

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ ОТ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА В ЗОНЕ ТУРБУЛЕНТНОГО СМЕШЕНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ*†

О. Ф. ВОРОПАЕВА

*Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия*

Ю. Д. ЧАШЕЧКИН

Институт проблем механики РАН, Москва, Россия

Г. Г. ЧЕРНЫХ

*Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия*

Выполнено численное моделирование процесса турбулентной диффузии пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения в стратифицированной среде (плоская задача). Результаты расчетов демонстрируют существенную зависимость распределения осредненной концентрации от начальных данных для этой величины.

1. Введение

Процессы турбулентной диффузии являются характерной чертой стратифицированных течений [1]. Они оказывают существенное влияние на перенос примесей [2]. Нелинейность и сложность турбулентной диффузии общеизвестны. Построена иерархия математических моделей диффузионных процессов [3]. В настоящей работе делается попытка продемонстрировать некоторые особенности процесса на примере плоского течения, генерируемого областью турбулизованной жидкости в стратифицированной среде. Эта модельная задача достаточно хорошо известна [4–6]. В дополнение к рассмотренному в [4–6] в настоящей работе анализируется распространение пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения. Результаты численных экспериментов позволяют сделать вывод о существенной зависимости распределения осредненной концентрации примеси от начальных данных для этой величины. Подобная ситуация наблюдалась в лабораторных

*© О. Ф. Воропаева, Ю. Д. Чашечкин, Г. Г. Черных, 1996.

†Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №95-01-00910.

экспериментах [7], в которых изучалась диффузия тепла от локализованного источника в плоском турбулентном следе.

2. Постановка задачи

Для описания течения, возникающего при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде, привлекается следующая система осредненных уравнений движения, неразрывности, несжимаемости и переноса концентрации пассивной примеси:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle - \frac{g \langle \rho_1 \rangle}{\rho_0}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial t} + U \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + V \frac{d\rho_s}{dy} = -\frac{\partial}{\partial x} \langle u'\rho' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'\rho' \rangle, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U \frac{\partial \Theta}{\partial x} + V \frac{\partial \Theta}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \langle u'\theta' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'\theta' \rangle. \quad (1.5)$$

В уравнениях (1.1)–(1.5) величины U , V — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей x, y ; ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально вверх, против силы тяжести; p_1 — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией $\rho_s(y)$; g — ускорение силы тяжести; $\langle \rho_1 \rangle$ — осредненный дефект плотности: $\rho_1 = \rho - \rho_s$, $\rho_s = \rho_s(y)$ — плотность невозмущенной жидкости, $d\rho_s/dy \leq 0$ (устойчивая стратификация), $\rho_0 = \rho_s(0)$; Θ — осредненная концентрация пассивной примеси; штрихом обозначены пульсационные составляющие; знак $\langle \rangle$ — знак осреднения. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры; стратификация предполагается слабой и используется приближение Обербека—Буссинеска. В уравнениях (1.1)–(1.5) отброшены в предположении малости члены с молекулярной вязкостью и диффузией.

Система уравнений (1.1)–(1.5) незамкнута; для определения нормальных рейнольдсовых напряжений $\langle u'_i u'_j \rangle$ ($i = j = 1, 2, 3$), потоков $\langle u'_i \rho' \rangle$ ($i = 1, 2, 3$) и дисперсии флуктуаций плотности $\langle \rho'^2 \rangle$ воспользуемся алгебраическими аппроксимациями [3]:

$$\frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - C_2}{C_1} \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right) + \frac{1 - C_3}{C_1} \left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right), \quad (1.6)$$

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad G_{ij} = \frac{1}{\rho_0} (\langle u'_i \rho' \rangle g_j + \langle u'_j \rho' \rangle g_i),$$

$$\vec{g} = (0, -g, 0), \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii},$$

$$- \langle u'\rho' \rangle = \frac{\langle u'^2 \rangle e}{C_{1t} \varepsilon} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x}, \quad (1.7)$$

$$- \langle v'\rho' \rangle = \frac{e}{C_{1t} \varepsilon} \left\{ \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} + \frac{1 - C_{2t}}{\rho_0} g \langle \rho'^2 \rangle \right\}, \quad (1.8)$$

$$\langle \rho'^2 \rangle = -\frac{2}{C_t} \frac{e}{\varepsilon} \langle v' \rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}. \quad (1.9)$$

В дополнение к уравнениям (1.1)–(1.5) и соотношениям (1.6)–(1.9) привлекаются дифференциальные уравнения переноса энергии турбулентности e , скорости диссипации ε и касательного рейнольдсова напряжения $\langle u'v' \rangle$:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} K_{ex} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial e}{\partial y} + P + G - \varepsilon, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} K_{\varepsilon x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial t} + U \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} K_{ex} \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + (1 - C_2) P_{12} + (1 - C_3) G_{12} - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle u'v' \rangle. \end{aligned} \quad (1.12)$$

По аналогии с [8], где рассматривалось турбулентное спутное течение, с использованием (1.6) определим коэффициенты турбулентной вязкости следующим образом:

$$K_{ex} = \frac{1 - C_2}{C_1} \frac{e \langle u'^2 \rangle}{\varepsilon}, \quad K_{\varepsilon x} = K_{ex} / \sigma, \quad (1.13)$$

$$K_{ey} = \frac{\frac{e}{C_1 \varepsilon} \left[(1 - C_2) \langle v'^2 \rangle - \frac{g}{\rho_0} \frac{e}{C_{1t} \varepsilon} (1 - C_3) (1 - C_{2t}) \langle v' \rho' \rangle \right]}{1 - \frac{g}{\rho_0} \frac{1 - C_3}{C_1 C_{1t}} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}}, \quad K_{\varepsilon y} = K_{ey} / \sigma. \quad (1.14)$$

Величины $\langle u'\theta' \rangle$, $\langle v'\theta' \rangle$ определим с помощью соотношений, подобных применяемым для аппроксимации $\langle u'\rho' \rangle$, $\langle v'\rho' \rangle$:

$$\begin{aligned} -\langle u'\rho' \rangle &= K_{\rho x} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x}, \quad -\langle v'\rho' \rangle = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \\ -\langle u'\theta' \rangle &= K_{\theta x} \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad -\langle v'\theta' \rangle = K_{\theta y} \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$K_{\rho x} = K_{\theta x} = \frac{\langle u'^2 \rangle e}{C_{1t} \varepsilon}, \quad K_{\rho y} = K_{\theta y} = \frac{\frac{e \langle v'^2 \rangle}{C_{1t} \varepsilon}}{1 - 2 \frac{g}{\rho_0} \frac{1 - C_{2t}}{C_t C_{1t}} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}}.$$

В соотношениях и уравнениях (1.6)–(1.15) величины C_1 , C_2 , C_3 , C_{1t} , C_{2t} , C_t , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ — эмпирические постоянные.

В качестве граничных и начальных условий для системы уравнений (1.1)–(1.5), (1.10)–(1.12) принимались следующие:

$$U = V = \langle \rho_1 \rangle = e = \varepsilon = \Theta = \langle u'v' \rangle = 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad t \geq 0; \quad (1.16)$$

$$e(0, x, y) = e_0(r), \quad \varepsilon(0, x, y) = \varepsilon_0(r), \quad \Theta(0, x, y) = \Theta_0(x, y), \quad r^2 = x^2 + y^2 \leq R^2, \quad t = 0; \quad (1.17)$$

$$e(0, x, y) = \varepsilon(0, x, y) = \Theta(0, x, y) = 0, \quad r^2 \geq R^2,$$

$$\langle \rho_1 \rangle = U = V = \langle u'v' \rangle = 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty, \quad t = 0. \quad (1.18)$$

Здесь $e_0(r)$, $\varepsilon_0(r)$, $\Theta_0(x, y)$ — финитные колоколообразные функции. При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие $r \rightarrow \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника.

Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением в качестве масштаба длины величины R (радиуса области турбулизованной жидкости в начальный момент времени) и масштаба скорости $U_0 = \sqrt{e(0, 0, 0)}$. Воспользуемся также следующим представлением для безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} x^* &= x/R, \quad y^* = y/R, \quad U_i^* = U_i/U_0, \quad \langle u'_i u'_j \rangle^* = \langle u'_i u'_j \rangle / U_0^2, \quad \varepsilon^* = \varepsilon R / U_0^3, \\ \langle \rho \rangle^* &= \langle \rho \rangle / aR\rho_0, \quad t^* = t/\tau, \quad \tau = R/U_0, \quad \Theta^* = \Theta/\Theta_m(0), \quad \Theta_m(0) = \max_{x,y} \Theta_0(x, y), \\ a &= -(1/\rho_0)d\rho_s/dy, \quad y = 0. \end{aligned}$$

В результате в обезразмеренных уравнениях вместо g будет фигурировать величина $4\pi^2/\text{Fr}^2$, где Fr — плотностное число Фруда, определяемое равенством

$$\text{Fr} = \frac{U_0 T}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}}, \quad (1.19)$$

T — период Вайсяля—Брента.

Для численного решения задачи вводились в рассмотрение функция тока ψ и завихренность ω : $\omega = \partial U/\partial y - \partial V/\partial x$, $U = \partial\psi/\partial y$, $V = -\partial\psi/\partial x$. Конечно-разностный алгоритм решения задачи основан на применении методов расщепления по пространственным переменным [9]. Осуществлялся переход к новой системе координат $t' = t$, $x' = \varphi_1(x)$, $y' = \varphi_2(y)$. Построенный алгоритм имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t + h^2)$, где $\Delta t, h$ — параметры дискретизации сеточной области по переменным t', x', y' .

3. Результаты расчетов

В качестве примера расчета динамики турбулентных образований в линейно-стратифицированной среде с применением математической модели, аналогичной (1.1)–(1.4), (1.6)–(1.15), рассмотрена задача о вырождении безымпурсного следа [10, 8]. Дополнительно привлекалось уравнение переноса для продольной компоненты скорости W

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \langle w'u' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle w'v' \rangle, \\ -\langle w'u' \rangle &= K_{ex} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad -\langle w'v' \rangle = K_{ey} \frac{\partial W}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В (2.1) в предположении малости опущено слагаемое $\partial \langle p_1 \rangle / \partial z$. Система уравнений (1.1), (1.2), (2.1) — параболизированная система уравнений импульсов; $t = z/W_\infty$, W_∞ — скорость движения невозмущенной жидкости. Начальные условия задавались согласованными с экспериментальными данными Линя и Пао [8, 10]. На рис. 1 рассчитанное изменение осевого значения энергии турбулентности $k = e(z, 0, 0)$ сравнивается с экспериментальными данными Линя и Пао. Здесь знаки \circ и \bullet соответствуют экспериментальным данным

Линя и Пао для однородной жидкости и $F_D = W_\infty T/D = 31$; Δ , \blacktriangle — результаты расчетов Хэссида для однородной и стратифицированной жидкости; пунктирная кривая — результаты настоящей работы для однородной жидкости; сплошная кривая — расчетные данные для $F_D = 31$. Рассчитанные осевые значения интенсивности турбулентных флуктуаций плотности $\sum_c = \sqrt{\langle \rho^2(t, 0, 0) \rangle} / a\rho_0 D F_D^{1/4}$ (они помечены знаком \diamond) для одного из значений числа Фруда $F_D = W_\infty T/D = 31$ сравниваются (рис. 2) с экспериментальными данными [10]. При обезразмеривании здесь использованы масштабы длины D (диаметр

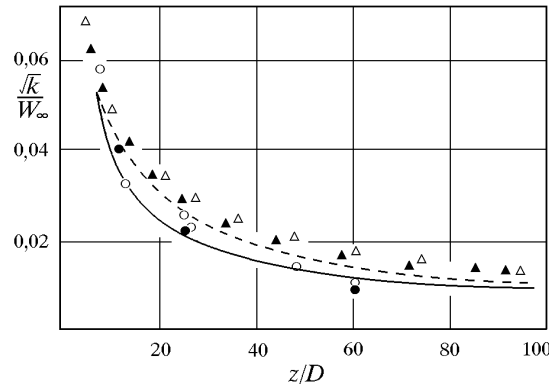


Рис. 1. Изменение осевого значения энергии турбулентности в безимпульсном следе.

тела) и скорости W_∞ . Можно видеть, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Более подробно результаты численного моделирования вырождения турбулентных следов представлены в [8, 11, 12] (см. также цитированную там литературу). Рис. 1, 2 в настоящей работе — лишь иллюстрация возможностей математической модели.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 1, 2 и ниже, получены с использованием следующих общепринятых [13] значений эмпирических постоянных математической модели: $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$; $\sigma = 1,3$; $C_1 = 2,2$; $C_2 = C_3 = 0,55$; $C_t = 1,25$; $C_{1t} = 3,2$; $C_{2t} = 0,5$.

С целью анализа процесса турбулентной диффузии пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения выполнена серия численных экспериментов, основанных на математической модели (1.1)–(1.15). В качестве функций $e_0(r)$, $\varepsilon_0(r)$ в начальных условиях (1.17) задавались автомодельные распределения, соответствующие однородной жидкости. Число Фруда Fg полагалось равным 4,7. Что же касается осредненной концентрации пассивной примеси, то в качестве $\Theta_0(x, y)$ задавалась функция, равная $\Theta^0 = \text{const}$ в круге Ω^0 радиуса R_0 и нулю вне этого круга. Таким образом имитировался локализованный источник примеси. Рассмотрены следующие варианты расположения центра круга Ω^0 , характеризуемые значениями абсциссы и ординаты x_0 , y_0 :

- 1) $x_0^* = 0$, $y_0^* = 0$;
- 2) $x_0^* = 0$, $y_0^* = 0,57$;
- 3) $x_0^* = 0,57$, $y_0^* = 0,57$.

Прежде чем переходить к изложению результатов расчетов, отметим, что основные численные эксперименты проводились на неравномерных ортогональных сетках, сгущающихся в окрестности зоны турбулентного смешения и Ω^0 , с числом узлов 121×101 . Типичный пример сетки приведен на рис. 3. Сеточный аналог Ω^0 при этом представлял приближенную имитацию круга диаметром 6 ячеек; $R_0 = 0,17R$. В окрестности области Ω^0 сетка была равномерной.

Процесс турбулентной диффузии примеси от локализованного источника характеризу-

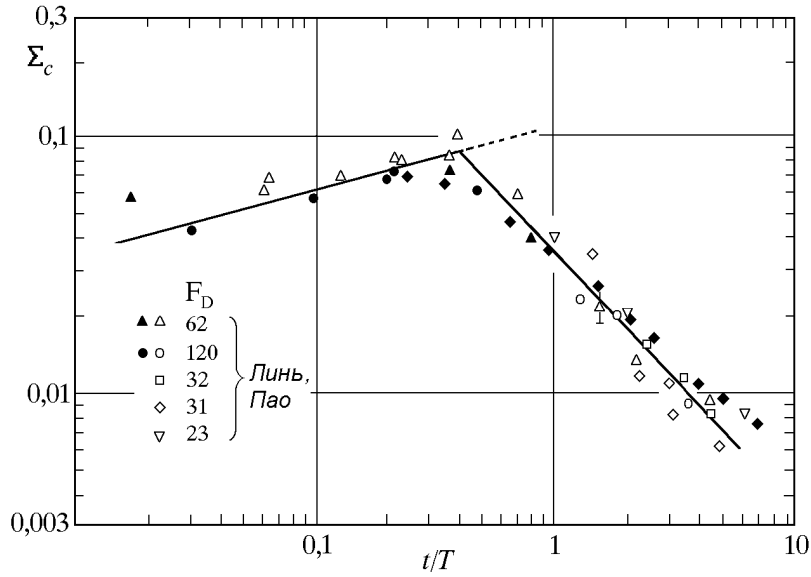


Рис. 2. Изменение интенсивности турбулентных флуктуаций плотности на оси следа.

ется рис. 4, на котором изображено изменение во времени величины $\Theta_m^*(t) = \max_{x,y} \Theta^*(t, x, y)$ для вариантов 1–3 расположения Ω^0 (кривые 1–3). Различие в поведении кривых 1–3 можно объяснить неоднородностью распределения коэффициентов турбулентной диффузии $K_{\theta x}$, $K_{\theta y}$.

Кривая 4 на этом рисунке иллюстрирует изменение во времени характерной величины энергии турбулентности $e_m(t)/U_0^2 = e(t, 0, 0)/U_0^2 = e_m^*(t)$. Можно видеть, что на интервале значений времени $t/T \in [0; 10]$ энергия турбулентности претерпевает значительное изменение и уменьшается на четыре порядка.

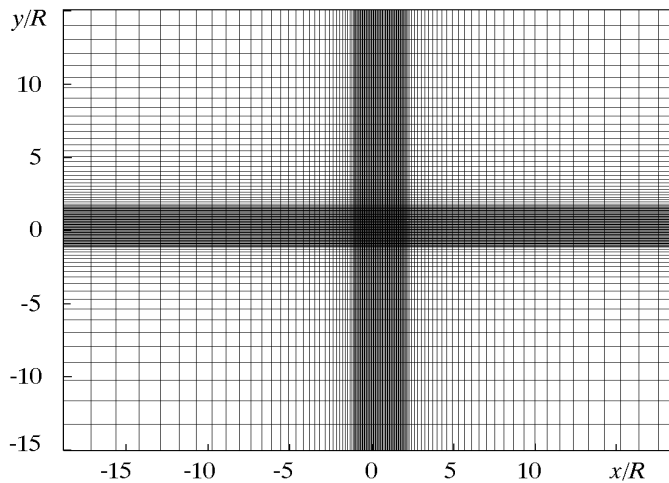


Рис. 3. Расчетная сетка.

Турбулентная диффузия примеси иллюстрируется также рис. 5, на котором представлены изолинии $\Theta/\Theta_m(t) = \text{const}$ (рис. 5, а, б) и $e/e_m(t) = e/e(t, 0, 0) = \text{const}$ (рис. 5, в).

Изолинии соответствуют моменту времени $t/T = 8,0$. На рис. 5, а изображены линии равной концентрации для варианта 1 значений x_0^* , y_0^* ; на рис. 5, б — для варианта 3. Линии равной энергии и линии равной концентрации характеризуются уровнями: 1 — 0,01; 2 —

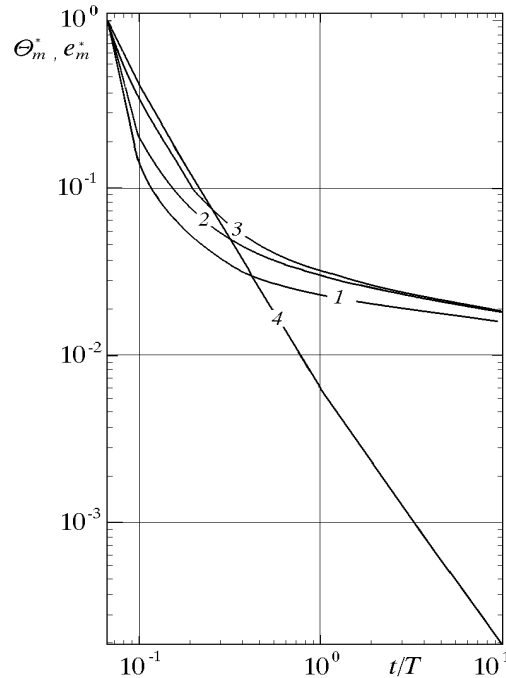


Рис. 4. Турбулентная диффузия примеси от локализованного источника.

0,1; 3 — 0,2; 4 — 0,3; 5 — 0,4; 6 — 0,5; 7 — 0,6; 8 — 0,7; 9 — 0,8; 10 — 0,9. Знаком \diamond на рис. 5, а, б помечены узлы сеточной области, в которых осредненная концентрация достигает максимума. Штриховая линия — граница турбулизованной области, определяемая соотношением $e(t, x, y) = 0,01e_m(t)$.

Изменение во времени величины $r_m(t) = \sqrt{(x_m(t))^2 + (y_m(t))^2}$, характеризующей положение максимума концентрации $\Theta_m^*(t) = \Theta^*(t, x_m, y_m)$, представлено на рис. 6. Кривая 1 на этой фигуре получена для случая однородной жидкости ($g = 0$) и $x_0^* = y_0^* = 0,57$. Кривая 2 соответствует $Fr = 4,7$; $x_0^* = 0$, $y_0^* = 0,57$. Кривая 3 получена при тех же условиях, что и кривая 1, но для $Fr = 4,7$.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что максимальная величина концентрации в варианте 3 достигается на значительном расстоянии от начала координат не только при небольших значениях времени, но и при $t/T \geq 8$. Этот факт не зависит от параметров конечно-разностной сетки. Проводился также расчет с применением другой, более грубой, сетки, когда область Ω^0 представляла "круг" диаметром 4 ячейки. При этом значение $\Theta_m^*(t)$ при $t/T = 6$, в частности, отличалось не более чем на 1%, а величины абсциссы и ординаты максимума — на 5%. Подобные результаты получены и в варианте 2, а также в случае эволюции зоны турбулентного смешения в однородной жидкости.

Поскольку для течения, генерируемого областью турбулизованной жидкости в линейно-стратифицированной среде, справедливо подобие по плотностному числу Фруда [6], результаты расчетов остаются справедливыми также для произвольного достаточно большого числа Fr .

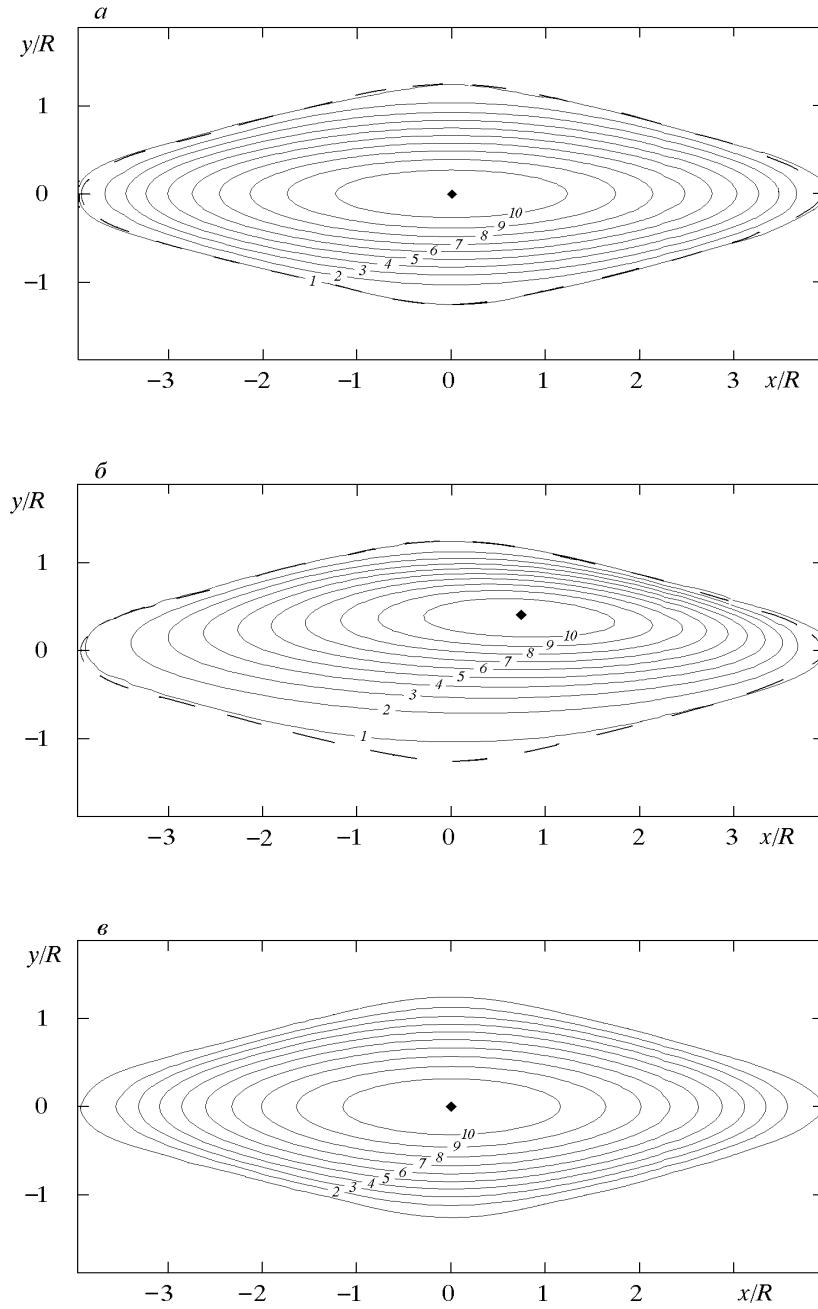


Рис. 5. Изолинии концентрации пассивной примеси (*a* — вариант 1, *б* — вариант 3) и энергии турбулентности (*в*) при $t/T = 8$.

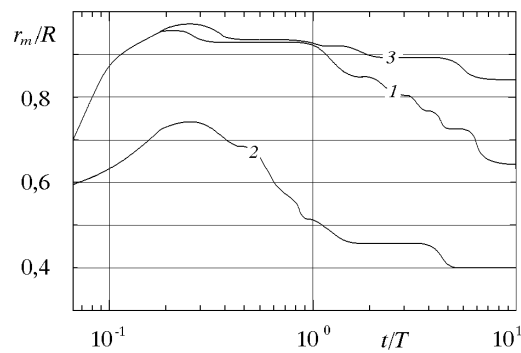


Рис. 6.

В однородной жидкости наблюдаемая тенденция устремления положения максимума концентрации к началу координат может быть объяснена свойствами замкнутого дифференциального уравнения переноса осредненной концентрации пассивной примеси (1.5). При больших значениях времени распределения концентрации становятся автомодельными и идентичными, если только в начальный момент времени суммарный запас примеси был одинаков. Присутствие силы тяжести искажает картину течения, но качественно ситуация не изменяется.

Таким образом, на рассмотренном временном интервале наблюдается существенная зависимость распределения осредненной концентрации пассивной примеси от начальных данных. Процесс вырождения энергии турбулентности в зоне турбулентного смешения происходит значительно быстрее уменьшения величины $r_m(t)$.

Список литературы

- [1] Филлипс О. М. *Динамика верхнего слоя океана*. Гидрометеоиздат, Л., 1980.
- [2] Озмидов Р. В. *Диффузия примесей в океане*. Гидрометеоиздат, Л., 1986.
- [3] RODI W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids. *J. of Geoph. Res.*, **92**, No.C5, 1987, 5305–5328.
- [4] ВАСИЛЬЕВ О. Ф., КУЗНЕЦОВ Б. Г., ЛЫТКИН Ю. М., ЧЕРНЫХ Г. Г. Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде. *Изв. АН СССР, Сер. МЖГ*, №3, 1974, 45–52.
- [5] ТРОХАН А. М., ЧАШЕЧКИН Ю. Д. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости гидродинамически линейным источником (двумерная задача). В *“Теория дифракции и распространения волн: Краткие тексты докл. VII Всесоюз. симпозиума по дифракции и распротр. волн”*, Ростов-на-Дону, **3**, 1977, 186–189.
- [6] ЛЫТКИН Ю. М., ЧЕРНЫХ Г. Г. Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде. *Матем. проблемы механики сплошных сред. Динамика сплошной среды*, вып. 47, 1980, 70–89.

- [7] КОСТОМАХА В. А., ЛЕСНОВА Н. В. Диффузия тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе. В “Методы гидрофизических исследований: Тез. докл. Всесоюзн. школы-семинара, часть II, Светлогорск, 16-25 мая 1989г.”, Калининград, 1989, 42.
- [8] HASSID S. Collapse of Turbulent Wakes in Stably Stratified Media. *J. Hydronautics*, **14**, №1, 1980, 25–32.
- [9] ЯНЕНКО Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Новосибирск, Наука, 1967.
- [10] LIN J. T., PAO Y. H. Wakes in stratified Fluids. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, 1979, 317–338.
- [11] ГЛУШКО Г. С., ГУМИЛЕВСКИЙ А. Г., ПОЛЕЖАЕВ В. И. Эволюция турбулентных следов за шарообразными телами в устойчиво стратифицированных средах. *Изв. РАН, Сер. МЖГ*, №1, 1994, 13–22.
- [12] CHERNYKH G. G., MOSHKIN N. P., VOROPAYEVA O. F. Turbulent wakes in stratified fluids: results of numerical experiments. *Preprints of the Fourth Internat. Symp. on Stratified Flows*, Grenoble, France, June 29 - July 2, **1**, Sess. A2, 103, 1994, 1–8.
- [13] GIBSON M. M., LAUNDER B. E. On the Calculation of Horizontal, Turbulent, Free Shear Flows Under Gravitational Influence. *Int. J. of Heat Transfer*, **C98**, №2, 1976, 81–87.

Поступила в редакцию 24 апреля 1996 г.