СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАНАЛА СВЯЗИ*

А. П. Шибанов
Рязанская государственная радиотехническая академия, Россия
e-mail: mail@shibanov.ryazan.ru

The stochastic model of data link for transfer compressed files sound and video information in real time is considered. The formal setting and solution of parameters optimization of data link work quality problem is given.

Введение

Появление в компьютерных сетях новых видов трафика, таких как IP-телефония, аудио- и видеовещание, обусловило новые требования к обеспечению минимальных задержек пакетов (кадров) и их вариаций. В качестве основных критериев классификации трафика в компьютерных сетях выбраны такие его характеристики: относительная предсказуемость скорости передачи данных, чувствительность к задержкам пакетов, потерям и искажениям пакетов [1]. В настоящее время наблюдается процесс широкого внедрения служб обеспечения параметров качества QoS в сетях ATM, frame relay, а также протокола резервирования ресурсов RSVP в сети Internet. Пользователи заключают с провайдером сети трафик-контракт, в котором оговариваются параметры QoS, в частности ширина полосы пропускания, предоставляемая пользователю, гарантируемые величины задержек передаваемых пакетов и их вариации.

Один из наиболее сложных режимов передачи аудио- и видеоинформации — передача *компрессированных* файлов в реальном времени. Причиной этого, в частности, является необходимость передачи зашифрованной информации в режиме диалога. Криптографическая стойкость алгоритмов шифрования существенно повышается, если выполняется предварительное сжатие информации. Зашифрованная и сжатая информация по чувствительности трафика к задержкам пакетов характеризуется как изохронная или сверхчувствительная. Изохронные приложения при превышении порога чувствительности резко снижают свою функциональность, а сверхчувствительные перестают функционировать. Для компрессированных файлов аудио- и видеоинформации исключаются возможность потери фрагментов данных и любое искажение информации.

Целью настоящей работы является разработка математической модели процесса передачи компрессированного файла звуковой или видеоинформации в реальном времени через канал компьютерной сети с обеспечением требуемых показателей качества QoS при минимально необходимых затратах.

1. Постановка задачи

Рассмотрим процесс передачи файла через канал при следующих предположениях:

1. Изохронный или сверхчувствительный к задержкам и чувствительный к потерям компрессированный аудио- или видеофайл имеет высший приоритет в очереди коммутатора или маршрутизатора.

2. Файл может содержать от одного до n кадров. Число кадров в файле случайное и задается дискретным распределением с вероятностями q_1, q_2, ... , q_n.

3. Время передачи кадра описывается экспоненциальным распределением с параметром λ.

4. Вероятность передачи кадра через канал связи без искажений равна p. Кадры передаются в старт-стопном режиме. Если кадр передан без искажений, то на передающую сторону посылается *положительная квитанция* и передатчик начинает передачу следующего кадра. Если кадр передан неверно, то на передающую сторону посылается *отрицательная квитанция* и кадр передается повторно до тех пор, пока не будет передан без искажений. Реально число повторных передач в каналах связи ограничено, но в графовой модели число повторных передач можно принять бесконечно большим, так как величина $1-p$ обычно невелика и при увеличении числа допустимых повторных передач r значение $(1-p)^r$ быстро стремится к 0. Таким образом, при увеличении r ациклическая модель в пределе быстро сходится к циклической.

5. При использовании дополнительных финансовых затрат c качество канала связи можно повысить и количественной характеристикой этого будет увеличение значения параметра p. Считаем известной функциональную зависимость между этими величинами $p = f(c)$. Возьмем ее экспоненциальной: $p = 1 - \exp(-\gamma c)$, где γ — задаваемый пользователем коэффициент. В исходном состоянии качество канала связи характеризуется величиной p_0. Увеличение значения p соответствует повышению качества канала связи, и можно однозначно указать необходимые для этого затраты. Уменьшение значения p соответствует ухудшению качества работы канала и, соответственно, определенной потере материальных (или финансовых) средств.

2. Решение задачи

Рассмотрим процесс передачи файла при $n = 4$. Он может быть описан GERT-моделью [2], изображенной на рис. 1. Здесь ветвь (1,2) характеризует совокупные постоянные задержки при выполнении операций и имеет производящую функцию моментов $\exp(s\tau)$. Ветви (2,3), (4,5), (6,7), (8,9) отражают операции передачи кадра и посылки положительной квитанции и имеют W-функцию $p\lambda/(\lambda - s)$. Ветви (2,2), (4,4), (6,6), (8,8) характеризуют операции передачи кадра и посылки отрицательной квитанции и описываются W-преобразованием $(1-p)\,\lambda/(\lambda - s)$. Ветви (3,9), (5,9), (7,9) определяют передачу одного, двух или трех кадров, имеют производящую функцию моментов, равную 1, и характеризуются соответственно вероятностями q_1, q_2, q_3. Ветви (3,4), (5,6), (7,8) имеют производящую функцию моментов, равную 1, и вероятности исполнения $1-q_1$, $1-q_2$, $1-q_3$.

Модель, изображенная на рис. 1, может быть преобразована в эквивалентную форму, не содержащую петель порядка выше первого. При этом упрощается вычисление эквивалентной W-функции GERT-сети. Петля (2,2) и дуга (2,3) заменяются одной эквивалентной дугой с эквивалентной W-функцией $W_3/(1-W_2)$. Аналогичная замена производится для

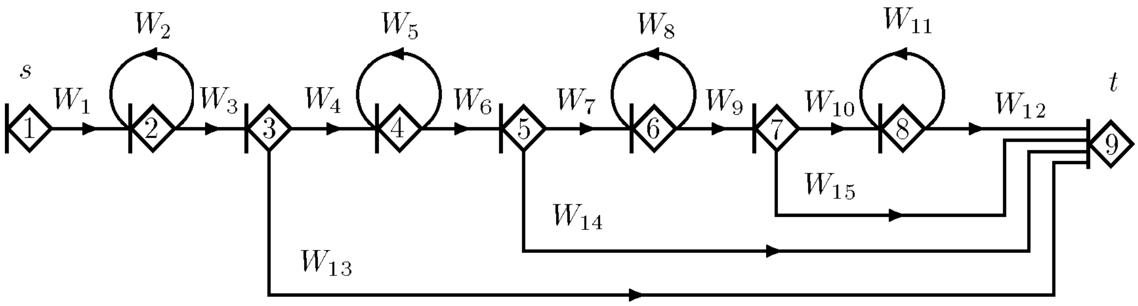

Рис. 1. GERT-модель процесса передачи файла при $n = 4$.

пар дуг: (4,4), (4,5); (6,6), (6,7); (8,8), (8,9). В результате этого получаем соответственно эквивалентные W-функции: $W_6/(1-W_5)$, $W_9/(1-W_8)$, $W_{12}/(1-W_{11})$.

После преобразования структуры GERT-модели ее эквивалентная W-функция $\tilde{W}_E(s)$ определяется выражением

$$\tilde{W}_E(s) = W_1\frac{W_3}{1-W_2}W_4\frac{W_6}{1-W_5}W_7\frac{W_9}{1-W_8}W_{10}\frac{W_{12}}{1-W_{11}}+$$

$$+W_1\frac{W_3}{1-W_2}W_4\frac{W_6}{1-W_5}W_7\frac{W_9}{1-W_8}W_{15}+W_1\frac{W_3}{1-W_2}W_4\frac{W_6}{1-W_5}W_{14}+W_1\frac{W_3}{1-W_2}W_{13}. \quad (1)$$

Подставляя в формулу (1) значения производящих функций моментов дуг и вероятностей их исполнения, получаем

$$\tilde{W}_E(s) = \alpha_1 e^{s\tau}\frac{(\lambda p)^4}{(\lambda p - s)^4} + \alpha_2 e^{s\tau}\frac{(\lambda p)^3}{(\lambda p - s)^3} + \alpha_3 e^{s\tau}\frac{(\lambda p)^2}{(\lambda p - s)^2} + \alpha_4 e^{s\tau}\frac{\lambda p}{\lambda p - s},$$

где $\alpha_1 = q_1$, $\alpha_2 = (1-q_1)\,q_2$, $\alpha_3 = (1-q_1)(1-q_2)\,q_3$, $\alpha_4 = (1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)$.

При произвольном значении n имеем эквивалентную W-функцию $W_E(s)$:

$$W_E(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{s\tau}\frac{(\lambda p)^i}{(\lambda p - s)^i}. \quad (1)$$

Для нахождения плотности распределения вероятностей времени передачи файла $\varphi(x)$ воспользуемся методами теории аналитических функций комплексного переменного. Выполним преобразование переменных $z = -s$. Тогда функция $W_E(s)$ преобразуется в комплексную функцию $F(z)$, а значение $\varphi(x)$ определится по формуле Бромвича — Вагнера [3]:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}[e^{zx}F(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx}F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-z\tau}\frac{(\lambda p)^i}{(\lambda p + z)^i}dz. \quad (2)$$

Функция $F(z)$ должна иметь полюсы, лежащие левее мнимой оси, и удовлетворять условиям леммы Жордана. Для выполнения условий леммы Жордана необходимо, чтобы в левой полуплоскости функция $F(z)$ была аналитической, за исключением конечного числа полюсов, и стремилась к нулю при $|z| \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$. Из выражения (??) следует, что условия леммы Жордана выполняются.

Для определения плотности $\varphi(x)$ нужно найти сумму вычетов функции $\exp(zx)F(z)$ относительно всех особых точек. Функция $\exp(zx)F(z)$ имеет n особых точек — полюсов порядков $1, 2, \ldots, n$ в точке $z_0 = -\lambda p$. Тогда

$$\varphi(x) = \sum \operatorname*{Res}_{z=z_0}[\mathrm{e}^{zx} F(z)] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}[(z-z_0)^n \mathrm{e}^{zx} F(z)]}{dz^{n-1}}.$$

Найдем вычет от функции $\mathrm{e}^{zx} F_i(z)$, учитывая, что

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} F_i(z) = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i \exp(-z\tau)(\lambda p)^i\right] \Big/ (\lambda p + z)^i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \mathrm{e}^{zx} F_i(z) = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{i-1}\left[(z-z_0)^i \mathrm{e}^{zx} F_i(z)\right]}{dz^{i-1}} =$$

$$= \frac{1}{(i-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{i-1}\left[\alpha_i \mathrm{e}^{z(x-\tau)} (\lambda p)^i\right]}{dz^{i-1}} = \frac{\alpha_i (\lambda p)^i}{(i-1)!} (x-\tau)^{i-1} \mathrm{e}^{-\lambda p (x-\tau)}.$$

Находя сумму вычетов относительно всех особых точек, получаем плотность $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\lambda p (x-\tau)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i (\lambda p)^i}{(i-1)!} (x-\tau)^{i-1} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda p (x-\tau)} \left[\alpha_1 \lambda p + \alpha_2 (\lambda p)^2 (x-\tau) + \ldots + \frac{\alpha_n (\lambda p)^n}{(n-1)!} (x-\tau)^{i-1}\right],$$

где $x > \tau$.

Дифференцируя выражение (2) по переменной s, находим среднее время передачи $t_{\text{ср}}$ и его дисперсию σ^2:

$$t_{\text{ср}} = \left.\frac{\partial W_E(s)}{\partial s}\right|_{s=0} = \tau + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + \alpha_n n}{\lambda p} = \tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i}{\lambda p},$$

$$\sigma^2 = \left.\frac{\partial^2 W_E(s)}{\partial s^2}\right|_{s=0} - \left(\left.\frac{\partial W_E(s)}{\partial s}\right|_{s=0}\right)^2 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n}{(\lambda p)^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i}{(\lambda p)^2}.$$

Зная модельные среднее значение времени передачи файла $t_{\text{ср}}$, дисперсию σ^2 и плотность распределения вероятностей $\varphi(x)$, можно определить вероятность отклонения от среднего времени передачи и сравнить ее с заданными показателями качества конкретного канала связи. Если эти требования не выполняются, то принимаются меры по улучшению качества канала связи и его модернизации.

Возьмем целевую функцию вида

$$\Phi(c) = \beta_1 c + \beta_2 t_{\text{ср}}, \quad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0. \tag{3}$$

Тогда задача оптимизации сводится к нахождению минимума функции одной переменной:

$$\operatorname{Min}\left\{\beta_1 c + \beta_2 \left(\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i}{\lambda p}\right) = \beta_1 c + \beta_2 \left[\tau + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i}{\lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma c}\right)}\right]\right\}.$$

Найдем точку экстремума функции $\Phi(c)$:

$$\frac{d\Phi(c)}{dc} = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i \frac{-\gamma \mathrm{e}^{-\gamma c}}{(1-\mathrm{e}^{-\gamma c})^2} = 0$$

или

$$\frac{\mathrm{e}^{-\gamma c}}{(1-\mathrm{e}^{-\gamma c})^2} = K, \tag{4}$$

где $K = (\beta_1\lambda)\Big/\left(\gamma\beta_2\sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i\right) > 0$. Вводя обозначение $\exp(-\lambda c) = f$, получаем

$$f_1 = \left(2K + \sqrt{(2K+1)^2 - 4K^2}\right)\Big/(2K),$$

$$f_2 = \left(2K - \sqrt{(2K+1)^2 - 4K^2}\right)\Big/(2K).$$

Оба корня положительные, причем $f_1 > 1$, $f_2 < 0$. Так как функция $0 < \exp(-\gamma c) \leq 1$, корень f_1 не удовлетворяет уравнению (**??**). Имеем экстремум в точке $c_0 = -(1/\gamma)\ln\left((2K + 1 - \sqrt{4K+1}\right)/(2K)\big)$.

Найдем вторую производную от функции $\Phi(c)$:

$$\frac{d^2\Phi(c)}{dc^2} = \frac{\gamma^2}{\lambda}\beta_2\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i \frac{\mathrm{e}^{-\gamma c}(1+\mathrm{e}^{-\gamma c})}{(1-\mathrm{e}^{-\gamma c})^3} = \frac{\gamma\beta_1}{K}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma c}(1+\mathrm{e}^{-\gamma c})}{(1-\mathrm{e}^{-\gamma c})^3}.$$

При $c > 0$ выполняются неравенства $1 + \exp(-\gamma c) > 0$ и $1 - \exp(-\gamma c) > 0$. Тогда $d^2\Phi(c)/dc^2 > 0$ и точка c_0 является минимумом функции $\Phi(c)$. Минимальному значению величины c_0 соответствует значение вероятности правильной передачи $p_0 = 1 - \sqrt[\gamma]{\left(2K+1-\sqrt{4K+1}\right)/(2K)}$. Вид функции $\Phi(c)$ при $n = 5\ldots8$ приведен на рис. 2. Единицей времени взята 1 мс. График построен при следующих значениях параметров: $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = 0,25$; $\lambda = 0,5$; $\tau = 1$, $\gamma = 0,5$; $\beta_1 = 0,01$, $\beta_2 = 1$.

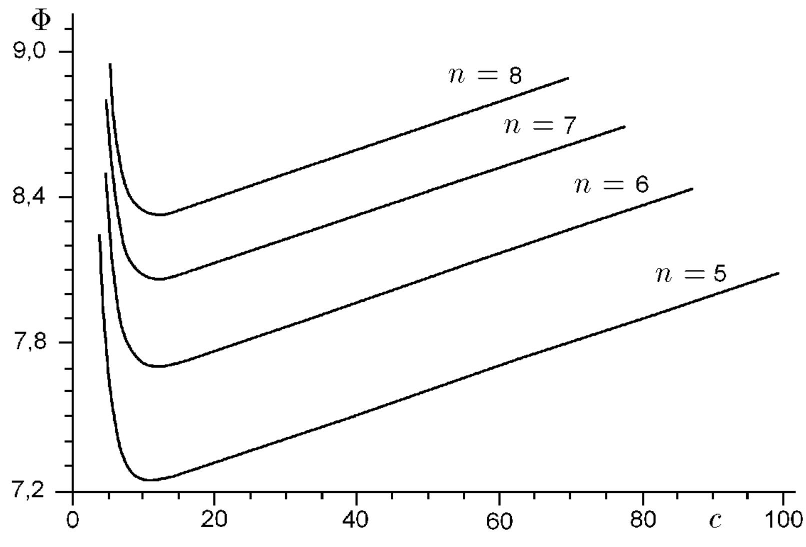

Рис. 2. Вид функции $\Phi(c)$ при значениях $n = 5\ldots8$.

По известной функции $\Phi(c)$ легко найти затраты, необходимые для повышения качества канала связи до такой степени, что будет гарантировано попадание среднего времени передачи файла и его вариации в заданные интервалы. С увеличением значения n или длины файла увеличиваются как задержка передачи $t_{\text{ср}}$, так и ее вариация, измеряемая в данном случае интервалом 3σ. Последняя при $n=8$ не превышает 11.42 мс. Величина p, определяющая качество канала связи, должна быть не ниже 0.9972 при минимально необходимых затратах в 11.78 условных единиц.

Заключение

Рассмотренная модель после непринципиальных изменений может быть использована для анализа процесса передачи информации и с другими профилями трафика. Передача может вестись не в старт-стопном режиме, а, например, с использованием "оконной" стратегии. Функция затрат необязательно должна быть экспоненциальной.

Функция распределения времени передачи файла может быть использована как обобщенная характеристика задержки передачи через канал связи в более сложных моделях, реализованных на основе систем имитации. Такие модели предназначены для исследования алгоритмов управления трафиком в современных коммутаторах и маршрутизаторах со сложными дисциплинами обслуживания очередей.

Список литературы

[1] Олифер В. Г., Олифер Н. А. Новые технологии и оборудование IP-сетей. СПб.: БХВ-Петербург, 2001.

[2] Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей: М.: Мир, 1984.

[3] Лавреньтьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

Поступила в редакцию 25 июня 2002 г.