

НОВЫЙ МЕТОД ГИУ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ*

А. О. ВАТУЛЯН, О. В. КОВАЛЕВ

Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону, Россия

e-mail: Vatulyan@mail.tp.ru, kov@metod.ru

А. Н. СОЛОВЬЕВ

Донской государственный технический университет

Ростов-на-Дону, Россия

e-mail: soloviev@math.rsu.ru

New methods for solving boundary value problems for elliptical operators are developed. The original problems are reduced to systems of non-classical boundary integral equations of the first kind with smooth kernels as distinct from the classical singular boundary integral equations. Some approaches to the numerical solution of these systems on the base of combination of spline approximation and regularization methods are discussed. Numerical examples are provided.

Введение

Пусть $\Omega \subset R^n$ ($n = 2, 3$) — ограниченная односвязная область, звездная относительно некоторого шара, с кусочно-гладкой границей Γ . В области Ω рассмотрим краевую задачу для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами:

$$L_{qj}u_j = (a_{qjml}\partial_m\partial_l + k^2\lambda_q\delta_{qj})u_j, \quad q, j = 1, \dots, N, \quad m, l = 1, \dots, n, \quad a_{qjml}, k, \lambda_q \in R, \quad (1)$$

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t, \quad u_q|_{\Gamma_u} = u_q^0, \quad M_{qj}u_j|_{\Gamma_t} = t_q^0, \quad (2)$$

где $M_{qj} = a_{qjml}n_l\partial_m$, n_m — компоненты вектора внешней единичной нормали к поверхности Γ . Будем считать, что главная часть оператора L_{qj} является эллиптической, т. е. $\det\{a_{qjml}t_mt_l\} \neq 0$ для одновременно не равных нулю t_m .

Сформулированная выше задача часто используется при математическом моделировании различных явлений и процессов в естествознании. К этому классу операторов относятся операторы Лапласа и Гельмгольца, операторы, описывающие равновесие и установившиеся колебания в анизотропной теории упругости, электроупругости, магнитоупругости и других моделях сплошной среды. Для большинства краевых задач для этих операторов

*Частичная поддержка Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №00-15-96087, №99-01-01011.

© А. О. Ватульян, О. В. Ковалев, А. Н. Соловьев, 2002.

в случае сложной геометрии области Ω точное решение построить не удастся и возникает проблема эффективного численного анализа задачи. В настоящее время наиболее распространенными являются метод конечных разностей, метод конечных элементов, а также метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и основанный на нем метод граничных элементов. Основным достоинством метода ГИУ является снижение размерности исследуемой задачи на единицу.

Родоначальником метода ГИУ можно назвать Фредгольма, который впервые свел краевую задачу для оператора Лапласа к интегральному уравнению по границе области, используя понятие фундаментального решения и теоремы о потенциалах простого и двойного слоев. Дальнейшее развитие этого метода получил в работах грузинской школы математиков, возглавляемой В. Д. Купрадзе. В этих работах построены и исследованы системы ГИУ для задач изотропной теории упругости и термоупругости [?, ?]. В 70–80-х годах метод ГИУ в его дискретном варианте — метод граничных элементов (МГЭ – англ. ВЕМ) — стал бурно развиваться в западных странах, был распространен на некоторые классы нелинейных задач на основе метода последовательных приближений. Наиболее полное представление о методике и возможностях этого способа можно составить по монографиям [?, ?].

Вывод ГИУ во всех этих случаях опирается на фундаментальные и сингулярные решения соответствующего дифференциального оператора, формулы Грина или Гаусса — Остроградского, основные теоремы, аналогичные теоремам теории потенциала. К сожалению, для многих операторов (анизотропной теории упругости, электроупругости, магнитоэлектроупругости) построить фундаментальные решения в явном виде не удастся; возможно лишь построение их интегрального представления [5–8]. Отсутствие явных представлений ядер интегральных операторов в получаемых системах ГИУ при дискретизации приводит к необходимости вычисления большого количества кратных нерегулярных интегралов, что в значительной степени снижает эффективность МГЭ.

Поэтому в последние годы возрос интерес к построению систем неклассических ГИУ без использования фундаментальных решений [9–15]. Кроме того, для эллиптических операторов в последнее время ставятся неклассические краевые задачи, в которых по переопределенной информации на части границы требуется установить граничные поля на оставшейся части, их решение основано на сведении краевых задач к системам неклассических ГИУ [?, ?]. В настоящей работе обсуждены основные идеи построения систем ГИУ такого вида для произвольных эллиптических операторов типа (1), (2) и некоторые аспекты построения их дискретных аналогов.

1. Построение системы ГИУ 1-го рода

К краевой задаче (1), (2) применим преобразование Фурье с параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, в результате которого относительно трансформант $\hat{u}_j(\alpha)$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_{qj} \hat{u}_j = (a_{qjml} \alpha_m \alpha_l - k^2 \lambda_q \delta_{qj}) \hat{u}_j(\alpha) = V_q(\alpha, k), \quad (3)$$

где

$$V_q(\alpha, k) = \int_{\Gamma} [a_{qjml} (n_m \partial_l - i \alpha_m n_l) u_j(x)] e^{i(\alpha, x)} d\Gamma, \quad \hat{u}_j(\alpha) = \int_{\Omega} u_j(x) e^{i(\alpha, x)} d\Omega.$$

Решим эту систему относительно вектора трансформант Фурье $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\hat{u}_j(\alpha) = \{A^{-1}\}_{jq}(\alpha, k) V_q(\alpha) = \frac{p_{jq}(\alpha, k) V_q(\alpha, k)}{p_0(\alpha, k)}. \quad (4)$$

Здесь $A(\alpha, k)$ — матрица коэффициентов системы (3); $p_{qj}(\alpha, k)$ — компоненты матрицы P , присоединенной к A , которые относительно α_l являются полиномами степени $2N - 2$, $p_0(\alpha, k)$ — полином степени $2N$, равный определителю матрицы A , называемый характеристическим многочленом оператора L .

Согласно основной теореме алгебры, полином $p_0(\alpha, k)$ обращается в нуль на $2N$ многообразиях в C^{n-1} :

$$\alpha_n = \alpha_{ns}(\beta, k), \quad s = 1, 2, \dots, 2N, \quad \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}).$$

Далее для простоты будем считать, что эти многообразия различны (хотя это требование выполняется не всегда — примером этому может служить оператор, возникающий в задачах изотропной теории упругости [?]).

Трансформанта Фурье функции u_j в этом случае является функцией целой, но в то же время представляется через матрицу A^{-1} , в выражении которой в знаменателе стоит характеристический многочлен $p_0(\alpha, k)$, обращающийся в нуль на множествах $\alpha_n = \alpha_{ns}(\beta, k)$. Чтобы удовлетворить требованию аналитичности преобразования Фурье, потребуем равенства нулю на этих множествах также и выражений в числителе правой части (4):

$$\begin{aligned} p_{qj}(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) V_q(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) &= 0, \\ \beta \in C^{n-1}, \quad s = 1, 2, \dots, 2N, \quad q = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

В итоге получается система из $2N^2$ уравнений, но так как функции $\alpha_{ns}(\beta, k)$ — нули детерминанта A , а p_{qr} — компоненты матрицы, присоединенной к A , линейно независимыми из них являются лишь $2N$ уравнений, соответствующих, например, $q = 1$.

Таким образом, связь между значениями функций u_j и t_j на Γ может быть схематично представлена как

$$\int_{\Gamma} K_{sj}^{(1)}(x, \beta) t_j(x) dx - \int_{\Gamma} K_{sj}^{(2)}(x, \beta) u_j(x) dx = 0, \quad \beta \in C^{n-1}, \quad s = 1, 2, \dots, 2N, \quad (6)$$

где

$$K_{sj}^{(1)}(x, \beta) = p_{1j}(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) e^{i(\alpha, x)}, \quad K_{sj}^{(2)}(x, \beta) = p_{1r}(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) a_{rjml} \alpha_m n_l e^{i(\alpha, x)}.$$

С учетом граничных условий система (5) переписывается следующим образом:

$$\int_{\Gamma_u} p_{1j}(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) t_j(x) e^{i(\alpha, x)} d\Gamma - i \int_{\Gamma_t} p_{1r}(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) a_{rjml} \alpha_m n_l u_j(x) e^{i(\alpha, x)} d\Gamma = G_s(\beta), \quad (7)$$

$$G_s(\beta) = - \int_{\Gamma_t} p_{1j}(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) t_j^0(x) e^{i(\alpha, x)} d\Gamma + i \int_{\Gamma_u} p_{1r}(\beta, \alpha_{ns}(\beta, k), k) a_{rjml} \alpha_m n_l u_j^0(x) e^{i(\alpha, x)} d\Gamma.$$

Соотношения (7) можно трактовать как систему граничных интегральных уравнений, которые связывают неизвестные граничные значения u_j на участке Γ_t и t_j — на Γ_u с заданными (см. формулу (2)).

Функции $K_{sj}^{(1)}$ и $K_{sj}^{(2)}$ являются гладкими, следовательно, (7) — это система граничных интегральных уравнений 1-го рода с гладкими ядрами, обращение которой в общем случае является задачей некорректной. Однако при более внимательном рассмотрении можно прийти к выводу об условной корректности этой задачи [?]. Применение специальных регуляризирующих методов приводит к устойчивой процедуре решения системы. В качестве таких методов были выбраны метод регуляризации Тихонова [?] или проекционно-итерационный метода Пейджа — Саундерса [?].

2. Дискретизация системы ГИУ

Дискретизация системы (7) проводилась на основе идеологии метода граничных элементов. Граница области была разбита на элементы $\Gamma_u = \bigcap_{p=1}^{M_1} \Gamma_p$, $\Gamma_t = \bigcap_{p=M_1+1}^{M_2} \Gamma_p$, на которых при помощи некоторых функций формы (линейных, квадратичных, сингулярных) и введения узловых значений строилась аппроксимация неизвестных функций и геометрии границы, так, на элементе Γ_p : $x_r \rightarrow x_{pr}(\tau)$, $u_j(x) \rightarrow u_{pj}(\tau)$, $t_j(x) \rightarrow t_{pj}(\tau)$, где $\tau \in [-1, 1]$. В этом случае дискретный вариант системы (7) с учетом граничных условий (2) выглядит следующим образом:

$$\sum_{p=1}^{M_1} \int_{-1}^1 K_{sj}^{(1)}(x_p(\tau), \beta) t_{pj}(\tau) J_p(\tau) d\tau - \sum_{p=M_1+1}^{M_2} \int_{-1}^1 K_{sj}^{(2)}(x_p(\tau), \beta) u_{pj}(\tau) J_p(\tau) d\tau = G_s(\beta), \quad (8)$$

$$s = 1, 2, \dots, 2N,$$

где $J_p(\tau)$ — якобиан преобразования $x_r \rightarrow x_{pr}(\tau)$.

Напомним, что в этой системе и $K_{sj}^{(1)}$, и $K_{sj}^{(2)}$, и G_s имеют функциональную зависимость от β ($\beta \in C^{n-1}$). Поэтому для получения необходимого количества уравнений относительно узловых неизвестных следует потребовать выполнения системы (8) в некотором наборе точек β_m . Вопрос об оптимальном выборе этого набора точек или способе дискретизации ГИУ (6) и влиянии этих факторов на получаемые численные результаты еще остается открытым.

В качестве способа регуляризации можно использовать как метод регуляризации А. Н. Тихонова, так и метод регуляризации на компактных множествах. Во втором случае можно сузить область искомых решений до некоторого компакта в L_2 и использовать для этого информацию о свойствах решения, известную априори. Классические методы аппроксимации неизвестных функций на элементе обеспечивают принадлежность искомого решения пространству суммируемых или непрерывных функций, хотя известно, что при отсутствии на поверхности Γ особых точек или линий (точек нерегулярности границы, точек смены граничных условий или точек разрыва нагрузки) решение является гладкой функцией [?]. Некоторые способы использования аппроксимаций высокого порядка в таких уравнениях обсуждаются в [?, ?].

Исходя из этого, было предложено аппроксимировать неизвестные функции на участках границы между особыми точками при помощи параметрических сплайнов [?, ?]. Такое приближение обеспечило гладкость искомых функций во внутренних узлах участка

вплоть до второй производной по дуге и непрерывность или сингулярность (в зависимости от вида особой точки) во внешних узлах.

Важным достоинством предложенной схемы МГЭ является то обстоятельство, что коэффициенты, получающиеся при дискретизации алгебраических систем, выписываются в явном виде, что значительно сокращает время расчетов.

3. Примеры

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих предложенный подход.

Пример 1. Краевая задача для оператора Гельмгольца в плоском случае. Задача (1, 2) приобретает вид

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

$$u = u(x_1, x_3), (x_1, x_3) \in \Gamma, \Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t,$$

граничные условия

$$u \Big|_{\Gamma_u} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_t} = f_0.$$

Описанным выше методом получаем ГИУ вида

$$\int_{\Gamma_u} \frac{\partial u}{\partial n} e^{ik(\alpha, x)} ds - ik \int_{\Gamma_t} (\alpha, n) u e^{ik(\alpha, x)} ds = F(\alpha),$$

$$F(\alpha) = - \int_{\Gamma_u} (\alpha, n) u_0 e^{ik(\alpha, x)} ds + ik \int_{\Gamma_t} f_0 e^{ik(\alpha, x)} ds,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \pm \sqrt{1 - \alpha_1^2})$, $\alpha_1 \in C$.

Отметим, что при выборе $\alpha_1 = \cos \varphi$ и $\alpha_3 = \sin \varphi$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) это уравнение подробно исследовано в [?].

Введя аппроксимацию границы линейными элементами

$$\Gamma_u = \bigcap_{p=1}^{M_1} \Gamma_p, \quad \Gamma_t = \bigcap_{p=M_1+1}^{M_2} \Gamma_p, \quad x_i = \theta_{pi} + \beta_{pi} \tau, \quad \tau \in [-1, 1], \quad i = 1, 3,$$

$$\theta_{pi} = \frac{x_{ip+1} + x_{ip}}{2}, \quad \beta_{pi} = \frac{x_{ip+1} - x_{ip}}{2},$$

x_{ip+1} и x_{ip} — координаты соответственно конца и начала элемента Γ_p , а аппроксимацию на них неизвестных функций постоянными

$$u \Big|_{\Gamma_p} = U_p, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_p} = T_p,$$

относительно неизвестных значений функций на элементах U_p и T_p получим систему линейных алгебраических уравнений

$$-ik \sum_{p=1}^{M_1} (\alpha_s, n_p) I_{sp} U_p + \sum_{p=M_1+1}^{M_2} I_{sp} T_p = F(\alpha_s),$$

где $\alpha_s, s=1, 2, \dots, N$, пробегает набор точек, удовлетворяющих соотношению $\alpha_{1s}^2 + \alpha_{3s}^2 = 1$, а I_{sp} равен

$$I_{sp} = J_p \exp(ik(\alpha_s, \theta_p)) 2i \frac{\sin(k(\alpha_s, \beta_p))}{k(\alpha_s, \beta_p)}, \quad J_p = \sqrt{\beta_{p1}^2 + \beta_{p3}^2}.$$

Если же неизвестные функции на элементах аппроксимировать линейными функциями

$$u \Big|_{\Gamma_p} = \frac{1}{2}(1 - \tau)U_p + \frac{1}{2}(1 + \tau)U_{p+1}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_p} = \frac{1}{2}(1 - \tau)T_p + \frac{1}{2}(1 + \tau)T_{p+1}$$

и учитывать их непрерывность, то в предположении гладкости и односвязности участков Γ_u и Γ_t относительно узловых значений U_p и T_p получается следующая система:

$$-ik \sum_{p=1}^{M_1-1} \left[(\alpha_s, n_p) I_{sp}^{(2)} + (\alpha_s, n_{p+1}) I_{sp+1}^{(1)} \right] U_p + \sum_{p=M_1+1}^{M_2-1} \left[I_{sp}^{(2)} + I_{sp+1}^{(1)} \right] T_p + \\ + I_{sM_1+1}^{(1)} T_{M_1} + I_{sM_2}^{(2)} T_{M_2} = F(\alpha_s) + ik(\alpha_s, n_1) I_{s1}^{(1)} u^0 + ik(\alpha_s, n_{M_1}) I_{sM_1}^{(2)} u^0,$$

$$I_{sp}^{(1)} = -iJ_p \exp(ik(\alpha_s, \theta_p)) \left(\frac{\sin(k(\alpha_s, \beta_p))}{k^2(\alpha_s, \beta_p)^2} - \frac{\exp(-ik(\alpha_s, \beta_p))}{k(\alpha_s, \beta_p)} \right), \\ I_{sp}^{(2)} = iJ_p \exp(ik(\alpha_s, \theta_p)) \left(\frac{\sin(k(\alpha_s, \beta_p))}{k^2(\alpha_s, \beta_p)^2} - \frac{\exp(ik(\alpha_s, \beta_p))}{k(\alpha_s, \beta_p)} \right).$$

Заметим, что здесь проявляется одно из важнейших достоинств предложенного метода: все коэффициенты алгебраических систем в отличие от классического МГЭ выписываются в явном виде. Получающиеся системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) оказываются плохо обусловленными; для их решения использован проекционно-итерационный метод Пейджа – Саундерса [?].

Помимо описанных здесь также были построены квадратичные аппроксимации элементов и функций на них (приближение осуществлялось отрезком параболы, проходящей через концы элемента и специально вводимый дополнительный внутренний узел). В этом случае для аппроксимации функций было предложено использовать технику эрмитовых элементов (проводилось сглаживание по первой производной по дуге). Коэффициенты получившихся СЛАУ выражались через интегралы Френеля.

Алгоритмы расчета резонансных частот были протестированы на задаче Дирихле для круга, для которой известны точные их значения, являющиеся нулями функции Бесселя $J_0(z)$. Результаты расчетов показали достаточную точность (погрешность в определении первых трех частот не превышает 1%).

Проведено сравнение различных способов аппроксимации границы и интерполяции неизвестных функций на элементах на примере расчета резонансных частот и определения значений неизвестных граничных значений для уравнения Гельмгольца для эллиптических областей с полюсами a и b , некоторые результаты которого приведены в табл. 1. Здесь номеру I соответствуют результаты, полученные предлагаемым методом, использующим квадратичную аппроксимацию границы и технику эрмитовых элементов, номеру II — методом, использующим квадратичную аппроксимацию как границы, так и функции без сглаживания, номеру III — методом, аппроксимирующим границу квадратичными элементами, а функцию на них — константами, номеру IV — данные линейной и постоянной аппроксимации границы и неизвестных функций.

По времени счета и затрачиваемым машинным ресурсам самый экономичный результат показал метод линейной аппроксимации границы с постоянной или линейной аппроксимацией неизвестных функций.

Т а б л и ц а 1

Расчет резонансных частот (k_1, k_2, k_3) для уравнения Гельмгольца для эллиптических областей с граничным условием $u|_S = 1$ в зависимости от вида аппроксимации и количества элементов

M_2	Эллипс $a = 4, b = 1$				Эллипс $a = 2, b = 1$			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
k_1								
8	1.7091	1.7091	—	—	1.889	1.890	1.895	1.991
12	1.7089	1.7089	1.7091	1.7343	1.888	1.888	1.891	1.952
20	1.7088	1.7088	1.7088	1.7179	1.888	1.888	1.888	1.904
k_2								
10	2.2754	2.2754	2.2332	2.3102	3.1673	3.1673	3.1861	3.2128
20	2.2751	2.2751	2.2754	2.2571	3.1668	3.1668	3.1667	3.1932
60	2.2751	2.2751	2.2751	2.2770	3.1668	3.1668	3.1668	3.1793
k_3								
10	2.8918	2.8998	2.7637	2.9399	4.5665	4.5672	4.6790	—
20	2.8979	2.8979	2.8654	2.9086	4.5658	4.5668	4.5633	4.6034
30	2.8979	2.8979	2.8979	2.9086	4.5668	4.5668	4.5668	4.5826
60	2.8979	2.8979	2.8979	2.9005	4.5668	4.5668	4.5668	4.5712

Заметим, что процедуры решения, использующие сглаживающую аппроксимацию неизвестных функций и квадратичную аппроксимацию границы, оказались наиболее устойчивыми и быстрее всего сходящимися (по количеству элементов) из всех рассмотренных и их применение оправдано при сильном изменении решения вблизи резонансов или на высоких частотах. Так, в задаче для окружности в районе первой частоты они дают погрешность решения в 1% при пяти — восьми элементах, а линейные элементы с линейной аппроксимацией функции — при тридцати — пятидесяти, в районе третьей частоты — при шести — двенадцати и семидесяти — девяноста соответственно.

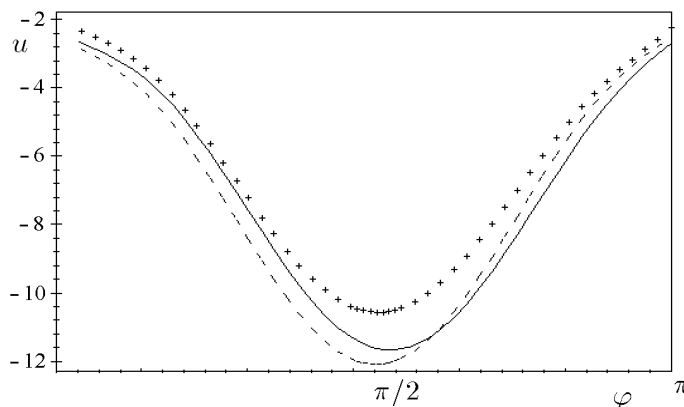


Рис. 1.

Все исследованные методы при увеличении числа элементов сходились к одному пределу, но за разное число итераций. На рис. 1 приведены три графика, иллюстрирующие

$u|_{\Gamma}$ в задаче для эллипса 3:1 (с граничным условием $\partial u/\partial n = 1$) в зависимости от угловой координаты φ : крестами обозначено решение, полученное аппроксимацией границы и функции линейными элементами при разбиении контура на 24 элемента, пунктиром — при помощи эрмитовых элементов с разбиением на 15 элементов, а сплошной линией — предел, к которому сходятся оба этих метода.

Кроме этого, были проведены эксперименты со сплайновой аппроксимацией; они показали, что ее применение оправдано в случаях сильного изменения решения, например при больших частотах или частотах, близких к резонансным (они давали погрешность порядка 10 % при $k \approx k_6$). Увеличение количества узлов приводит не к существенным изменениям, а лишь к небольшому уточнению решения, что говорит о внутренней устойчивости метода.

Пример 2. Краевая задача для оператора электроупругости. Рассмотрена задача об установившихся колебаниях электроупругой среды класса *bmm* в случае плоской деформации (смещения u_1, u_3 и потенциал φ зависят только от координат x_1 и x_3 , а $u_2 = 0$).

Краевая задача (1), (2) в этом случае принимает вид [?]

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \gamma_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (\gamma_7 + \gamma_4) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + (\delta_1 + \delta_5) \gamma_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} &= -k^2 u_1, \\ (\gamma_7 + \gamma_4) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \gamma_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \delta_5 \gamma_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \gamma_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} &= -k^2 u_3, \\ (\delta_1 + \delta_5) \gamma_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \delta_5 \gamma_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \gamma_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \delta_7 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где проведено обезразмеривание:

$$\begin{aligned} u_i &= h u_i, \quad \varphi = V_0 \varphi, \\ \gamma_1 &= c_{11}/c_{33}, \quad \gamma_4 = c_{44}/c_{33}, \quad \gamma_7 = c_{13}/c_{33}, \quad \gamma_0 = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}, \\ \delta_1 &= e_{13}/e_{33}, \quad \delta_5 = e_{15}/e_{33}, \quad \delta_7 = \varepsilon_{11}/\varepsilon_{33}, \\ k^2 &= \frac{\rho \omega^2 h^2}{c_{33}}, \quad \text{полагая} \quad \frac{V_0}{h} = \sqrt{\frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}}} \quad \text{и} \quad x_i = \frac{x_i}{h} \end{aligned}$$

(h — характерный линейный размер области Ω).

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma, \quad \Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_H, \\ t_i &= \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i3} n_3|_{\Gamma_\sigma} = t_i^0, \quad u_i|_{\Gamma_u} = u_i^0, \quad i = 1, 3, \\ D_n|_{\Gamma_H} &= 0, \quad \varphi|_{\Gamma_\pm} = \pm \varphi_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где t_i^0, u_i^0 — известные функции; а φ_0 — заданная константа. Соответственно неизвестными являются компоненты вектора напряжений (t_1, t_3) на Γ_u , компоненты вектора смещений (u_1, u_3) на Γ_σ , потенциал φ на Γ_H и нормальная составляющая вектора электрической индукции D_3 на Γ_- и Γ_+ .

Введем вспомогательные обобщенные векторы смещений $\chi = (u_1, u_3, \varphi)$ и напряжений $\mathbf{T} = (t_1, t_3, D_n)$. Тогда система (6) для задачи (9), (10) будет иметь вид

$$\int_{\Gamma} [P(\alpha) \mathbf{T}(x) - ikP(\alpha) B(\alpha, n) \chi(x)] e^{ik(\alpha, x)} d\Gamma = 0, \quad (11)$$

$$p_0(\alpha_1, \alpha_3) = \det A = 0,$$

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_4 \alpha_3^2 - 1 & (\gamma_7 + \gamma_4) \alpha_1 \alpha_3 & (\delta_1 + \delta_5) \gamma_0 \alpha_1 \alpha_3 \\ (\gamma_7 + \gamma_4) \alpha_1 \alpha_3 & \gamma_4 \alpha_1^2 + \alpha_3^2 - 1 & \delta_5 \gamma_0 \alpha_1^2 + \gamma_0 \alpha_3^2 \\ (\delta_1 + \delta_5) \gamma_0 \alpha_1 \alpha_3 & \delta_5 \gamma_0 \alpha_1^2 + \gamma_0 \alpha_3^2 & -\delta_7 \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \end{bmatrix},$$

$$B(\alpha, n) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \alpha_1 n_1 + \gamma_4 \alpha_3 n_3 & \gamma_4 \alpha_3 n_1 + \gamma_7 \alpha_1 n_3 & \delta_5 \gamma_0 \alpha_3 n_1 + \delta_1 \gamma_0 \alpha_1 n_3 \\ \gamma_7 \alpha_3 n_1 + \gamma_4 \alpha_1 n_3 & \gamma_4 \alpha_1 n_1 + \alpha_3 n_3 & \delta_5 \gamma_0 \alpha_1 \gamma_0 n_1 + \gamma_0 \alpha_3 n_3 \\ \delta_1 \gamma_0 \alpha_3 n_1 + \delta_5 \gamma_0 \alpha_1 n_3 & \delta_5 \gamma_0 \alpha_1 n_1 + \gamma_0 \alpha_3 n_3 & -\delta_7 \alpha_1 n_1 - \alpha_3 n_3 \end{bmatrix},$$

$P(\alpha)$ — матрица алгебраических дополнений к матрице A .

Так как p_0 в этом случае является бикубическим многочленом, можно построить следующие выражения для его корней:

$$\alpha_{3s\pm} = \alpha_{3s\pm}(\alpha_1) = \pm i\mu_s(\alpha_1), \quad s = 1, 2, 3, \quad \alpha_1 \in C.$$

С учетом этого система (11) записывается так:

$$\int_{\Gamma} P_{jm}(\alpha_1, \pm i\mu_s(\alpha_1)) T_m(x) e^{ik(\alpha_1 x_1 \pm i\mu_s(\alpha_1) x_3)} d\Gamma -$$

$$- ik \int_{\Gamma} P_{jm}(\alpha_1, \pm i\mu_s(\alpha_1)) B_{mp}(\alpha_1, \pm i\mu_s(\alpha_1), n) \chi_p(x) e^{ik(\alpha_1 x_1 \pm i\mu_s(\alpha_1) x_3)} d\Gamma = 0,$$

где индексы j, m, p, s меняются от 1 до 3. В итоге получаются 18 скалярных уравнений, но напомним, независимыми из них являются только 6, которые соответствуют, например, $j = 1$.

Аппроксимация границы осуществлялась линейными элементами, а интерполяция известных функций — константами. Проведено сравнение полученных результатов на примере краевой задачи для области, для которой существует точное решение: электроупругая среда занимает прямоугольник $[-a, a] \times [-b, b]$, при этом его верхняя и нижняя стороны свободны от напряжений и на них задается разность потенциалов, равная $2\varphi_0$, на боковых сторонах заданы условия скользящей заделки вдоль координаты x_3 :

$$u_1|_{x_1=\pm a} = 0, \quad \sigma_{13}|_{x_1=\pm a} = 0, \quad D_1|_{x_1=\pm a} = 0,$$

$$\sigma_{33}|_{x_3=\pm b} = 0, \quad \sigma_{13}|_{x_3=\pm b} = 0, \quad \varphi|_{x_3=\pm b} = \pm\varphi_0.$$

Точное решение имеет вид

$$u_1 = 0, \quad u_3 = A \sin k_* x_3, \quad \varphi = \gamma_0 u_3 + B x_3,$$

где $k_* = \frac{k}{\sqrt{1 + \gamma_0^2}}$; $A = \varphi \left(\gamma_0 \sin k_* b - \frac{1 + \gamma_0^2}{\gamma_0} k_* b \cos k_* b \right)^{-1}$; $B = -\frac{1 + \gamma_0^2}{\gamma_0} k_* A \cos k_* b$.

В табл. 2 приведено сравнение данных расчета резонансных частот для различных соотношений сторон прямоугольника (расчеты проводились для пьезокерамики PZT-4 [?]). Для каждой частоты бралось различное количество элементов на стороне. Отношение числа элементов по сторонам $x_1 = \pm a$ и $x_3 = \pm b$ было пропорционально отношению длин сторон прямоугольника, при этом количество элементов на боковой стороне выбиралось исходя из эмпирической формулы $N = [kb] + 2$ (примерно шесть элементов на одну длину волны). Отметим, что при увеличении числа элементов существенного улучшения нахождения значений резонансных частот не наблюдалось.

Т а б л и ц а 2

Результаты точного и приближенного решений		
Геометрия	Точное решение	Приближенное
$a = 1, b = 1$	1.6102	1.6094
	5.411	5.4112
	9.0881	9.0873
	12.74991	12.751
	16.40671	16.4051
	20.0613	20.0625
$a = 1, b = 4$	0.4025	0.4018
	1.3528	1.3527
	2.27204	2.2724
	3.18747	3.18745
	4.1016	4.1019
	5.01532	5.0124
$a = 1, b = 2$	0.80512	0.8062
	2.70567	2.7055
	4.54408	4.54491
	6.374955	6.3749
	8.20335	8.20000
	10.03064	10.0244

На рис. 2 и 3 приведены точное (сплошные линии) и приближенное (прерывистые линии и светлые кружки) решения для квадрата $[0, a] \times [0, b]$ ($a = b = 1$), $\varphi_0 = 1.0$ при $k = 4$ и десяти элементах на стороне. На рис. 2 показано смещение $u_1(x_1, 0)$ (кривые 1), смещение $u_3(x_1, 0)$ (кривые 2) и нормальная компонента вектора электрической индукции $D_3(x_1, 0)$ (кривые 3), которые являются неизвестными на стороне $x_3 = 0$. На рис. 3 изображены напряжение $\sigma_{11}(a, x_3)$ (кривые 1), смещение $u_3(a, x_3)$ (кривые 2) и $\varphi(a, x_3)$ (кривые 3), которые являются неизвестными на стороне $x_1 = a$. Представленные рисунки и проведенные расчеты свидетельствуют о достаточно точном нахождении амплитудных значений граничных неизвестных в широком диапазоне частот.

Следует отметить, что в рассмотренном примере в окрестности конца электрода неизвестные краевой задачи не имеют особенностей. Иначе дело обстоит в случае частичного электродного покрытия плоских граней, и тогда для получения достоверного решения и

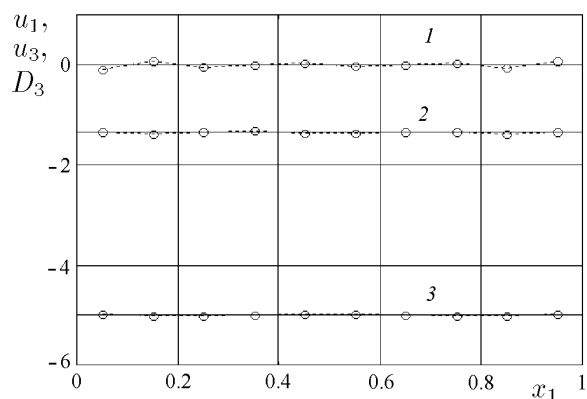


Рис. 2.

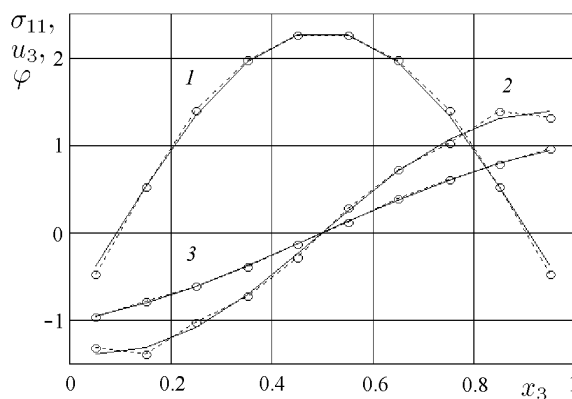


Рис. 3.

численной сходимости предлагаемого алгоритма необходимо в окрестностях особых точек границы использовать структурные граничные элементы, учитывающие поведение неизвестных (в частности, корневую особенность нормальной компоненты вектора электрической индукции у края электрода).

В проведенных расчетах переменная α_1 пробежала некоторый отрезок на вещественной оси, помимо этого проводились эксперименты при $Im\alpha_1 \neq 0$, в этом случае выявилась сильная зависимость точности решения от выбранного множества точек коллокаций. Вопрос о зависимости получаемого решения от этого множества и взаимосвязи его с выбираемым алгоритмом интерполяции неизвестных функций и границы нуждается в более глубоком исследовании.

Список литературы

- [1] КУПРАДЗЕ В. Д. Методы теории потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
- [2] ТРЕХМЕРНЫЕ задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976. 603 с.
- [3] БРЕББИЯ К., ТЕЛЛЕС Ж., ВРОУБЕЛ Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [4] БЕНЕРДЖИ П., БАТТЕРФИЛД Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
- [5] ВАТУЛЯН А. О., КУБЛИКОВ В. Л. О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. Т. 53, вып. 6. С. 1037–1041.
- [6] ВАТУЛЯН А. О., ГУСЕВА И. А. О колебаниях ортотропной полуплоскости с полостью // ПМТФ. 1993. №2. С. 123–127.
- [7] VATULIAN A. O., KUBLIKOV V. L. Boundary element method in electroelasticity // Boundary Elements Communications. 1995. Vol. 6. P. 59–61.
- [8] ВАТУЛЯН А. О., КОРОВЕЙНИК М. Ю. О граничных интегральных уравнениях в магнитоэлектроупругости // Докл. РАН. 1996. Т. 348, №5. С. 600–602.
- [9] БАБЕШКО В. А. К проблеме исследования динамических свойств трещиноподобных тел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, №2. С. 318–321.
- [10] БАБЕШКО В. А. Новый метод решений краевых задач механики сплошной среды и математической физики для неклассических областей // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, №1. С. 73–76.
- [11] ВАТУЛЯН А. О. О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Докл. РАН. 1993. Т. 333, №3. С. 312–314.
- [12] ВАТУЛЯН А. О., КОВАЛЕВ О. В., СОЛОВЬЕВ А. Н. О формулировке граничных интегральных уравнений 1-го рода в электроупругости // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. III Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 7–9 окт. 1997. Т. 1. С. 74–77.

- [13] Ватульян А. О., Садчиков Е. В. О новой формулировке граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях анизотропных тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. №2. С. 78–84.
- [14] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Новая формулировка граничных интегральных уравнений первого рода в электроупругости // ПММ. 1999. Т. 63, вып. 6. С. 860–868.
- [15] Ватульян А. О. Граничные интегральные уравнения для эллиптических операторов // Изв. вузов Северо-Кавказ. региона. 2000. №3. С. 34–37.
- [16] Ватульян А. О., Ворович И. И., Соловьев А. Н. Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // ПММ. 2000. №3. С. 373–380.
- [17] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Восстановление поля в анизотропной упругой среде // Акуст. журн. 2000. Т. 46, №4. С. 451–455.
- [18] Ватульян А. О., Шамшин В. М. Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 3. С. 112–119.
- [19] ЧИСЛЕННЫЕ методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. М.: Наука, 1990.
- [20] PAIGE C. C., SAUNDERS M. A. Algorithm 583. LSQR: Sparse linear equations and sparse least squares problems // ACM Trans. Math. Software. 1982. Vol. 8, No. 2. P. 195–209.
- [21] МАЗЬЯ В. Г. Интегральные уравнения теории потенциала в областях с кусочно-гладкими границами // Успехи мат. наук. 1981. Т. 38, №4. С. 229–300.
- [22] Ватульян А. О., Ковалев О. В. Об особенностях использования метода граничных элементов при решении ГИУ первого рода с гладкими ядрами // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 1998. С. 23–27.
- [23] Ватульян А. О., Ковалев О. В. Об использовании аппроксимаций высокого порядка при решении ГИУ первого рода в задачах анизотропной теории упругости // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. IV Междунар. конф., Ростов-на-Дону. 1998. Т. 1. С. 89–94.
- [24] ЗАВЬЯЛОВ Ю. С., КВАСОВ Б. И., МИРОШНИЧЕКО В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 350 с.
- [25] АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
- [26] ПАРТОН В. З., КУДРЯВЦЕВ Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.