot 7 & > & -2\cdot 7, \\ 1\cdot 7 & > & -2\cdot 3, \\ 1\cdot 7 & > & 1\cdot 3. \end{array}$$

Для матрицы $\mathbf{A}$ метода (2) выберем произвольный вектор $\mathbf{x} \in W(\mathbf{A})$. Тогда для всех $i, j = \overline{1, n}$ можно записать неравенства $s(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{x}_j)$. Заменяя в каждом из них значение $\underline{\mathbf{x}}_j$ на переменную x_{2j-1}, а $\overline{\mathbf{x}}_j$ — на x_{2j} и объединяя полученные неравенства, получим систему $S_1(\mathbf{A},\mathbf{x})$ из $6n^2$ линейных неравенств, решением которой является конус $\Omega_1(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^{2n}$ (то есть $\Omega_1(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ содержит вместе с каждым своим элементом z все элементы вида λz при любом $\lambda > 0$). Заметим, что во множество $\Omega_1(\mathbf{x})$ попадают те и только те точки y из $\mathbb{R}^{2n}$, прообразы которых $\mathbf{y}$ при отображении σ удовлетворяют равенству $A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x})$. Далее, заменим во всех неравенствах $s(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{x}_j)$ значение $\underline{\mathbf{x}}_j$ на выражение $\sum_{k=1}^{2n} a_{2j-1,k}\cdot x_k + b_{2j-1}$, а $\overline{\mathbf{x}}_j$ — на $\sum_{k=1}^{2n} a_{2j,k}\cdot x_k + b_{2j}$ и снова объединим полученные неравенства в систему. Новую систему $6n^2$ линейных неравенств с $2n$ переменными обозначим $S_2(\mathbf{A},\mathbf{x})$, а множество ее решений — $\Omega_2(\mathbf{x})$. Если $\Omega_1(\mathbf{x}) \subset \Omega_2(\mathbf{x})$, то обозначим $\Omega_1(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{x})$, в противном случае будем считать, что $\Omega(\mathbf{x})$ не существует.

Теорема. *Пусть в системе (1) вектор* $\mathbf{b} \in W(\mathbf{A})$. *Если* $\Omega(\mathbf{b})$ *существует, то* $\alpha_T \geq \rho(A(\mathbf{b}))$. *Если к тому же* $\mathbf{x}^* \in W(\mathbf{A})$, *то* $\alpha_T = \rho(A(\mathbf{b}))$.

Лемма 1. *Если для некоторого* $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$ *точка* $\sigma(\mathbf{y}) \in \Omega(\mathbf{x})$, *то и* $\sigma(\mathbf{Ay} + \mathbf{b}) \in \Omega(\mathbf{x})$.

Доказательство леммы 1. Пусть $y = \sigma(\mathbf{y})$ и пусть $y \in \Omega(\mathbf{x})$. Тогда $y \in \Omega_1(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{x})$, то есть $A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x})$. Но так как $y \in \Omega_2(\mathbf{x})$, то $A(\mathbf{Ay} + \mathbf{b}) = A(\mathbf{x})$ и $\sigma(\mathbf{Ay} + \mathbf{b}) \in \Omega(\mathbf{x})$.

Применяя эти рассуждения, можно показать, что если для какого-либо $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{IR}^n$ выполняется включение $\sigma(\mathbf{x}^{(0)}) \in \Omega(\mathbf{x})$, то $\sigma(\mathbf{Ax}^{(0)} + \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{x}^{(1)}) \in \Omega(\mathbf{x})$ и т.д. Таким образом, если для какого-либо $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{IR}^n$ из метода (2) множество $\Omega(\mathbf{x}^{(0)})$ существует , то $\Omega(\mathbf{x}^{(0)})$ содержит все образы элементов последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$.

Лемма 2. *Если в системе (1) вектор* $\mathbf{b} \in W(\mathbf{A})$, *то либо* $\Omega(\mathbf{b})$ *существует, либо* $\Omega(\mathbf{x})$ *не существует ни для каких* $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$. (*Иными словами, если для какого-либо* $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ *множество* $\Omega(\mathbf{x})$ *существует и* $\mathbf{b} \in W(\mathbf{A})$, *то* $\sigma(\mathbf{b}) \in \Omega(\mathbf{x})$).

Доказательство леммы 2. Предположим противное: существует $\Omega(\mathbf{x})$, но $b = \sigma(\mathbf{b})$ не принадлежит $\Omega(\mathbf{x}) = \Omega_1(\mathbf{x})$, поэтому b не принадлежит и замыканию $\Omega(\mathbf{x})$, поскольку $\mathbf{b} \in W(\mathbf{A})$. Следовательно, существует окрестность $O(b)$ точки b, не пересекающаяся с $\Omega(\mathbf{x})$. Поскольку $\mathbf{A}\cdot\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$ и операции интервальной арифметики непрерывны, то существует окрестность $O(0)$ точки 0, такая что $U(O(0)) \subset O(b)$, где

$$U(O(0)) = \left\{\sigma(\mathbf{x}^{(1)}) \mid \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{Ax}^{(0)} + \mathbf{b},\ \sigma(\mathbf{x}^{(0)}) \in O(0)\right\}.$$

Но в $O(0)$ есть точки из $\Omega(\mathbf{x})$, что противоречит лемме 1.

Заметим, что из доказанной леммы вытекает единственность $\Omega(\mathbf{x})$, то есть $\Omega(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{b})$.

Доказательство теоремы. Из леммы 1, свойств $\mathbf{x}^*$ и определения α_T вытекает утверждение: если для какого-либо вектора $\mathbf{x} \in W(\mathbf{A})$ множество $\Omega(\mathbf{x})$ существует, то $\alpha_T \geq \rho(A(\mathbf{x}))$. Из леммы 2 следует, что, не теряя общности, в этом утверждении можно положить $\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Чтобы доказать вторую часть теоремы, воспользуемся предположением, что $\mathbf{x}^* \in W(\mathbf{A})$. Но тогда из леммы 1 и свойств $\mathbf{x}^*$ следует, что $A(\mathbf{b}) = A(\mathbf{x}^*)$, и заключение теоремы следует из Предложения.

Пример. В системе

$$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cdot \mathbf{x}^* + [1, 2] = \mathbf{x}^*$$

$\mathbf{b} \in W(\mathbf{A})$ и матрица

$$A(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому в качестве $S_1(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ получим

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \cdot x_2 & < & -\frac{1}{3} \cdot x_1, \\ -\frac{1}{3} \cdot x_2 & < & \frac{1}{2} \cdot x_1, \\ -\frac{1}{3} \cdot x_2 & < & \frac{1}{2} \cdot x_2, \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 & > & \frac{1}{2} \cdot x_1, \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 & > & -\frac{1}{3} \cdot x_1, \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 & > & -\frac{1}{3} \cdot x_2. \end{cases}$$

Конус $\Omega_1(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^{2n}$ является множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} x_2 & > & x_1, \\ x_2 & > & -\frac{3}{2} \cdot x_1. \end{cases}$$

В качестве $S_2(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ получим

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right) & < & -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}x_2 + 1\right), \\ -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right) & < & \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}x_2 + 1\right), \\ -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right) & < & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right), \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right) & > & \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}x_2 + 1\right), \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right) & > & -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}x_2 + 1\right), \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right) & > & -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}x_2 + 2\right). \end{cases}$$

Множество $\Omega_2(\mathbf{b})$ в $\mathbb{R}^{2n}$ является множеством решений неравенства $x_2 > -\frac{6}{5}$. Следовательно, $\Omega(\mathbf{b})$ существует, и имеет место оценка

$$\alpha_T \geq \rho(A(\mathbf{b})) = \frac{1}{2}.$$

В этом примере $\alpha_T = \rho(A(\mathbf{b}))$, поскольку $\mathbf{x}^* = \left[-\frac{1}{3}, 4\right] \in W(\mathbf{A})$ (здесь равенство для α_T следует также из оценки (5)).

Ясно, что $\mathbf{x}^* \in W(\mathbf{A})$ почти всегда. Полученный результат можно усилить: в условии $\Omega_1(\mathbf{x}) \subset \Omega_2(\mathbf{x})$ вместо $\Omega_1(\mathbf{x})$ можно взять пересечение $\Omega_1(\mathbf{x})$ и шара с центром в начале координат и радиусом

$$|\sigma(\mathbf{b})|/(1-\rho(A(\mathbf{b})))$$

и в качестве $\Omega(\mathbf{x})$ выбрать это пересечение. В данном случае проверка существования $\Omega(\mathbf{b})$ легко алгоритмизируется.

Заметим, что если $\mathbf{b} \in W(\mathbf{A})$ и $\Omega(\mathbf{b})$ существует, то $x^* = \sigma(\mathbf{x}^*)$ может быть найдено как алгебраическое решение точечной системы

$$x = A(\mathbf{b})x + \sigma(\mathbf{b}).$$

Список литературы

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* Мир, М., 1987.

[2] Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* Мир, М., 1975.

[3] Mayer G. On the speed of convergence of the total step method in interval computations. In: *"Numerical Approximation of Partial Differential Equation"* Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1987, 181–189.

[4] Mayer G. On the asymptotic convergence factor of the total step method in interval computation. *Lin. Alg. Appl.* **85**, 1987, 153–164.

[5] Mayer G. On a theorem of Stein-Rosenberg type in interval analysis. *Numer. Math.* **50**, 1986, 17–26.

[6] Mayer G. Comparison theorems for iterative methods based on strong splittings. *SIAM J. Numer. Anal.* **24**, 1987, 215–227.

[7] Mayer G. Enclosing the solutions of systems of linear equations by interval iterative processes. *Computing Suppl.* **6**, 1988, 47–58.

[8] **Ляшко М. А.** *О скорости сходимости полношагового итерационного метода для интервальных СЛАУ.* Деп. в ВИНИТИ 08.02.96, №430–В96.