Вычислительные технологии **Том 8, № 3, 2003**

РЕДУКЦИЯ ВЕКТОРНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ СХЕМЫ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ К СХЕМЕ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ УЗЛОВ*

А. И. Задорин, А. В. Чеканов
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия
e-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru, andy@omskplast.com

Three-point vector difference scheme on the infinite interval is considered. The scheme corresponds to the approximation of elliptic equation in a strip. The reduction method of the scheme to the scheme with a finite number of grid points is investigated on the basis of the extraction of the variety of difference equation solutions, which satisfy the limit conditions at infinity. The results of numerical experiments are provided.

Рассматривается трехточечная векторная разностная схема с бесконечным числом узлов и предельными условиями на бесконечности. Такая схема соответствует сеточной аппроксимации двумерного эллиптического уравнения в бесконечной полосе с условием стремления решения к нулю на бесконечности. Для компьютерной реализации такой схемы необходимо редуцировать схему с бесконечным числом узлов к схеме с конечным числом узлов.

Цель работы состоит в разработке метода редукции разностных схем с бесконечным числом узлов к схемам с конечным числом узлов. Предлагается сделать это выделением многообразия всех решений разностного уравнения, удовлетворяющих предельным условиям на бесконечности. Выделенное многообразие будет задаваться в виде двухточечного разностного уравнения и может рассматриваться в качестве недостающего граничного условия при переходе к схеме с конечным числом узлов. Метод выделения устойчивых многообразий для переноса краевых условий из особых точек в случае обыкновенных дифференциальных уравнений предложен А. А. Абрамовым в 1961 году [1] и развит в ряде работ, например в [2]. Настоящая работа продолжает работы [3, 4]. В [3] рассмотрена векторная разностная схема для полубесконечного интервала, в [4] — скалярная разностная схема для бесконечного интервала. В настоящей работе исследуется векторная разностная схема для бесконечного интервала.

Остановимся на обозначениях. Определим векторную и согласованную с ней матричную нормы:

$$\|Z\| = \max_j |Z^j|,\ 1 \le j \le N, \quad \|G\| = \max_i \sum_{j=1}^{N} |G_{ij}|.$$

Под векторным неравенством будем понимать покомпонентные неравенства.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01166.

1. Выделение устойчивых многообразий

Рассмотрим исходную векторную схему

$$L_i U = C_i U_{i-1} - G_i U_i + D_i U_{i+1} = F_i, \ -\infty < i < \infty, \tag{1}$$

$$U_i \to 0 \text{ при } i \to \pm\infty. \tag{2}$$

Предполагаем, что при каждом i U_i и F_i — N-мерные векторы, C_i и D_i — положительные диагональные матрицы порядка N, G_i — M-матрицы [5, с. 269]:

$$C_i \to C_{+\infty}, \ G_i \to G_{+\infty}, \ D_i \to D_{+\infty}, \ F_i \to 0, \ i \to +\infty, \tag{3а}$$

$$C_i \to C_{-\infty}, \ G_i \to G_{-\infty}, \ D_i \to D_{-\infty}, \ F_i \to 0, \ i \to -\infty; \tag{3б}$$

$$\|G_i^{-1} C_i\| + \|G_i^{-1} D_i\| \le \sigma < 1, \quad Q_i = G_i - C_i - D_i,$$

$$Q_i^{jj} \ge \sum_{k \ne j} |Q_i^{jk}| + \Delta, \ \Delta > 0, \ -\infty < i < \infty, \ 1 \le j \le N. \tag{4}$$

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$\max_i \|U_i\| \le \Delta^{-1} \max_i \|F_i\|.$$

Доказательство. Покажем, что для оператора L справедлив принцип максимума, в соответствии с которым из условий

$$\lim_{i \to \pm\infty} \Psi_i \ge 0, \ L_i \Psi \le 0, \quad -\infty < i < \infty, \tag{5}$$

следует, что для векторов Ψ_i при любом значении i выполнено $\Psi_i \ge 0$.

Пусть для некоторых i, j $\Psi_i^j < 0$. Без ограничения общности можно считать, что в (i, j) достигается локальный минимум функции Ψ, который, очевидно, существует. Тогда

$$\begin{aligned}(L_i \Psi)^j \ &= C_i^{jj}(\Psi_{i-1}^j - \Psi_i^j) + D_i^{jj}(\Psi_{i+1}^j - \Psi_i^j) - \sum_{k=1}^N G_i^{jk}(\Psi_i^k - \Psi_i^j) - \\ &- \Psi_i^j \sum_{k=1}^N (G_i^{jk} - C_i^{jk} - D_i^{jk}) \ge - \sum_{k \ne j} G_i^{jk}(\Psi_i^k - \Psi_i^j) - \Psi_i^j \sum_{k=1}^N Q_i^{jk}.\end{aligned}$$

Используя (4), получаем $(L_i \Psi)^j > 0$, что противоречит предположению (5). Таким образом, для оператора L справедлив принцип максимума. Рассмотрим сеточную функцию

$$\Psi_i^j = \Delta^{-1} \max_i \|F_i\| \pm U_i^j.$$

Для нее, очевидно, выполнены условия (5), поэтому при всех значениях i $\Psi_i \ge 0$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует единственность решения задачи (1), (2).

Выделим многообразия решений разностного уравнения (1), которые, как будет показано ниже, удовлетворяют предельным условиям на плюс и минус бесконечности соответственно:

$$U_i^+ = A_i^+ U_{i-1}^+ + B_i^+, \tag{6а}$$

$$U_i^- = A_i^- U_{i+1}^- + B_i^-, \tag{6б}$$

где $A_i^\pm$ и $B_i^\pm$ — матрицы и векторы, являющиеся решениями следующих задач:

$$A_i^+ = (G_i - D_i A_{i+1}^+)^{-1} C_i, \quad A_i^+ \to A_{+\infty},\ i \to \infty, \tag{7а}$$

$$A_i^- = (G_i - C_i A_{i-1}^-)^{-1} D_i, \quad A_i^- \to A_{-\infty},\ i \to -\infty, \tag{7б}$$

$$D_i B_{i+1}^+ - (G_i - D_i A_{i+1}^+) B_i^+ = F_i, \quad B_i^+ \to 0,\ i \to \infty, \tag{8а}$$

$$C_i B_{i-1}^- - (G_i - C_i A_{i-1}^-) B_i^- = F_i, \quad B_i^- \to 0,\ i \to -\infty. \tag{8б}$$

Матрицы $A_{\pm\infty}$ в (7) зададим по норме меньшими единицы как решения квадратных матричных уравнений:

$$D_{+\infty} A^2 - G_{+\infty} A + C_{+\infty} = 0, \tag{9а}$$

$$C_{-\infty} A^2 - G_{-\infty} A + D_{-\infty} = 0. \tag{9б}$$

Лемма 2. *Существуют решения $A_{+\infty}$ и $A_{-\infty}$ уравнений (9а) и (9б) соответственно, удовлетворяющие условиям*

$$\|A_{\pm\infty}\| < \sigma. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (9а). Будем искать его решение как предел последовательности:

$$T_1 = Q,\ T_{n+1} = P T_n^2 + Q,$$

где

$$P = G_{+\infty}^{-1} D_{+\infty},\ Q = G_{+\infty}^{-1} C_{+\infty}.$$

Очевидно, что если существует предел $T_{+\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$, то $T_{+\infty}$ будет решением уравнения (9а).

Учитывая, что $G_{+\infty}$ — M-матрица, заключаем, что у матриц P и Q все элементы неотрицательны. В силу (4) $\|P\| + \|Q\| \le \sigma < 1$. Так как

$$T_{n+1}^{ij} = \sum_{k=1}^{N} P^{ik} \left(\sum_{l=1}^{N} T_n^{kl} T_n^{lj} \right) + Q^{ij},$$

то

$$T_2^{ij} \ge T_1^{ij} = Q^{ij} \ge 0, \quad 1 \le i, j \le N.$$

Пусть при всех значениях i, j $T_n^{ij} - T_{n-1}^{ij} \ge 0$. Тогда

$$T_{n+1}^{ij} - T_n^{ij} = \sum_{k=1}^{N} P^{ik} \left\{ \sum_{l=1}^{N} (T_n^{kl} T_n^{lj} - T_{n-1}^{kl} T_{n-1}^{lj}) \right\} \ge 0, \quad 1 \le i, j \le N,\ n > 1.$$

Итак, при всех (i, j) последовательность $\{T_n^{ij}\}$ является неубывающей. Кроме того, так как $\|T_1\| = \|Q\| \le \sigma$, по индукции получаем, что при всех n

$$\|T_{n+1}\| \le \|P\| \cdot \|T_n\|^2 + \|Q\| \le \|P\| \cdot \sigma^2 + \|Q\| < \|P\| + \|Q\| \le \sigma,$$

т.е. последовательность $\{T_n^{ij}\}$ ограничена сверху числом σ. Таким образом, существует предел $T_{+\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$, являющийся решением уравнения (9а) и удовлетворяющий условию $\|T_{+\infty}\| \le \sigma$. Равенство $\|T_{+\infty}\| = \sigma$ невозможно, так как в этом случае

$$\sigma = \|T_{+\infty}\| = \|P T_{+\infty}^2 + Q\| \le \|P\| \sigma^2 + \|Q\| < \sigma.$$

Для уравнения (9б) рассуждения проводятся аналогичным образом. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть*

$$p_{\pm\infty} = \|G^{-1}_{\pm\infty} D_{\pm\infty}\|, \quad q_{\pm\infty} = \|G^{-1}_{\pm\infty} C_{\pm\infty}\|.$$

Имеют место следующие оценки:

$$\|A_{+\infty}\| \le \frac{2q_{+\infty}}{p_{+\infty} + q_{+\infty} + 2(1-\sigma) + |p_{+\infty} - q_{+\infty}|}, \tag{11а}$$

$$\|A_{-\infty}\| \le \frac{2p_{-\infty}}{p_{-\infty} + q_{-\infty} + 2(1-\sigma) + |p_{-\infty} - q_{-\infty}|}. \tag{11б}$$

Доказательство. Докажем неравенство (11а). Из уравнения (9а) следует, что

$$p_{+\infty}\|A_{+\infty}\|^2 - \|A_{+\infty}\| + q_{+\infty} \ge 0. \tag{12}$$

Учитывая, что $\|A_{+\infty}\| < \sigma$, из неравенства (12) получаем

$$\|A_{+\infty}\| \le \frac{2q_{+\infty}}{1 + \sqrt{1 - 4p_{+\infty}q_{+\infty}}}.$$

Учитывая, что $p_{+\infty} + q_{+\infty} \le \sigma$, получаем (11а). Доказательство неравенства (11б) проводится аналогичным образом.

Заметим, что матрицы $A_{+\infty}$ и $A_{-\infty}$ невырождены. Это следует из того, что

$$C_{+\infty} = (G_{+\infty} - D_{+\infty}A_{+\infty})A_{+\infty},\ D_{-\infty} = (G_{-\infty} - C_{-\infty}A_{-\infty})A_{-\infty},$$

а матрицы $C_{+\infty}$ и $D_{-\infty}$ невырождены.

Лемма 4. *Для всех* $i \quad 0 < \|A_i^{\pm}\| < \sigma$.

Доказательство. Неравенство $\|A_i^+\| < \sigma$ для решения задачи (7а) доказано в [3]. Случай задачи (7б) разбирается аналогично. Невырожденность матриц $A_i^{\pm}$ является следствием неравенства $\|A_i^{\pm}\| < \sigma$ и уравнений (7).

Лемма 5. *Решения уравнений (6а), (6б) удовлетворяют предельным условиям (2) соответственно на плюс и минус бесконечности.*

Доказательство. Пусть U_i^+ — решение (6а). Тогда при $i > 0$

$$\|U_i^+\| \le \sigma^i \|U_0^+\| + \sum_{k=1}^{i} \sigma^{i-k} \|B_k\|.$$

Учитывая, что $\|B_k\| \to 0$ при $k \to \infty$, а $\sigma < 1$, можно показать, что $\|U_i^+\| \to 0, \quad i \to \infty$. Аналогично можно убедиться в том, что $\|U_i^-\| \to 0, \quad i \to -\infty$. Лемма доказана.

Таким образом, мы показали, что уравнения (6а), (6б) действительно выделяют многообразия решений уравнения (1), удовлетворяющих предельным условиям соответственно на плюс и минус бесконечности.

2. Исследование вопроса существования и единственности

Для того чтобы многообразия в виде уравнений (6а), (6б) были заданы корректно, необходимо, чтобы коэффициенты $A_i^{\pm}$ и $B_i^{\pm}$ были из своих задач однозначно определены, поэтому исследуем вопрос существования и единственности решений задач (7), (8). Будем использовать результаты работы [6], где исследовались матричные уравнения Риккати с бесконечным числом узлов.

Пусть $\lambda_{+\infty}^i$ — собственные числа матрицы $A_{+\infty}$, $\nu_{+\infty}^j$ — собственные числа матрицы $B_{+\infty} = D_{+\infty}^{-1}G_{+\infty} - A_{+\infty}$, $\lambda_{-\infty}^i$ — собственные числа матрицы $A_{-\infty}$, $\nu_{-\infty}^j$ — собственные числа матрицы $B_{-\infty} = C_{-\infty}^{-1}G_{-\infty} - A_{-\infty}$. Для доказательства существования и единственности решений задач (7) и (8) нам понадобятся следующие условия отделения: при всех j выполнены неравенства

$$|\nu_{+\infty}^j| > 1, \tag{13а}$$

$$|\nu_{-\infty}^j| > 1. \tag{13б}$$

Так как для всех собственных чисел $\lambda_{\pm\infty}^i$ верно

$$|\lambda_{\pm\infty}^i| \le \max\left(\|A_{+\infty}\|, \|A_{-\infty}\|\right) < \sigma < 1,$$

из (13) следует, что при всех i, j выполнены и такие неравенства:

$$|\lambda_{+\infty}^i| < |\nu_{+\infty}^j|, \tag{14а}$$

$$|\lambda_{-\infty}^i| < |\nu_{-\infty}^j|. \tag{14б}$$

Лемма 6. *Пусть выполнены условия отделения (13а). Тогда существуют единственные решения задач (7а), (8а). Пусть выполнены условия отделения (13б). Тогда существуют единственные решения задач (7б), (8б).*

Доказательство. Пусть выполнены условия (13а). Запишем уравнение (7а) в следующем виде:

$$(G_i - D_i A_{i+1}^+) A_i^+ = C_i.$$

Пусть $Z_i = A_i^+ - A_{+\infty}$. Тогда

$$Z_{i+1}A_{+\infty} = (D_i^{-1}G_i - A_{+\infty})Z_i - Z_{i+1}Z_i + (D_i^{-1}G_iA_{+\infty} - A_{+\infty}^2 - D_i^{-1}C_i). \tag{15}$$

В соответствии с теоремой 2 из [6] при всех достаточно больших i ($i \ge K$) для матричного разностного уравнения Риккати

$$x_{i+1}a_i = b_i x_i + x_{i+1}d_i x_i + g_i$$

определено и единственно решение такое, что $x_i \to 0, \quad i \to \infty$, в случае, если матрицы d_i ограничены,

$$|d_i^{kl}| \le d, \ 1 \le k, l \le N,$$

матрицы a_i невырождены, существуют пределы

$$\lim_{i\to\infty} g_i = 0, \quad \lim_{i\to\infty} a_i = a_{+\infty}, \quad \lim_{i\to\infty} b_i = b_{+\infty},$$

а для собственных чисел $\lambda^i_{+\infty}$ матрицы $a_{+\infty}$ и собственных чисел $\nu^j_{+\infty}$ матрицы $b_{+\infty}$ выполнены условия отделения (14а).

Легко видеть, что

$$d_i \equiv -I, \quad \lim_{i\to\infty} a_i = A_{+\infty}, \quad \lim_{i\to\infty} b_i = D^{-1}_{+\infty}G_{+\infty} - A_{+\infty} = B_{+\infty},$$

кроме того, в соответствии с (9а)

$$\lim_{i\to\infty} g_i = D^{-1}_{+\infty}G_{+\infty}A_{+\infty} - A^2_{+\infty} - D^{-1}_{+\infty}C_{+\infty} = 0.$$

Так как из условий (13а) следуют условия (14а), в соответствии с теоремой 2 из [6] уравнение (15) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\lim_{i\to\infty} Z_i = 0$. Это решение определено при $i \geq K$. Но из условий (4) и леммы 4 следует, что при всех i матрицы $G_i - D_iA^+_{i+1}$ невырождены, следовательно, решение уравнения (7а) также определено единственным образом и при $i < K$.

Аналогичным образом уравнение (8а) переписывается в виде

$$B^+_{i+1} = (D^{-1}_i G_i - A^+_{i+1})B^+_i + D^{-1}_i F_i. \tag{16}$$

В этом случае

$$d_i \equiv 0, \quad \lim_{i\to\infty} a_i = I, \quad \lim_{i\to\infty} b_i = D^{-1}_{+\infty}G_{+\infty} - A_{+\infty} = B_{+\infty}, \quad \lim_{i\to\infty} g_i = 0.$$

В силу условий (13а) уравнение (16) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\lim_{i\to\infty} B^+_i = 0$. Рассуждения для задач (7б), (8б) проводятся аналогично. Лемма доказана.

Следующая лемма дает некоторые из возможных случаев выполнения условий отделения (13).

Лемма 7. *Пусть* $C^{ii}_{+\infty} \geq D^{ii}_{+\infty}, \quad 1 \leq i \leq N,$ *или матрицы* $C_{+\infty}$, $D_{+\infty}$ *скалярны. Тогда выполнено (13а). Пусть* $D^{ii}_{-\infty} \geq C^{ii}_{-\infty}, \quad 1 \leq i \leq N,$ *или матрицы* $D_{-\infty}$, $C_{-\infty}$ *скалярны. Тогда выполнено (13б).*

Доказательство. Докажем (13а). Пусть при всех i $C^{ii}_{+\infty} \geq D^{ii}_{+\infty}$. В силу (9а)

$$B_{+\infty} = D^{-1}_{+\infty}G_{+\infty} - A_{+\infty} = D^{-1}_{+\infty}C_{+\infty}A^{-1}_{+\infty}.$$

Так как матрица $B_{+\infty}$ невырождена, для всех собственных чисел $\nu^j_{+\infty}$ верно

$$|\nu^j_{+\infty}| \geq \frac{1}{\|B^{-1}_{+\infty}\|} \geq \frac{1}{\|A_{+\infty}\|\|C^{-1}_{+\infty}D_{+\infty}\|} > \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\|C^{-1}_{+\infty}D_{+\infty}\|}.$$

Так как $C^{ii}_{+\infty} \geq D^{ii}_{+\infty}$, имеем $\|C^{-1}_{+\infty}D_{+\infty}\| \leq 1$, откуда получаем неравенство

$$|\nu^j_{+\infty}| > \frac{1}{\sigma} > 1,$$

что завершает доказательство.

Пусть теперь матрицы $C_{+\infty}$, $D_{+\infty}$ скалярны. В этом случае

$$|\nu^j_{+\infty}| \geq \frac{1}{\|B^{-1}_{+\infty}\|} \geq \frac{1}{\|A_{+\infty}\|\cdot\|C^{-1}_{+\infty}D_{+\infty}\|} = \frac{1}{\|A_{+\infty}\|}\frac{\|C_{+\infty}\|}{\|D_{+\infty}\|}.$$

В силу скалярности матриц $C_{+\infty}$, $D_{+\infty}$ имеем

$$\frac{\|C_{+\infty}\|}{\|D_{+\infty}\|} = \frac{\|G_{+\infty}^{-1}\| \cdot \|C_{+\infty}\|}{\|G_{+\infty}^{-1}\| \cdot \|D_{+\infty}\|} = \frac{\|G_{+\infty}^{-1} C_{+\infty}\|}{\|G_{+\infty}^{-1} D_{+\infty}\|} = \frac{q_{+\infty}}{p_{+\infty}}.$$

Так как в соответствии с леммой 3

$$\|A_{+\infty}\| \le \frac{2q_{+\infty}}{p_{+\infty} + q_{+\infty} + 2(1-\sigma) + |p_{+\infty} - q_{+\infty}|} < \frac{q_{+\infty}}{p_{+\infty}},$$

получаем, что $|\nu_{+\infty}^j| > 1$. Доказательство выполнения условий (13б) проводится аналогично. Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что задачи (7), (8) имеют единственные решения.

3. Переход к схеме с конечным числом узлов

Используя выделенные многообразия, определим U_0. Подставим в уравнение (1) соотношения (6а) и (6б) при $i = 1$ и $i = -1$ соответственно:

$$(G_0 - C_0 A_{-1}^- - D_0 A_1^+) U_0 = C_0 B_{-1}^- + D_0 B_1^+ - F_0. \tag{17}$$

Так как $\|A_{\pm 1}^{\pm}\| < 1$, матрица $G_0 - C_0 A_{-1}^- - D_0 A_1^+$ является строго диагонально преобладающей, поэтому уравнение (17) имеет единственное решение.

Используя (17), а также соотношения (6), определим задачу

$$\begin{gathered} U_i = A_i^+ U_{i-1} + B_i^+, \quad i \ge 1, \\ U_0 = (G_0 - C_0 A_{-1}^- - D_0 A_1^+)^{-1} (C_0 B_{-1}^- + D_0 B_1^+ - F_0), \\ U_i = A_i^- U_{i+1} + B_i^-, \quad i \le -1. \end{gathered} \tag{18}$$

Так как коэффициенты $A_i^{\pm}$, $B_i^{\pm}$ из задач (7), (8) определяются однозначно, решение задачи (18) существует и единственно.

Покажем, что решения задач (1), (2) и (18) совпадают. В силу единственности решения этих задач достаточно показать, что решение задачи (18) удовлетворяет задаче (1), (2). Учитывая соотношения (7), (8), можно показать, что решение задачи (18) удовлетворяет уравнениям (1) при $i \ne 0$. Уравнение (1) при $i = 0$ выполнится на решении задачи (18) в силу уравнения (17) и соотношений (7), (8). Наконец, предельные условия на бесконечности (2) выполнятся в соответствии с леммой 5. Таким образом, решение задачи (1), (2) существует и единственно.

Принимая во внимание соотношения (6), для некоторых $M < 0$, $K > 0$ перейдем от (1), (2) к задаче с конечным числом узлов:

$$\begin{gathered} L_i U = C_i U_{i-1} - G_i U_i + D_i U_{i+1} = F_i, \quad M < i < K, \\ U_M = A_M^- U_{M+1} + B_M^-, \qquad U_K = A_K^+ U_{K-1} + B_K^+. \end{gathered} \tag{19}$$

Данная задача, в отличие от (1), (2), имеет конечное число узлов, ее решение может быть найдено методом матричной прогонки или другим методом. В силу условий (4) задача (19) имеет единственное решение [7, с. 106]. Как было сказано выше, соотношения (6) справедливы для решения задачи (1), (2), поэтому ее решение удовлетворяет задаче (19), с учетом единственности решения этих задач совпадают при всех $M \le i \le K$. Таким образом, посредством (19) задача (1), (2) точным образом редуцирована к схеме с конечным числом узлов.

4. Устойчивость к возмущениям коэффициентов

Коэффициенты A_M^-, B_M^-, A_K^+, B_K^+ из задач (7), (8) могут быть вычислены приближенно. Оценим влияние погрешности при их вычислении на решение задачи (19). Перейдем от (19) к разностной схеме с возмущенными A_M^-, B_M^-, A_K^+, B_K^+:

$$L_i\tilde{U} = C_i\tilde{U}_{i-1} - G_i\tilde{U}_i + D_i\tilde{U}_{i+1} = F_i, \quad M < i < K,$$

$$\tilde{U}_M = \tilde{A}_M^-\tilde{U}_{M+1} + \tilde{B}_M^-, \qquad \tilde{U}_K = \tilde{A}_K^+\tilde{U}_{K-1} + \tilde{B}_K^+. \tag{20}$$

Теорема 1. *Пусть $\tilde{U}$ — решение задачи (20). Пусть*

$$\|\tilde{A}_M^- - A_M^-\| \le \Delta_1,\ \|\tilde{A}_K^+ - A_K^+\| \le \Delta_1,\ \|\tilde{A}_M^-\| < 1,\ \|\tilde{A}_K^+\| < 1,$$
$$\|\tilde{B}_M^- - B_M^-\| \le \Delta_2,\ \|\tilde{B}_K^+ - B_K^+\| \le \Delta_2.$$

Тогда

$$\max_i \|\tilde{U}_i - U_i\| \le \frac{1}{1 - \max\left(\|\tilde{A}_M^-\|, \|\tilde{A}_K^+\|\right)}\{\Delta_1(\|U_{M+1}\| + \|U_{K-1}\|) + \Delta_2\}.$$

Доказательство. Пусть $Z_i = U_i - \tilde{U}_i$. Тогда Z является решением задачи:

$$L_iZ = C_iZ_{i-1} - G_iZ_i + D_iZ_{i+1} = 0, \quad M < i < K,$$
$$Z_M = \tilde{A}_M^-Z_{M+1} + (A_M^- - \tilde{A}_M^-)U_{M+1} + B_M^- - \tilde{B}_M^-,$$
$$Z_K = \tilde{A}_K^+Z_{K-1} + (A_K^+ - \tilde{A}_K^+)U_{K-1} + B_K^+ - \tilde{B}_K^+.$$

Для оператора L, как и в случае бесконечного числа узлов, справедлив принцип максимума. Определим сеточную вектор-функцию Ψ:

$$\Psi_i^j = \Delta_1(\|U_{M+1}\| + \|U_{K-1}\|) + \Delta_2 + \max\left(\|\tilde{A}_M^-\|, \|\tilde{A}_K^+\|\right) \cdot \max_i \|Z_i\| \pm Z_i^j,$$

тогда

$$\Psi_M \ge 0, \quad \Psi_K \ge 0, \quad L_i\Psi \le 0,\ M \le i \le K.$$

В силу принципа максимума $\Psi_i \ge 0$ для всех $M \le i \le K$, что доказывает теорему.

Итак, решение задачи (19) устойчиво к возмущению коэффициентов в краевых условиях.

Для получения оценок устойчивости задач (7), (8) к возмущениям коэффициентов исходной схемы (1) нам понадобятся неравенства

$$G_i^{jj} - \sum_{k\neq j} |G_i^{jk}| - D_i^{jj} - D_i^{jj}\|A_{i+1}^+\| \ge \Delta,\ i \ge K > 0, \tag{21а}$$

$$G_i^{jj} - \sum_{k\neq j} |G_i^{jk}| - C_i^{jj} - C_i^{jj}\|A_{i-1}^-\| \ge \Delta,\ i \le M < 0. \tag{21б}$$

Две следующие леммы дают возможные условия выполнения неравенств (21).

Лемма 8. *Пусть при всех $i \geq K$*

$$C_i^{jj} \geq D_i^{jj}, \ 1 \leq j \leq N.$$

Тогда при $i \geq K$ выполнено неравенство (21а).

Пусть при всех $i \leq M$

$$D_i^{jj} \geq C_i^{jj}, \ 1 \leq j \leq N.$$

Тогда при $i \leq M$ выполнено неравенство (21б).

Доказательство. Так как при всех l $\|A_l^{\pm}\| < 1$, с учетом (4) получаем требуемые неравенства. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть при всех $i \geq K$ матрицы C_i, D_i скалярны и*

$$\sigma \frac{\|D_i\|}{\|D_{i+1}\|} - \frac{\|C_i\|}{\|C_{i+1}\|} \leq (1-\sigma)\frac{\|C_i\|}{\|D_{i+1}\|}. \tag{22а}$$

Тогда при всех $i \geq K$ выполнено неравенство (21а).

Пусть при всех $i \leq M$ матрицы C_i, D_i скалярны и

$$\sigma \frac{\|C_i\|}{\|C_{i-1}\|} - \frac{\|D_i\|}{\|D_{i-1}\|} \leq (1-\sigma)\frac{\|D_i\|}{\|C_{i-1}\|}. \tag{22б}$$

Тогда при всех $i \leq M$ выполнено неравенство (21б).

Доказательство. Докажем неравенство (21а). Покажем, что в случае скалярных матриц C_i, D_i имеет место оценка

$$\|A_{i+1}^+\| \leq \frac{\|C_i\|}{\|D_i\|}. \tag{23}$$

Тогда требуемое неравенство будет вытекать из (4). Докажем (23). При доказательстве леммы 7 установлено, что

$$\|A_{+\infty}\| < \frac{\|C_{+\infty}\|}{\|D_{+\infty}\|},$$

откуда следует, что неравенство (23) выполнено при всех достаточно больших i $(i \geq \tilde{K})$. Покажем теперь, что оно выполнено и при $K \leq i < \tilde{K}$. Пусть

$$\|A_{i+2}^+\| \leq \frac{\|C_{i+1}\|}{\|D_{i+1}\|}.$$

Тогда

$$\|A_{i+1}^+\| = \|(I - G_{i+1}^{-1}D_{i+1}A_{i+2}^+)^{-1}(G_{i+1}^{-1}C_{i+1})\| \leq \|(I - G_{i+1}^{-1}D_{i+1}A_{i+2}^+)^{-1}\| \cdot \|G_{i+1}^{-1}C_{i+1}\|.$$

Используя неравенство [5, с. 110]

$$\|(I-Z)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|Z\|} \text{ при } \|Z\| < 1,$$

получаем

$$\|A_{i+1}^+\| \leq \frac{\|G_{i+1}^{-1}C_{i+1}\|}{1 - \|G_{i+1}^{-1}D_{i+1}\| \cdot \|A_{i+2}^+\|}.$$

Из (4) с учетом скалярности матриц C_{i+1}, D_{i+1} имеем

$$\|G_{i+1}^{-1}C_{i+1}\| \le \frac{\sigma\|C_{i+1}\|}{\|C_{i+1}\|+\|D_{i+1}\|}, \quad \|G_{i+1}^{-1}D_{i+1}\| \le \frac{\sigma\|D_{i+1}\|}{\|C_{i+1}\|+\|D_{i+1}\|}.$$

Тогда

$$\|A_{i+1}^{+}\| \le \frac{\sigma\|C_{i+1}\|}{\|C_{i+1}\|+\|D_{i+1}\|-\sigma\|C_{i+1}\|}.$$

В свою очередь, условие (22а) можно записать в виде

$$\frac{\sigma\|C_{i+1}\|}{\|C_{i+1}\|+\|D_{i+1}\|-\sigma\|C_{i+1}\|} \le \frac{\|C_i\|}{\|D_i\|},$$

что завершает доказательство. Рассуждения в случае $i \le M$ проводятся аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим следующие линейные операторы:

$$S_i^{+} = D_i(Z_{i+1}-Z_i) - M_iZ_i, \quad S_i^{-} = C_i(Z_{i-1}-Z_i) - M_iZ_i,$$

где матрицы M_i имеют строгое диагональное преобладание:

$$M_i^{jj}(1-\eta) \ge \sum_{k\ne j}|M_i^{jk}|, 0<\eta<1, \; M_i^{jj} \ge \theta > 0, 1 \le j \le N. \tag{24}$$

Лемма 10. *Пусть выполнены условия (24). Пусть Z — произвольная сеточная функция. Если существует предел Z на плюс бесконечности, то при $i \ge K$ справедлива оценка*

$$\max_{i\ge K}\|Z_i\| \le \eta^{-1}\{\theta^{-1}\max_{i\ge K}\|S_i^{+}Z\| + \|\lim_{i\to\infty}Z_i\|\}, K>0. \tag{25а}$$

Если существует предел Z на минус бесконечности, то при $i \le M$ справедлива оценка

$$\max_{i\le M}\|Z_i\| \le \eta^{-1}\{\theta^{-1}\max_{i\le M}\|S_i^{-}Z\| + \|\lim_{i\to-\infty}Z_i\|\}, M<0. \tag{25б}$$

Доказательство. Оценка (25а) получена в [3]. Доказательство оценки (25б) проводится аналогичным образом.

Лемма 11. *Для решений задач (8) справедливы оценки*

$$\max_{i\le M}\|B_i^{-}\| \le \frac{C_0}{\Delta}\max_{i\le M}\|F_i\|, \; M<0; \quad \max_{i\ge K}\|B_i^{+}\| \le \frac{C_0}{\Delta}\max_{i\ge K}\|F_i\|, \; K>0.$$

Доказательство. Пусть $i \ge K$. Введем матрицы $P_i = G_i - D_i - D_iA_{i+1}^{+}$. Докажем, что для матриц P_i выполнены условия (24) при

$$\theta = \min P_i^{jj}, \quad \eta = \frac{\Delta}{\max P_i^{jj}}.$$

С учетом (21а) можно показать, что

$$P_i^{jj} = G_i^{jj} - D_i^{jj} - D_i^{jj}(A_{i+1}^{+})^{jj} \ge \Delta.$$

Кроме того, из (21а) следует, что матрицы P_i имеют строгое диагональное преобладание:

$$P_i^{jj}(1-\eta) - \sum_{k\neq j} |P_i^{jk}| \geq$$
$$\geq G_i^{jj} - D_i^{jj} - D_i^{jj}(A_{i+1}^{+})^{jj} - \sum_{k\neq j} |G_i^{jk} - D_i^{jj}(A_{i+1}^{+})^{jk}| - \Delta \geq$$
$$\geq G_i^{jj} - \sum_{k\neq j} |G_i^{jk}| - D_i^{jj} - D_i^{jj}\|A_{i+1}^{+}\| - \Delta \geq 0.$$

Теперь оценка

$$\max_{i\geq K} \|B_i^{+}\| \leq \frac{C_1}{\Delta} \max_{i\geq K} \|F_i\|$$

следует из леммы 10. Аналогичным образом получается оценка

$$\max_{i\leq M} \|B_i^{-}\| \leq \frac{C_2}{\Delta} \max_{i\leq M} \|F_i\|.$$

Лемма доказана.

Докажем, что решения задач (7), (8) устойчивы к возмущению коэффициентов исходной схемы (1).

Теорема 2. *Пусть коэффициенты задачи (1), (2) возмущены, при всех $i \leq M$, $i \geq K$*

$$\|C_i - \tilde{C}_i\| \leq \delta,\ \|G_i - \tilde{G}_i\| \leq \delta,\ \|D_i - \tilde{D}_i\| \leq \delta,\ \|F_i - \tilde{F}_i\| \leq \delta,$$

коэффициенты $\tilde{C}_i$, $\tilde{G}_i$, $\tilde{D}_i$, $\tilde{F}_i$ удовлетворяют условиям, аналогичным (3), (4). Пусть $\tilde{A}_i^{\pm}$, $\tilde{B}_i^{\pm}$ являются решениями задач (7), (8) в случае возмущенных коэффициентов $\tilde{C}_i$, $\tilde{G}_i$, $\tilde{D}_i$, $\tilde{F}_i$. Пусть, кроме того, выполнены условия леммы 8 или леммы 9 как для коэффициентов исходной, так и для коэффициентов возмущенной задач. Тогда для некоторой постоянной C, не зависящей от δ, при всех $i \leq M$, $i \geq K$

$$\|A_i^{\pm} - \tilde{A}_i^{\pm}\| \leq C\delta, \quad \|B_i^{\pm} - \tilde{B}_i^{\pm}\| \leq C\delta. \tag{26}$$

Доказательство. Начнем с первой оценки в (26). Пусть $i \geq K$. Пусть также $Z_i = A_i^{+} - \tilde{A}_i^{+}$. Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$Z_i = G_i^{-1}D_iA_{i+1}^{+}Z_i + G_i^{-1}D_iZ_{i+1}\tilde{A}_i^{+} + P_i, \tag{27}$$

где

$$P_i = G_i^{-1}(C_i - \tilde{C}_i) + G_i^{-1}(D_i - \tilde{D}_i)\tilde{A}_{i+1}^{+}\tilde{A}_i^{+} + G_i^{-1}(\tilde{G}_i - G_i)\tilde{A}_i^{+}.$$

Оценим $Z_{+\infty}$. Для $Z_{+\infty}$ выполняется соотношение

$$Z_{+\infty} - G_{+\infty}^{-1}D_{+\infty}A_{+\infty}Z_{+\infty} = (I - G_{+\infty}^{-1}D_{+\infty}A_{+\infty})Z_{+\infty} =$$
$$= G_{+\infty}^{-1}C_{+\infty}A_{+\infty}^{-1}Z_{+\infty} = G_{+\infty}^{-1}D_{+\infty}Z_{+\infty}\tilde{A}_{+\infty} + P_{+\infty},$$

где

$$P_{+\infty} = G_{+\infty}^{-1}(C_{+\infty} - \tilde{C}_{+\infty}) + G_{+\infty}^{-1}(D_{+\infty} - \tilde{D}_{+\infty})\tilde{A}_{+\infty}^{2} + G_{+\infty}^{-1}(\tilde{G}_{+\infty} - G_{+\infty})\tilde{A}_{+\infty},$$

причем $\|P_{+\infty}\| \le C_0\delta$. Тогда

$$Z_{+\infty} = A_{+\infty}C_{+\infty}^{-1}D_{+\infty}Z_{+\infty}\tilde{A}_{+\infty} + A_{+\infty}C_{+\infty}^{-1}G_{+\infty}P_{+\infty}.$$

В силу рассуждений, приведенных в леммах 8, 9, имеет место оценка

$$\|A_{+\infty}C_{+\infty}^{-1}D_{+\infty}\| \le \|A_{+\infty}\| \cdot \|C_{+\infty}^{-1}D_{+\infty}\| \le 1,$$

откуда получаем

$$\|Z_{+\infty}\| \le (1-\tilde{\sigma})^{-1}\|P_{+\infty}\| \le C\delta.$$

Отсюда следует, что требуемая оценка на Z_i выполняется также при всех достаточно больших i $(i \ge \tilde{K})$. При $i < \tilde{K}$ в силу соотношений (27) и (4) получаем

$$\|Z_i\| \le \sigma\|Z_i\| + \|Z_{i+1}\| + \|P_i\| \le \sigma\|Z_i\| + C_2\delta,$$

откуда $\|Z_i\| \le C\delta$. Рассуждения в случае $i \le M$ проводятся аналогичным образом.

Теперь докажем вторую оценку в (26). Пусть $i \ge K$ и $Z_i = B_i^+ - \tilde{B}_i^+$. Тогда для Z_i справедливы соотношения

$$\tilde{S}_i^+ Z = \tilde{D}_i(Z_{i+1} - Z_i) - \tilde{P}_i Z_i = \tilde{R}_i,$$

где

$$\tilde{P}_i = \tilde{G}_i - \tilde{D}_i - \tilde{D}_i\tilde{A}_{i+1}^+,$$

$$\tilde{R}_i = (\tilde{D}_i - D_i)B_{i+1}^+ + (F_i - \tilde{F}_i) + (G_i - \tilde{G}_i)B_i^+ + (\tilde{D}_i - D_i)A_{i+1}^+B_i^+ + \tilde{D}_i(\tilde{A}_{i+1}^+ - A_{i+1}^+)B_i^+.$$

Для матриц $\tilde{P}_i$ выполнены условия (24), кроме того, $\lim\limits_{i\to+\infty} Z_i = 0$. Таким образом, нужная оценка следует из леммы 10. Рассуждения в случае $i \le M$ проводятся аналогично. Теорема доказана.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 12. *Пусть Z — решение задачи:*

$$L_iZ = C_iZ_{i-1} - G_iZ_i + D_iZ_{i+1} = 0,\ Z_{-T} = V_{-T},\ Z_T = V_T,\ T > 0.$$

Пусть

$$\|V_{-T}\| \le \varepsilon,\ \|V_T\| \le \varepsilon, \quad q = \max_i \left\{ \frac{\|C_i\| + \|D_i\|}{\|C_i\| + \|D_i\| + \Delta} \right\},\ q < 1.$$

Тогда при всех $-T \le i \le T$ верно $\|Z_i\| \le \varepsilon q^{T-|i|}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую сеточную вектор-функцию:

$$\Psi_i^j = \varepsilon q^{T-|i|} \pm Z_i^j.$$

Тогда $\Psi_{\pm T} \ge 0$. Покажем, что при всех i $L_i\Psi \le 0$. При $i = 0$ имеем

$$(L_0\Psi)^j = \varepsilon q^T[(C_0^{jj} + D_0^{jj})q^{-1} - \sum_{k=1}^N G_0^{jk}] \le \varepsilon q^T[(C_0^{jj} + D_0^{jj})q^{-1} - C_0^{jj} - D_0^{jj} - \Delta].$$

По условию
$$q \geq \frac{\|C_0\| + \|D_0\|}{\|C_0\| + \|D_0\| + \Delta}.$$
В силу того что матрицы C_0, D_0 диагональны и положительны, при всех j
$$q \geq \frac{C_0^{jj} + D_0^{jj}}{C_0^{jj} + D_0^{jj} + \Delta}.$$
Следовательно, $L_0\Psi \leq 0$. При $i < 0$ имеем
$$(L_i\Psi)^j = \varepsilon q^{T+i}[C_i^{jj} q^{-1} + D_i^{jj} q - \sum_{k=1}^{N} G_i^{jk}] \leq \varepsilon q^{T+i}[C_i^{jj} q^{-1} + D_i^{jj} q - C_i^{jj} - D_i^{jj} - \Delta].$$
Так как
$$q \geq \frac{\|C_i\| + \|D_i\|}{\|C_i\| + \|D_i\| + \Delta} \geq \frac{\|C_i\|}{\|C_i\| + \Delta} \geq \frac{C_i^{jj}}{C_i^{jj} + \Delta},$$
$L_i\Psi \leq 0$ при $i < 0$. Аналогичным образом можно показать, что $L_i\Psi \leq 0$ и при $i > 0$. Применяя принцип максимума, получаем, что при всех i $\Psi_i \geq 0$. Лемма доказана.

5. Нахождение коэффициентов в краевых условиях

Предположим, что коэффициенты схемы (1) разложимы в ряд по степеням i^{-k}, при достаточно больших i ($i \geq K$) до некоторого $r > 0$ справедливы разложения
$$C_i = \sum_{k=0}^{r} \frac{C_+^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1}, \quad G_i = \sum_{k=0}^{r} \frac{G_+^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1},$$
$$D_i = \sum_{k=0}^{r} \frac{D_+^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1}, \quad F_i = \sum_{k=0}^{r} \frac{F_+^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1}.$$
Здесь под $O(i^{-k})$ понимается матрица или вектор с нормой порядка $O(i^{-k})$.

Коэффициенты A_i^+ и B_i^+ из (7a), (8a) при $i \geq K$ будем искать в виде
$$\tilde{A}_i^+(p) = \sum_{k=0}^{p} \frac{A_+^{(k)}}{i^k}, \quad \tilde{B}_i^+(p) = \sum_{k=0}^{p} \frac{B_+^{(k)}}{i^k}, \quad p \leq r. \tag{28}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (7a), (8a), получим рекуррентные формулы относительно коэффициентов $A_+^{(k)}$, $B_+^{(k)}$:
$$(G_{+\infty} - D_{+\infty}A_{+\infty})A_+^{(k)} - D_{+\infty}A_+^{(k)}A_{+\infty} = C_+^{(k)} -$$
$$- \sum_{j=1}^{k} G_+^{(j)} A_+^{(k-j)} + (D_{+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_k^j A_+^{(j)} + \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-l} \gamma_{k-l}^j D_+^{(l)} A_+^{(j)}) A_{+\infty} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-m} \sum_{j=0}^{k-m-l} \gamma_{k-m-l}^j D_+^{(l)} A_+^{(j)} A_+^{(m)}, \quad k \geq 1, \quad A_+^{(0)} = A_{+\infty}, \tag{29}$$

$$
\begin{gathered}
(D_{+\infty} + D_{+\infty}A_{+\infty} - G_{+\infty})B_+^{(k)} = F_+^{(k)} - \\
- D_{+\infty}\sum_{m=1}^{k-1}\gamma_k^m B_+^{(m)} - \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=1}^{k-l}\gamma_{k-l}^m D_+^{(l)} B_+^{(m)} + \sum_{l=1}^{k-1} G_+^{(k-l)} B_+^{(l)} - \\
- \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=0}^{k-j}\sum_{m=0}^{k-j-l}\gamma_{k-j-l}^m D_+^{(l)} A_+^{(m)} B_+^{(j)}, \quad k \geq 1, \quad B_+^{(0)} = 0,
\end{gathered} \tag{30}
$$

где коэффициенты γ_l^m определяются по формулам

$$
\gamma_0^0 = 1,\ \gamma_l^0 = 0, \quad \gamma_0^1 = 0,\ \gamma_l^1 = (-1)^{l-1},\ l > 0,
$$

$$
\gamma_l^{m+1} = 0 \text{ при } l \leq m,\ \gamma_{m+l}^{m+1} = \sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\gamma_{m+l-j}^m \text{ при } l > 0,\ m > 0.
$$

На каждом шаге по k уравнение (29) имеет вид

$$
BX + XA = F. \tag{31}
$$

Это непрерывное уравнение Сильвестра, оно имеет единственное решение [8, с. 92], если спектры матриц A и B разделены. В данном случае в соответствии с (14а) спектры матриц $A_{+\infty}$ и $D_{+\infty}^{-1}(G_{+\infty} - D_{+\infty}A_{+\infty})$ разделены, поэтому на каждой итерации задача (29) однозначно разрешима.

В свою очередь, матрица $G_{+\infty} - D_{+\infty} - D_{+\infty}A_{+\infty}$ является матрицей со строгим диагональным преобладанием (это можно показать аналогично тому, как это выполнено в лемме 11 для матриц P_i), что обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (30).

Аналогично пусть при $i \leq M < 0$ для некоторого r справедливы разложения

$$
C_i = \sum_{k=0}^{r}\frac{C_-^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1}, \quad G_i = \sum_{k=0}^{r}\frac{G_-^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1},
$$

$$
D_i = \sum_{k=0}^{r}\frac{D_-^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1}, \quad F_i = \sum_{k=0}^{r}\frac{F_-^{(k)}}{i^k} + O\left(\frac{1}{i}\right)^{r+1}.
$$

Коэффициенты A_i^- и B_i^- из (7б), (8б) при $i \leq M$ будем искать в виде

$$
\tilde{A}_i^-(p) = \sum_{k=0}^{p}\frac{A_-^{(k)}}{i^k}, \quad \tilde{B}_i^-(p) = \sum_{k=0}^{p}\frac{B_-^{(k)}}{i^k}, \ \ p \leq r. \tag{32}
$$

Тогда получим

$$
\begin{gathered}
(G_{-\infty} - C_{-\infty}A_{-\infty})A_-^{(k)} - C_{-\infty}A_-^{(k)}A_{-\infty} = D_-^{(k)} - \\
- \sum_{j=1}^{k} G_-^{(j)} A_-^{(k-j)} + (C_{-\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\omega_k^j A_-^{(j)} + \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-l}\omega_{k-l}^j C_-^{(l)} A_-^{(j)})A_{-\infty} + \\
+ \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=0}^{k-m}\sum_{j=0}^{k-m-l}\omega_{k-m-l}^j C_-^{(l)} A_-^{(j)} A_-^{(m)}, \quad k \geq 1, \quad A_-^{(0)} = A_{-\infty},
\end{gathered} \tag{33}
$$

$$(C_{-\infty} + C_{-\infty}A_{-\infty} - G_{-\infty})B_-^{(k)} = F_-^{(k)} -$$

$$- C_{-\infty}\sum_{m=1}^{k-1}\omega_k^m B_-^{(m)} - \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=1}^{k-l}\omega_{k-l}^m C_-^{(l)}B_-^{(m)} + \sum_{l=1}^{k-1} G_-^{(k-l)}B_-^{(l)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=0}^{k-j}\sum_{m=0}^{k-j-l}\omega_{k-j-l}^m C_-^{(l)}A_-^{(m)}B_-^{(j)}, \quad k \ge 1, \quad B_-^{(0)} = 0. \tag{34}$$

Здесь коэффициенты ω_l^m определяются следующим образом:

$$\omega_0^0 = 1,\ \omega_l^0 = 0,\ \omega_0^1 = 0,\ \omega_l^1 = 1,\ l > 0,$$

$$\omega_l^{m+1} = 0 \text{ при } l \le m,\ \omega_{m+l}^{m+1} = \sum_{j=1}^{l}\omega_{m+l-j}^m \text{ при } l > 0,\ m > 0.$$

Однозначную разрешимость уравнений (33), (34) относительно $A_-^{(k)}$ и $B_-^{(k)}$ можно обосновать аналогично тому, как это выполнено для уравнений (29), (30).

Таким образом, если в редуцированной к конечному числу узлов схеме (19) коэффициенты A_K^+ и B_K^+ находить по формуле (28), а A_M^- и B_M^- — по формуле (32), то в соответствии с теоремой 2 при $i \le M$, $i \ge K$ для некоторой постоянной C

$$\|A_i^\pm - \tilde{A}_i^\pm\|, \|B_i^\pm - \tilde{B}_i^\pm\| \le \delta,\ \delta = C[|M|^{-(p+1)} + K^{-(p+1)}].$$

В соответствии с теоремой 1 при всех $M \le i \le K$ для некоторой постоянной C_1

$$\|U_i - \tilde{U}_i\| \le C_1[|M|^{-(p+1)} + K^{-(p+1)}]. \tag{35}$$

Таким образом, разностную схему (1), (2), увеличивая число членов разложений (28) и (32), можно редуцировать к схеме (19) с заданным числом узлов с заранее определенной точностью.

6. Численные эксперименты

Остановимся на результатах численных экспериментов. Рассмотрим эллиптическое уравнение в бесконечной полосе вдоль x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - c(x,y)u = f(x,y)$$

с нулевыми граничными условиями вдоль полосы и предельными нулевыми условиями на бесконечности,

$$c(x,y) = y^2 + \frac{1}{1+x^2},\ f(x,y) = \frac{y}{1+|x|},\ y \in [0,10].$$

Применение схемы направленных разностей приводит к задаче вида (1), (2), где C_i, D_i — постоянные диагональные матрицы с числами $1/h^2$ и $1/h^2 + 1/h$ на диагоналях, матрица

G_i имеет вид

$$G_i = \begin{pmatrix} E_{i1} & -B & & & \\ & & & & 0 \\ -A & E_{i2} & -B & & \\ & -A & E_{i3} & & \\ & & \cdots & & \\ & & & & -B \\ 0 & & & & \\ & & & -A & E_{iN} \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{h^2},\ B = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h},\ E_{ij} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h} + c(x_i, y_j),$$

вектор F_i имеет вид $F_i = (f(ih, h), f(ih, 2h), \cdots, f(ih, Nh))$. Условия (3), (4) для данной задачи выполнены, кроме того, при всех i верны условия лемм 7 и 9.

Так как точное решение задачи (1), (2) неизвестно, для достаточно большого T решим вспомогательную задачу

$$C_i\tilde{U}_{i-1} - G_i\tilde{U}_i + D_i\tilde{U}_{i+1} = F_i,\ \tilde{U}_{-T} = \tilde{U}_T = 0. \tag{36}$$

В редуцированной задаче (19) принималось $M = -K$, причем $K \ll T$. В соответствии с леммой 12 при $-K \le i \le K$

$$\|U_i - \tilde{U}_i\| \le \max\{\|U_{-T}\|, \|U_T\|\} q^{T-|i|},\ q < 1.$$

Таким образом, при $K \ll T$ на конечной сетке при $-K \le i \le K$ решения задач (1), (2) и (36) достаточно близки, т.е. в численных экспериментах решение задачи (36) можно принять в качестве решения задачи (1), (2).

В численных экспериментах предполагалось, что $N = 9$, $h = 1$, $T = 10\,000$ и $K \le 1000$. Предлагаемый способ переноса краевых условий с различным числом членов рядов (28) и (32) сравнивался с классическим способом переноса на основе условий Дирихле и Неймана при переходе к схеме с конечным числом узлов:

I. $U_{\pm K} = 0$.

II. $U_K = U_{K-1}$, $U_{-K} = U_{-K+1}$.

III. В (19) $\tilde{A}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{A}^{\pm}_{\pm K}(0)$, $\tilde{B}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{B}^{\pm}_{\pm K}(0)$.

IV. В (19) $\tilde{A}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{A}^{\pm}_{\pm K}(1)$, $\tilde{B}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{B}^{\pm}_{\pm K}(1)$.

V. В (19) $\tilde{A}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{A}^{\pm}_{\pm K}(2)$, $\tilde{B}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{B}^{\pm}_{\pm K}(2)$.

VI. В (19) $\tilde{A}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{A}^{\pm}_{\pm K}(3)$, $\tilde{B}^{\pm}_{\pm K} = \tilde{B}^{\pm}_{\pm K}(3)$.

Здесь коэффициенты $\tilde{A}^{\pm}_{\pm K}(p)$, $\tilde{B}^{\pm}_{\pm K}(p)$ рассчитывались по формулам (28), (32). Для вычисления $A^{(0)}_{\pm} = A_{\pm\infty}$ применялся итерационный процесс, предложенный в лемме 2. Для решения непрерывного уравнения Сильвестра (31) использован алгоритм Бартелса — Стьюарта [8, с. 109]. Редуцированные к конечному интервалу задачи решались методом матричной прогонки [7, с. 103].

Способ переноса условия	$N = 10$	$N = 100$	$N = 1000$
I	$0.557E-1$	$0.577E-2$	$0.577E-3$
II	$0.864E-2$	$0.100E-3$	$0.102E-5$
III	$0.425E-1$	$0.490E-2$	$0.498E-3$
IV	$0.732E-2$	$0.862E-4$	$0.880E-6$
V	$0.152E-2$	$0.213E-5$	$0.221E-8$
VI	$0.591E-3$	$0.103E-6$	$0.582E-10$

Вычислялась норма погрешности $s = \max_i \|\tilde{U}_i - U_i\|$, где U_i — решение задачи (1), (2), $\tilde{U}_i$ — решение испытываемой схемы.

В таблице приведена норма погрешности s в зависимости от способа переноса краевых условий. Результаты вычислений подтверждают оценку точности (35), имеющую место при предлагаемом способе перехода к схеме с конечным числом узлов.

Список литературы

[1] Абрамов А. А. О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 4. С. 733–737.

[2] Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. математике. М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[3] Задорин А. И. Редукция краевой задачи для линейного векторного разностного уравнения второго порядка к конечному числу узлов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 4. С. 546–556.

[4] Задорин А. И., Чеканов А. В. Редукция трехточечной разностной схемы на бесконечном интервале к схеме с конечным числом узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 2. С. 149–161.

[5] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

[6] Balla K. Asymptotic behavior of certain Riccati difference equations // Comp. Math. Appl. 1998. Vol. 36, No 10–12, P. 243–250.

[7] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

[8] Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 29 ноября 2002 г.