ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В УПРАВЛЕНИИ ЗАПАСАМИ

В. В. Домбровский, Е. В. Чаусова
Томский государственный университет, Россия
e-mail dombrovs@ef.tsu.ru

The continue review inventory control systems with interval assigned demand intensity are considered. The interval methods are used to obtain the optimal parameters of inventory control strategy. Analytical expressions of interval values for optimal storage level, reorder time and order size are obtained. Expression of cost interval is discussed. Computational results are presented.

Введение

Расчет основных параметров, формирующих политику управления запасами, требует точного задания характеристик спроса [1, 2] — интенсивности спроса (в детерминированных моделях) или вероятностных характеристик спроса (в стохастических моделях). Однако при решении практических задач эти характеристики точно не известны, но возможно с достаточной степенью достоверности задать интервалы, в которых они находятся.

В данной работе предлагается использовать методы интервального анализа [3 – 5] для определения основных параметров оптимальной стратегии управления запасами в системах с неполной информацией о спросе. Рассматривается однономенклатурная система управления запасами с непрерывным контролем за их уровнем, интервально заданной интенсивностью спроса и мгновенными поставками (интервальное обобщение модели Уилсона [1]), а также поставками, поступающими с некоторой конечной интенсивностью (интервальное обобщение модели со штрафом [1, 2]). Получены аналитические выражения интервальных величин предельного запаса, точки и объема заказа. Найдены выражения для соответствующего интервала затрат. Приведены результаты численных расчетов.

При построении модели управления запасами с интервально заданным спросом была выбрана обобщенная арифметика Каухера как наиболее “удачная” с точки зрения ее алгебраических свойств и техники эквивалентных преобразований.

1. Описание интервальной арифметики Каухера

Полная интервальная арифметика Каухера [5] является алгебраической системой $\langle \mathbb{IR}, \mathrm{dual}, \mathrm{pro}, +, -, \cdot, / \rangle$, носитель которой — множество всех вещественных интервалов $\mathbb{IR} = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] : \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, $\mathbb{IR}$ получается присоединением неправильных интервалов $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, $\underline{x} > \overline{x}$, ко множеству правильных интервалов $\mathrm{I}\mathbb{R} = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] :$

$\underline{x} \le \overline{x},\ \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}$ и вещественных чисел $\mathbb{R}$ — вырожденных интервалов $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}],\ \underline{x} = \overline{x}$. Правильный и неправильный интервалы меняются местами в результате операции дуализации

$$\operatorname{dual}\mathbf{x} = [\overline{x}, \underline{x}], \quad \forall \mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR}.$$

Правильной проекцией интервала $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$ называется величина

$$\operatorname{pro}\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}], & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \operatorname{dual}\mathbf{x} = [\overline{x}, \underline{x}], & \text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный}. \end{cases}$$

Рассмотрим основные арифметические операции полной интервальной арифметики Каухера, которые используются в работе.

Сложение и умножение на вещественные числа определяются на $\mathbb{IR}$ соотношениями

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}], \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR},$$

$$c \cdot \mathbf{x} = \begin{cases} [c\underline{x}, c\overline{x}], & \text{если } c \ge 0, \\ [c\overline{x}, c\underline{x}], & \text{если } c < 0, \end{cases} \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{IR}.$$

Каждый элемент $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$ имеет единственный обратный по сложению элемент $\operatorname{opp}\mathbf{x}$:

$$\operatorname{opp}\mathbf{x} = [-\underline{x}, -\overline{x}], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{IR}.$$

Операция, обратная сложению, называется операцией внутреннего вычитания и вводится как

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = \mathbf{x} + \operatorname{opp}\mathbf{y} = [\underline{x} - \underline{y}, \overline{x} - \overline{y}].$$

Аналогично классической интервальной арифметике отношения включения одного интервала в другой определяются на полной интервальной арифметике как

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{x} \ge \underline{y} \ \& \ \overline{x} \le \overline{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}.$$

Выделим в $\mathbb{IR}$ подмножества:

$$\begin{aligned} &P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} : \quad \underline{x} > 0, \overline{x} > 0\} \ \text{— неотрицательные интервалы}, \\ &Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} : \quad \underline{x} \le 0 \le \overline{x}\} \ \text{— нульсодержащие интервалы}, \\ &-P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} : \quad -\mathbf{x} \in P\} \ \text{— неположительные интервалы}, \\ &\operatorname{dual} Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} : \quad \operatorname{dual}\mathbf{x} \in Z\} \ \text{— интервалы, содержащиеся в нуле}. \end{aligned}$$

Умножение двух интервалов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}$ представлено в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Умножение интервалов на $\mathbb{IR}$

	$\mathbf{y} \in P$	$\mathbf{y} \in Z$	$\mathbf{y} \in -P$	$\mathbf{y} \in \operatorname{dual} Z$
$\mathbf{x} \in P$	$[\underline{x}\,\underline{y}, \ \overline{x}\,\overline{y}]$	$[\overline{x}\,\underline{y}, \ \overline{x}\,\overline{y}]$	$[\overline{x}\,\underline{y}, \ \underline{x}\,\overline{y}]$	$[\underline{x}\,\underline{y}, \ \underline{x}\,\overline{y}]$
$\mathbf{x} \in Z$	$[\underline{x}\,\overline{y}, \ \overline{x}\,\overline{y}]$	$[\min(\underline{x}\,\overline{y}, \ \overline{x}\,\underline{y}), \max(\underline{x}\,\underline{y}, \ \overline{x}\,\overline{y})]$	$[\overline{x}\,\underline{y}, \ \underline{x}\,\underline{y}]$	0
$\mathbf{x} \in -P$	$[\underline{x}\,\overline{y}, \ \overline{x}\,\underline{y}]$	$[\underline{x}\,\overline{y}, \ \underline{x}\,\underline{y}]$	$[\overline{x}\,\overline{y}, \ \underline{x}\,\underline{y}]$	$[\overline{x}\,\overline{y}, \ \overline{x}\,\underline{y}]$
$\mathbf{x} \in \operatorname{dual} Z$	$[\underline{x}\,\underline{y}, \ \overline{x}\,\underline{y}]$	0	$[\overline{x}\,\overline{y}, \ \underline{x}\,\overline{y}]$	$[\max(\underline{x}\,\underline{y}, \ \overline{x}\,\overline{y}), \min(\underline{x}\,\overline{y}, \ \overline{x}\,\underline{y})]$

Операции вычитания и деления в арифметике Каухера определяются следующим образом:

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-1)\mathbf{y}=[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}],\quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{IR},$$
$$\mathbf{x}/\mathbf{y}=[\underline{x}/\overline{y},\,\overline{x}/\underline{y}]\,,\quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{IR}:\ 0\notin \operatorname{pro}\mathbf{y}.$$

Алгебраическое деление вводится соотношением

$$\mathbf{x}\oslash\mathbf{y}=[\underline{x}/\underline{y},\,\overline{x}/\overline{y}]\,,\quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{IR}:\ 0\notin \operatorname{pro}\mathbf{y}.$$

Связь сложения и умножения в арифметике Каухера описывается так:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z})\subseteq\mathbf{xy}+\mathbf{xz}, & \text{если}\ \ \mathbf{x}\ \ \text{правильный},\\ \mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z})\supseteq\mathbf{xy}+\mathbf{xz}, & \text{если}\ \ \mathbf{x}\ \ \text{неправильный}.\end{cases}$$

Определение. *Формальным решением интервального уравнения*

$$\mathbf{a}\cdot\mathrm{x}+\mathbf{b}=\mathbf{c},\quad \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{IR},\ 0\notin \mathit{pro}\,\mathbf{a} \tag{1.1}$$

называется такое интервальное число $\mathbf{x}\in\mathbb{IR}$*, что* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}\equiv\mathbf{c}$ *в полной интервальной арифметике.*

Тогда в терминах введенных определений формальное решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\mathbf{x}=(\mathbf{c}\ominus\mathbf{b})\oslash\mathbf{a}=\left[\frac{\underline{c}-\underline{b}}{\underline{a}},\ \frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{a}}\right].$$

2. Интервальная модель управления запасами с мгновенными поставками

Рассмотрим однономенклатурную систему управления запасами с непрерывным контролем их уровня, мгновенными поставками и интервально заданной интенсивностью спроса $\boldsymbol{\mu}=[\underline{\mu},\overline{\mu}]:\ \boldsymbol{\mu}\in\mathbb{IR}$. На основе информации о спросе необходимо принять управленческое решение относительно оптимальной предельной величины запаса Y^* и точки заказа T^*.

Когда $\boldsymbol{\mu}=[\underline{\mu},\overline{\mu}],\ \underline{\mu}=\overline{\mu}$, рассматриваемая модель вырождается в модель Уилсона [1] с интенсивностью спроса $\mu\in\mathbb{R}$. В этом случае функция средних затрат в единицу времени имеет вид

$$L(\mu,Y)=\frac{g\mu}{Y}+\frac{sY}{2}, \tag{2.1}$$

где g — затраты на оформление заказа, s — затраты на хранение запаса, Y — величина предельного запаса на складе.

В интервальной постановке, когда $\mu\in\boldsymbol{\mu}=[\underline{\mu},\overline{\mu}],\ \underline{\mu}\neq\overline{\mu}$, необходимо определить интервалы $\mathbf{Y}^*=[\underline{Y}^*,\overline{Y}^*],\ \mathbf{L}^*=[\underline{L}^*,\overline{L}^*]$ такие, что для любого фиксированного $\mu\in\boldsymbol{\mu}$ оптимальное значение Y^*, доставляющее минимум функционалу (2.1), принадлежит интервалу $\mathbf{Y}^*$ и $L(\mu,Y^*)\in\mathbf{L}^*$.

Представим целевую функцию интервальной модели в виде естественного интервального расширения [3, 4] функции (2.1):

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu},Y)=\frac{g[\underline{\mu},\overline{\mu}]}{Y}+\frac{sY}{2}=\left[\frac{g\underline{\mu}}{Y}+\frac{sY}{2},\ \frac{g\overline{\mu}}{Y}+\frac{sY}{2}\right]. \tag{2.2}$$

Интервал $\mathbf{Y}^*$ определяется как формальное решение уравнения

$$\mathbf{L}'_Y(\boldsymbol{\mu}, Y) = 0 \tag{2.3}$$

в полной интервальной арифметике Каухера, где $\mathbf{L}'_Y(\boldsymbol{\mu}, Y)$ — производная “интервальной функции” [3] $\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, Y)$ по Y (здесь интервал $\mathbf{L}'_Y(\boldsymbol{\mu}, Y)$ содержит множество значений производной вещественной функции $L(\mu, Y)$ по Y для любого фиксированного $\mu \in \boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$).

Так как

$$\mathbf{L}'_Y(\boldsymbol{\mu}, Y) = \left[-\frac{g\underline{\mu}}{Y^2} + \frac{s}{2}, -\frac{g\overline{\mu}}{Y^2} + \frac{s}{2}\right] = -\frac{g}{Y^2}[\overline{\mu}, \underline{\mu}] + \frac{s}{2},$$

уравнение (2.3) в развернутом виде может быть записано так:

$$-\frac{g}{Y^2}[\overline{\mu}, \underline{\mu}] + \frac{s}{2} = 0. \tag{2.4}$$

Формальное решение уравнения (2.4) дает правильный интервал для оптимальной величины предельного запаса

$$\mathbf{Y}^* = [\underline{Y}^*, \overline{Y}^*] = \left[\sqrt{\frac{2g\underline{\mu}}{s}}, \sqrt{\frac{2g\overline{\mu}}{s}}\right], \quad \mathbf{Y}^* \in \mathbb{IR}.$$

Подставив $\mathbf{Y}^* = [\underline{Y}^*, \overline{Y}^*]$ в функцию (2.2), получаем выражение для интервала затрат

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Y}^*) = \frac{g[\underline{\mu}, \overline{\mu}]}{[\underline{Y}^*, \overline{Y}^*]} + \frac{s[\underline{Y}^*, \overline{Y}^*]}{2} = \left[\underline{\mu}\sqrt{\frac{sg}{2\overline{\mu}}} + \sqrt{\frac{sg\underline{\mu}}{2}}, \overline{\mu}\sqrt{\frac{sg}{2\underline{\mu}}} + \sqrt{\frac{sg\overline{\mu}}{2}}\right].$$

Интервал для точки заказа T^* определяется как

$$\mathbf{T}^* = [\underline{T}^*, \overline{T}^*] = \frac{[\underline{Y}^*, \overline{Y}^*]}{[\underline{\mu}, \overline{\mu}]}, \quad \mathbf{T}^* \in \mathbb{IR}.$$

Таким образом, при оптимальном управлении

$$Y^* \in [\underline{Y}^*, \overline{Y}^*] = \sqrt{\frac{2g}{s}}\left[\sqrt{\underline{\mu}}, \sqrt{\overline{\mu}}\right], \tag{2.5}$$

$$T^* \in [\underline{T}^*, \overline{T}^*] = \sqrt{\frac{2g}{s}}\left[\frac{\sqrt{\underline{\mu}}}{\overline{\mu}}, \frac{\sqrt{\overline{\mu}}}{\underline{\mu}}\right], \tag{2.6}$$

затраты в единицу времени

$$L^* \in [\underline{L}^*, \overline{L}^*] = \sqrt{\frac{sg}{2}}\left[\frac{\underline{\mu}}{\sqrt{\overline{\mu}}} + \sqrt{\underline{\mu}}, \frac{\overline{\mu}}{\sqrt{\underline{\mu}}} + \sqrt{\overline{\mu}}\right]. \tag{2.7}$$

Если интенсивность спроса задана вещественным числом (вырожденным интервалом), формулы (2.5) – (2.7) преобразуются в стандартные формулы Уилсона [1].

3. Интервальная модель управления запасами с конечной интенсивностью поставок и возможностью дефицита

Во многих случаях, когда политика фирмы направлена на увеличение рентабельности производства или коммерческой деятельности, издержки хранения запасов выше, чем потери, вызванные временным отсутствием запаса на складе, поэтому отсутствие запаса в течение некоторого небольшого промежутка времени может быть вполне допустимым.

Рассмотрим однономенклатурную систему управления запасами с непрерывным контролем их уровня, интервально заданной интенсивностью спроса $\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{IR}$, и конечной интенсивностью поставок $\lambda \in \mathbb{R}$. Необходимо сформировать управленческое решение относительно оптимального уровня предельного запаса Y^*_λ, точки заказа T^*_λ и величины допустимого дефицита y^*_λ.

Когда интервал $\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$ вырожден, т. е. $\underline{\mu} = \overline{\mu}$, рассматриваемая модель принадлежит к классу моделей экономически выгодных размеров партий согласно классической теории управления запасами [1, 2]. Представим функцию затрат интервальной модели управления запасами в виде естественного интервального расширения [3, 4] соответствующей функции средних затрат в единицу времени [1, 2]:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, Y, T) = \frac{1}{T}\left(g + \frac{(p+s)\lambda Y^2}{2\boldsymbol{\mu}(\lambda - \boldsymbol{\mu})}\right) + \frac{p\boldsymbol{\mu}(\lambda - \boldsymbol{\mu})T}{2\lambda} - pY, \quad 0 \notin \boldsymbol{\mu}(\lambda - \boldsymbol{\mu}), \tag{3.1}$$

где T — полный цикл работы системы; Y — уровень предельного запаса; g — затраты на оформление заказа; s — затраты на хранение запаса; p — штрафные потери за отложенный спрос. Функция (3.1) имеет смысл при $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{IR}$: $0 < \boldsymbol{\mu} < \lambda$.

Рассмотрим производную интервальной функции вида $\frac{1}{x}[a, b]$, $x > 0$, по x:

$$\left(\frac{1}{x}[a,b]\right)'_x = \left[\left(\frac{a}{x}\right)'_x, \left(\frac{b}{x}\right)'_x\right] = \left[-\frac{a}{x^2}, -\frac{b}{x^2}\right] = \frac{1}{x^2}[-a,-b] = \frac{1}{x^2}\operatorname{opp}[a,b]. \tag{3.2}$$

Используя (3.2), найдем частные производные функции $\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, Y, T)$ по Y, T и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, Y, T)}{\partial Y} = \frac{(p+s)\lambda Y}{\boldsymbol{\eta} T} - p = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, Y, T)}{\partial T} = \frac{1}{T^2}\operatorname{opp}\left(g + \frac{(p+s)\lambda Y^2}{2\boldsymbol{\eta}}\right) + \frac{p\boldsymbol{\eta}}{2\lambda} = 0, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}(\lambda - \boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{IR}$.

Совместное формальное решение уравнений (3.3), (3.4) дает интервалы для оптимального управления (Y^*_λ, T^*_λ).

Из уравнения (3.3) будем иметь

$$\mathbf{Y} = \frac{p}{(p+s)\lambda}\operatorname{dual}(\boldsymbol{\eta}\mathbf{T}). \tag{3.5}$$

Домножим обе части уравнения (3.4) на интервал $\operatorname{dual}\mathbf{T}^2$, где $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$.

Так как $\dfrac{\operatorname{dual}\mathbf{T}^2}{\mathbf{T}^2} = \dfrac{[\overline{T}^2, \underline{T}^2]}{[\underline{T}^2, \overline{T}^2]} = 1$, получаем

$$\operatorname{opp}\left(g + \frac{(p+s)\lambda\mathbf{Y}^2}{2\boldsymbol{\eta}}\right) + \frac{p\boldsymbol{\eta}\operatorname{dual}\mathbf{T}^2}{2\lambda} = 0. \tag{3.6}$$

Подставив $\mathbf{Y}$ из (3.5) в интервальное уравнение (3.6) и выполнив соответствующие преобразования, будем иметь

$$-g - \frac{p^2}{2(p+s)\lambda}\boldsymbol{\eta}\mathbf{T}^2 + \frac{p\boldsymbol{\eta}\operatorname{dual}\mathbf{T}^2}{2\lambda} = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим интервал $\mathbf{a}\operatorname{dual}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{x}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{IR}$:

$$\mathbf{a}\operatorname{dual}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{x} = [\underline{a}\overline{x},\, \overline{a}\underline{x}] - [\underline{b}\underline{x},\, \overline{b}\overline{x}] = [\underline{a}\overline{x} - \overline{b}\overline{x},\, \overline{a}\underline{x} - \underline{b}\underline{x}] = [(\underline{a} - \overline{b})\overline{x},\, (\overline{a} - \underline{b})\underline{x}].$$

Таким образом, имеет смысл соотношение

$$\mathbf{a}\operatorname{dual}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{x} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})\operatorname{dual}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{IR}: \ \mathbf{x} > 0,\ (\mathbf{a} - \mathbf{b}) > 0.$$

Тогда уравнение (3.7) примет вид

$$\frac{p\boldsymbol{\eta}_{p,s}\operatorname{dual}\mathbf{T}^2}{2\lambda} = g,$$

где $\boldsymbol{\eta}_{p,s} = \boldsymbol{\eta} - \dfrac{p}{p+s}\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta}_{p,s} > 0$. Отсюда $\operatorname{dual}\mathbf{T}^2 = \dfrac{2\lambda g}{p} \oslash \boldsymbol{\eta}_{p,s}$, $\boldsymbol{\eta}_{p,s} > 0$, $0 \notin \operatorname{pro}\boldsymbol{\eta}_{p,s}$.

Следовательно, интервал для оптимальной точки заказа имеет вид

$$\mathbf{T}^* = \sqrt{\frac{2\lambda g(p+s)}{p}}\left[\frac{1}{\sqrt{(p+s)\overline{\eta} - p\underline{\eta}}},\ \frac{1}{\sqrt{(p+s)\underline{\eta} - p\overline{\eta}}}\right], \quad \mathbf{T}^* \in \mathbb{IR}. \tag{3.8}$$

Из (3.5) с учетом (3.8) запишем

$$\mathbf{Y}^* = \sqrt{\frac{2gp}{(p+s)\lambda}}\left[\frac{\overline{\eta}}{\sqrt{(p+s)\underline{\eta} - p\overline{\eta}}},\ \frac{\underline{\eta}}{\sqrt{(p+s)\overline{\eta} - p\underline{\eta}}}\right]. \tag{3.9}$$

Интервал $\mathbf{Y}^*$ — неправильный, поскольку $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{T}^* \in \mathbb{IR}$.

Так как $\boldsymbol{\eta}_{p,s} \in \mathbb{IR}$, то из $\boldsymbol{\eta}_{p,s} > 0$ ($0 \notin \operatorname{pro}\boldsymbol{\eta}_{p,s}$) получаем ограничение $\left(\underline{\eta} - \dfrac{p}{p+s}\overline{\eta}\right) > 0$, которое выполняется для

$$\forall \boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]: \quad \frac{\overline{\mu} - \underline{\mu}}{\underline{\mu}} < \frac{s}{p}. \tag{3.10}$$

Из условия (3.10) следует, что чем больше штраф за отложенный спрос, тем точнее должен быть прогноз интенсивности спроса.

Таким образом, оптимальное управление для интервальной модели с интенсивностью спроса $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{IR}$ и поставок λ такими, что

$$\frac{\overline{\mu} - \underline{\mu}}{\underline{\mu}} < \frac{s}{p}, \quad 0 < \boldsymbol{\mu} < \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{IR},$$

имеет вид

$$Y^*_\lambda \in \mathbf{Y}^*_\lambda = \operatorname{pro}\mathbf{Y}^* = \sqrt{\frac{2gp}{(p+s)\lambda}}\left[\frac{\underline{\eta}}{\sqrt{(p+s)\overline{\eta}-p\underline{\eta}}},\ \frac{\overline{\eta}}{\sqrt{(p+s)\underline{\eta}-p\overline{\eta}}}\right], \tag{3.11}$$

$$y^*_\lambda \in \ \frac{\boldsymbol{\eta}}{\lambda}\mathbf{T}^*_\lambda - \mathbf{Y}^*_\lambda,$$

где

$$\mathbf{T}^*_\lambda = \operatorname{pro}\mathbf{T}^* = \sqrt{\frac{2\lambda g(p+s)}{p}}\left[\frac{1}{\sqrt{(p+s)\overline{\eta}-p\underline{\eta}}};\ \frac{1}{\sqrt{(p+s)\underline{\eta}-p\overline{\eta}}}\right], \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}(\lambda - \boldsymbol{\mu}).$$

Интервал для затрат в единицу времени получается подстановкой интервалов для оптимального управления (3.11), (3.12) в функцию затрат (3.1):

$$L^*_\lambda \in \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{Y}^*_\lambda,\ \mathbf{T}^*_\lambda). \tag{3.13}$$

4. Частный случай

При высокой интенсивности поставок, когда $\mu/\lambda \approx 0$, можно считать, что поставки осуществляются мгновенно. Это условие характерно для поставок с вышестоящего склада, когда весь объем затребованной продукции отгружается разом.

Тогда оптимальное управление для случая мгновенных поставок ($\lambda \to \infty$) при интенсивности спроса $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{IR}$ $\left(\dfrac{\overline{\mu}-\underline{\mu}}{\underline{\mu}} < \frac{s}{p},\ \boldsymbol{\mu} > 0\right)$ имеет вид

$$Y^* \in \mathbf{Y}^* = \sqrt{\frac{2gp}{(p+s)}}\left[\frac{\underline{\mu}}{\sqrt{(p+s)\overline{\mu}-p\underline{\mu}}},\ \frac{\overline{\mu}}{\sqrt{(p+s)\underline{\mu}-p\overline{\mu}}}\right], \quad \mathbf{Y}^* = \lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{Y}^*_\lambda,$$

$$y^* \in \ \boldsymbol{\mu}\mathbf{T}^* - \mathbf{Y}^*,$$

где

$$\mathbf{T}^* = \sqrt{\frac{2g(p+s)}{p}}\left[\frac{1}{\sqrt{(p+s)\overline{\mu}-p\underline{\mu}}},\ \frac{1}{\sqrt{(p+s)\underline{\mu}-p\overline{\mu}}}\right], \quad \mathbf{T}^* = \lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{T}^*_\lambda.$$

Тогда

$$L^* \in \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{Y}^*,\ \mathbf{T}^*),$$

где

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, Y, T) = \frac{1}{T}\left(g + \frac{Y^2(p+s)}{2\boldsymbol{\mu}}\right) + \frac{pT\boldsymbol{\mu}}{2} - pY, \quad \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, Y, T) = \lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{L}(\boldsymbol{\eta}, Y, T).$$

5. Результаты расчетов

В табл. 2 представлены результаты численных расчетов оптимальной стратегии для интервальной модели с мгновенными поставками по формулам (2.5)–(2.7) при $g = 5$, $s = 2$, в табл. 3 — расчеты для интервальной модели с конечной интенсивностью спроса по формулам (3.11)–(3.13) при $g = 5$, $s = 2$, $p = 4$.

Таблица 2

Результаты расчета оптимальной стратегии управления запасами для модели с мгновенными поставками

$\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$	$\mathbf{Y}^* = [\underline{Y}^*, \overline{Y}^*]$	$\mathbf{T}^* = [\underline{T}^*, \overline{T}^*]$	$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Y}^*, \mathbf{T}^*)$
$[10.00, 10.00]$	$[7.07, 7.07]$	$[0.71, 0.71]$	$[14.14, 14.14]$
$[10.00, 12.00]$	$[7.07, 7.75]$	$[0.59, 0.77]$	$[14.13, 15.50]$
$[10.00, 12.00]$	$[7.07, 7.75]$	$[0.59, 0.77]$	$[14.13, 15.50]$
$[50.00, 50.00]$	$[15.81, 15.81]$	$[0.32, 0.32]$	$[31.62, 31.62]$
$[50.00, 52.00]$	$[15.81, 16.12]$	$[0.30, 0.32]$	$[31.62, 32.24]$
$[50.00, 55.00]$	$[15.81, 16.58]$	$[0.29, 0.33]$	$[31.61, 33.18]$
$[100.00, 100.00]$	$[22.36, 22.36]$	$[0.22, 0.22]$	$[44.72, 44.72]$
$[100.00, 102.00]$	$[22.36, 22.58]$	$[0.22, 0.23]$	$[44.72, 45.16]$
$[100.00, 105.00]$	$[22.36, 22.91]$	$[0.21, 0.23]$	$[44.71, 45.84]$

Таблица 3

Результаты расчета оптимальной стратегии управления запасами для модели с конечной интенсивностью поставок и возможностью дефицита

$\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbf{Y}^*_\lambda = [\underline{Y}^*, \overline{Y}^*]$	$\mathbf{T}^*_\lambda = [\underline{T}^*, \overline{T}^*]$	$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Y}^*_\lambda, \mathbf{T}^*_\lambda)$
$[10.00, 10.00]$	20.00	$[2.04, 204]$	$[1.22, 1.22]$	$[8.16, 8.16]$
$[10.00, 12.00]$	20.00	$[1.38, 3.16]$	$[1.04, 1.58]$	$[5.46, 9.89]$
$[50.00, 50.00]$	120.00	$[4.93, 4.93]$	$[0.51, 0.51]$	$[19.72, 19.72]$
$[50.00, 52.00]$	120.00	$[4.62, 5.30]$	$[0.49, 0.52]$	$[18.47, 20.17]$
$[50.00, 55.00]$	120.00	$[4.20, 5.91]$	$[0.47, 0.55]$	$[16.88, 21.07]$
$[100.00, 100.00]$	300.00	$[7.45, 7.45]$	$[0.34, 0.34]$	$[29.81, 29.81]$
$[100.00, 102.00]$	300.00	$[7.25, 7.70]$	$[0.33, 0.34]$	$[29.01, 30.13]$
$[100.00, 105.00]$	300.00	$[6.97, 8.08]$	$[0.32, 0.35]$	$[27.96, 30.66]$

Результаты численного моделирования показывают, что применение интервального подхода позволяет получить приемлемые границы для параметров стратегии управления (предельной величины запаса и точки заказа) и функции затрат при достаточно широком диапазоне изменения интенсивности спроса. Таким образом, численные исследования подтверждают возможность использования интервальных методов в практических задачах управления запасами для повышения надежности принятых решений в условиях неопределенности спроса.

Список литературы

[1] Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1973.

[2] Рыжиков Ю. И. Управление запасами. М.: Наука, 1969.

[3] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1986.

[4] Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1981.

[5] Шарый С. П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2000. 42 с.

Поступила в редакцию 4 декабря 2000 г.,
в переработанном виде — 23 июля 2001 г.