Вычислительные технологии **Том 8, № 3, 2003**

К ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. А. Светашков
Томский политехнический университет, Россия.
e-mail: astrodep@niipmm.tsu.ru

The variational approach to a solution of boundary value problems of the linear and nonlinear viscoelasticity theory (on the example of the main quasilinear theory) is considered.

Введение

Как известно [1, 2], вариационная формулировка задачи теории упругости опирается на доказательство положительной определенности оператора краевой задачи. Для вязкоупругих тел доказательство положительной определенности оператора, по-видимому, отсутствует, несмотря на значительное количество публикаций, посвященных вариационной формулировке [3 – 5].

В настоящей работе приведены преобразования произведения тензора напряжения и тензора деформации к положительно определенному виду, из которого следуют условие эллиптичности квадратичной формы, выполнение неравенства Корна и, как следствие, положительная определенность оператора краевой задачи теории вязкоупругости.

Рассмотрены два варианта формулировки линейной задачи: по деформациям (перемещениям) и по скоростям деформаций. Приведены оценки погрешностей приближенных решений линейных задач с эффективными по времени модулями, которые могут быть получены как первое приближение некоторого итерационного процесса. Дано доказательство положительной определенности оператора краевой задачи главной квазилинейной теории. Приведен численный пример.

1. Вывод условия эллиптичности

Для задач теории упругости условие эллиптичности имеет вид [1, 2]

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad i,j = 1,2,3, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

где σ_{ij}, ε_{ij} — тензоры напряжений и деформаций. В [2] показано, что (1) имеет место для вязкоупругих материалов “твердого типа"для моментов времени $t = 0$, $t = \infty$. Покажем, что (1) справедливо для всех $t \in [0, \infty]$. Предварительно рассмотрим преобразование свертки $\tilde{W} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ вязкоупругих напряжений и деформаций, задав физический закон для анизотропного тела в виде

$$\sigma_{ij}(t) = C^*_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij}(t) = S^*_{ijkl}\sigma_{kl}, \tag{2}$$

$$C^*_{ijkl}\varepsilon_{kl} \equiv \int\limits_0^t R_{ijkl}(t-\tau)d\varepsilon_{kl}(\tau), \quad S^*_{ijkl}\sigma_{kl} \equiv \int\limits_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau)d\sigma_{kl}(\tau), \quad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{3}$$

$$R_{ijkl}(t) = R_{jikl}(t) = R_{klij}(t), \quad \Pi_{ijkl}(t) = \Pi_{jikl}(t) = \Pi_{klij}(t).$$

Здесь $R_{ijkl}(t)$, $\Pi_{ijkl}(t)$ — тензоры функций релаксации и ползучести.

Преобразуем левую часть (1), используя известное тождество

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \int\limits_0^t \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + \int\limits_0^t \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} = W + \Psi, \quad i,j = 1,2,3. \tag{4}$$

Первый интеграл представляет потенциальную энергию деформаций, второй — потенциальную энергию напряжений. Последние приводятся к положительно определенному виду с помощью преобразований [3]

$$\begin{aligned} W &= \int\limits_0^t \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_0^t R_{ijkl}(s-\tau)d\varepsilon_{ij}(\tau)d\varepsilon_{kl}(s), \\ \Psi &= \int\limits_0^t \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_0^t \Pi_{ijkl}(s-\tau)d\sigma_{ij}(\tau)d\sigma_{kl}(s), \quad i,j,k,l = 1,2,3, \end{aligned}$$

где функции памяти симметрично продолжены в область $t < 0$: $\Pi_{ijkl}(t) = \Pi_{ijkl}(-t)$, $R_{ijkl}(t) = R_{ijkl}(-t)$. Отсюда, в частности, следует положительная определенность заданной таким способом свертки $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$. Однако для формулировки вариационной задачи необходимо явное представление свертки $\tilde{W} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ в положительно определенном виде через напряжения или деформации.

Запишем тождественное преобразование для $\tilde{W}$, отбросив для краткости индексы:

$$\tilde{W} = \int\limits_0^t R(t-\tau)d\varepsilon(\tau)\left[\int\limits_0^\tau d\varepsilon(s) + \int\limits_\tau^t d\varepsilon(s)\right] = I_1 + I_2.$$

Преобразуем I_1, используя формулу Дирихле:

$$I_1 = \int\limits_0^t d\varepsilon(\tau)\int\limits_\tau^t R(t-s)d\varepsilon(s), \quad I = I_1 + I_2 = \int\limits_0^t d\varepsilon(\tau)\int\limits_\tau^t [R(t-\tau) + R(t-s)]d\varepsilon(s).$$

Рассмотрим интеграл

$$I' = \int\limits_0^t d\varepsilon(\tau)\int\limits_0^\tau [R(t-\tau) + R(t-s)]d\varepsilon(s),$$

$$I + I' = \int\limits_0^t \int\limits_0^t [R(t-\tau) + R(t-s)] d\varepsilon(\tau) d\varepsilon(s). \tag{5}$$

Преобразуем I', применяя формулу Дирихле для второго слагаемого:

$$I' = \int\limits_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \int\limits_0^\tau d\varepsilon(s) + \int\limits_0^t d\varepsilon(\tau) \int\limits_\tau^t R(t-\tau) d\varepsilon(s).$$

В итоге получаем $I = I'$, тогда, учитывая (5) и возвращаясь к индексным обозначениям, запишем окончательное выражение

$$\sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_0^t [R_{ijkl}(t-\tau) + R_{ijkl}(t-s)] d\varepsilon_{ij}(\tau) d\varepsilon_{kl}(s), \quad i,j,k,l = 1,2,3. \tag{6}$$

Очевидно эквивалентное представление через напряжения и функции ползучести

$$\sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_0^t [\Pi_{ijkl}(t-\tau) + \Pi_{ijkl}(t-s)] d\sigma_{ij}(\tau) d\sigma_{kl}(s), \quad i,j,k,l = 1,2,3. \tag{7}$$

Отсюда вследствие симметрии по τ, s ядер в подынтегральных выражениях (6) и (7) следует, что $\tilde{W}$ является положительно определенной.

Воспользуемся свойством функций релаксации

$$R_{ijkl}(t) \geq R_{ijkl}(\infty) > 0 \quad < i,j,k,l = 1,2,3 > .$$

Подставляя последнее в (6), получаем

$$\sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t) \geq R_{ijkl}(\infty)\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{kl}(t) \geq C\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t), \quad C > 0, \quad i,j,k,l = 1,2,3.$$

Таким образом, справедливость (1) доказана.

2. Условие положительной определенности оператора линейной вязкоупругости

Рассмотрим симметричную квадратичную форму, составленную на основе $\tilde{W}$:

$$\tilde{W}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}[\sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \sigma_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})], \quad i,j = 1,2,3. \tag{8}$$

Введем $L_2(V)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{L_2(V)} = \int\limits_V \mathbf{u}\mathbf{v} dV, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(V)} = (\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(V)}. \tag{9}$$

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$(C^*_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + \rho F_i = 0, \quad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{10}$$

где F_i — компоненты вектора объемных сил, ρ — плотность. Граничные условия

$$u_i|_{\Gamma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j|_{\Gamma_2} = S_i^0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{11}$$

Здесь u_i^0, S_i^0 — заданные на Γ_1, Γ_2 перемещения и усилия, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, где Γ — граничная поверхность тела с объемом V; n_i — направляющие косинусы нормали к Γ_2. Определим оператор линейной вязкоупругости

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(V)} = \int\limits_V \tilde{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v})dV. \tag{12}$$

Симметрия A следует из (8). Для доказательства положительной определенности оператора A используем неравенство Корна [1]

$$\int\limits_V \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}dV \geq K \int\limits_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV, \quad K = \text{const} > 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{13}$$

Учтем доказанное условие эллиптичности (1), тогда получим

$$\begin{aligned}(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(V)} &= \int\limits_V \tilde{W}(\mathbf{u}, \mathbf{u})dV = \int\limits_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dV \geq \\ &\geq C\int\limits_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dV \geq CK\int\limits_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV, \quad i,j = 1,2,3.\end{aligned}$$

С учетом неравенства Фридрихса [1], согласно которому

$$C_1 \int\limits_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV \geq \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(V)}, \quad i,j = 1,2,3,$$

получаем окончательно

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(V)} \geq C_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(V)}, \quad C_2 = \frac{CK}{C_1}.$$

В силу симметрии и положительной определенности оператора A справедлива теорема о минимуме функционала

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int\limits_V \tilde{W}(\mathbf{u}, \mathbf{u})dV - L(\mathbf{u}), \tag{14}$$

$$L(\mathbf{u}) \equiv \int\limits_{\Gamma_2} S_i^0 u_i d\gamma + \int\limits_V \rho F_i u_i dV, \quad i = 1,2,3.$$

Покажем, что условие равенства нулю вариации функционала (14) дает уравнение равновесия (10) и граничные условия в напряжениях (11). Производя варьирование, запишем

$$\delta\Phi = \int\limits_V (\sigma_{ij}(\mathbf{u})\delta\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\delta\sigma_{ij})V - \int\limits_{\Gamma_2} S_i^0 \delta u_i \gamma - \int\limits_V \rho F_i \delta u_i V = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{15}$$

В вариационном уравнении (15) можно объединить коэффициенты при двух независимых вариациях: $\delta\varepsilon_{ij}$ (или δu_i) и $\delta\sigma_{ij}$, тогда в силу произвола последних будет справедливо

$$\int\limits_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})\delta\varepsilon_{ij}V - \int\limits_V \rho F_i \delta u_i V - \int\limits_{\Gamma_2} S_i^0 \delta u_i \gamma = 0. \quad (16)$$

Равенство нулю коэффициентов при вариациях $\delta\sigma_{ij}$ дает тривиальное решение $\varepsilon_{ij} = 0$. Применяя к вариационному уравнению (16) теорему Остроградского — Гаусса, получим требуемый результат.

Доказательство положительной определенности оператора A для различных типов граничных условий может быть рассмотрено по аналогии с [1].

3. Эффективные по времени модули

В силу доказанной положительной определенности свертки напряжений и деформаций можно рассмотреть задачу об определении условий энергетической близости функционалов $\tilde{W}$, $\tilde{W}_0$:

$$\tilde{W} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \tilde{W}_0 = \sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}, \quad i,j = 1,2,3. \quad (17)$$

Рассмотрим для простоты случай изотропии, задав определяющие уравнения в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \Lambda^*\theta\delta_{ij} + 2G^*\varepsilon_{ij}, \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}^0(t) = \lambda(t)\theta\delta_{ij} + 2g(t)\varepsilon_{ij}. \quad (19)$$

Здесь Λ^*, G^* — вязкоупругие операторы релаксации, аналогичные по структуре (2) функциям памяти $R_1(t)$, $R_2(t)$; $\lambda(t)$, $g(t)$ — неизвестные функции времени. Заметим, что правые части (18), (19) содержат тождественные значения вязкоупругих деформаций $\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ и ε_{ij}, левые части (18), (19) — различные значения соответствующих откликов $\sigma_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}^0(t)$.

В соответствии с вышесказанным существуют такие константы $M \geq m > 0$, что выполняются неравенства

$$m\tilde{W}_0 \leq \tilde{W} \leq M\tilde{W}_0.$$

Константы можно найти из решения задач

$$m = \min_{\tilde{W}_0(\varepsilon_{ij})=1} \tilde{W}(\varepsilon_{ij}), \quad M = \max_{\tilde{W}_0(\varepsilon_{ij})=1} \tilde{W}(\varepsilon_{ij}). \quad (20)$$

Для определения M, m составим функционал

$$W_1(\varepsilon_{ij}) = \tilde{W}(\varepsilon_{ij}) - \mu\tilde{W}_0(\varepsilon_{ij})$$

и потребуем $\delta W_1 = 0$:

$$\delta W_1 = (\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}^0)\delta\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}\delta(\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}^0) = 0, \quad i,j = 1,2,3.$$

Равенство нулю коэффициентов при вариациях $\delta\varepsilon_{ij}$ дает необходимые условия экстремума

$$\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}^0 = 0 \quad < i,j = 1,2,3 >$$

и определяет две независимые функции — $\varepsilon_{ii} = \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3)$ и $\varepsilon_{ij} = e \quad (i \neq j)$, которые дают условия стационарности функционала $\tilde{W}(\varepsilon_{ij})$ по направлению $\tilde{W}_0(\varepsilon_{ij}) = 1$. В итоге получаем

$$(K^* - \mu k(t))\varepsilon = 0, \qquad (21)$$
$$(G^* - \mu g(t))e = 0, \quad K^* = \Lambda^* + \frac{2}{3}G^*, \quad K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}g(t).$$

К уравнениям (21) необходимо присоединить условие нормировки

$$9k(t)\varepsilon^2(t) + 12g(t)e^2(t) = 1.$$

Поскольку два уравнения (21) не могут выполняться одновременно, полагая поочередно $\varepsilon = 0$, $e = 0$, получим

$$\mu_1 = K^*\varepsilon/(k(t)\varepsilon), \quad 9k(t)\varepsilon^2(t) = 1, \qquad (22)$$
$$\mu_2 = G^*e/(g(t)e), \quad 12g(t)e^2(t) = 1.$$

Поскольку условия максимальной энергетической близости $\tilde{W}$ и $\tilde{W}_0$ имеют место при $\mu_1 = \mu_2 = 1$, запишем выражения для $k(t), g(t)$:

$$k(t) = K^*\varepsilon/\varepsilon, \quad k(t)\varepsilon^2(t) = 1, \qquad (23)$$
$$g(t) = G^*e/e, \quad g(t)e^2(t) = 1. \qquad (24)$$

В системе (23), (24) введены нормирующие числовые множители: $\varepsilon' = 3\varepsilon$, $e' = \sqrt{12}e$ (штрихи отброшены). Модули $k(t), g(t)$, определяемые (23), (24), получены несколько другим способом в [6] и названы оптимальными эффективными модулями (ОЭМ) линейно-вязкоупругого тела.

4. Оценки приближенных решений с оптимальными модулями

Обратимся к эквивалентной вариационной формулировке линейной задачи [3, 5], для которой также рассмотрим доказательство положительной определенности оператора краевой задачи. Введем скалярное произведение и соответствующую норму

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{u}\dot{\mathbf{v}}\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\Omega)}, \quad \Omega = V \times [0, T].$$

Здесь T — граница временного интервала, на котором ищется решение. Определим симметричный оператор A_1 с помощью скалярного произведения

$$(A_1\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} [\sigma_{ij}(\mathbf{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) + \sigma_{ij}(\mathbf{v})\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})]\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3. \qquad (25)$$

Воспользуемся неравенством [6]

$$\int\limits_0^T \sigma_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt \geq \int\limits_0^T g_{ijkl}(t)\varepsilon_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{kl}(t)dt, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \qquad (26)$$

$$g_{ijkl}(t) = C^*_{ijkl}h = R_{ijkl}(t),$$

где $h = h(t)$ — функция Хевисайда. Так как интегралы правой и левой частей последнего неравенства положительно определенные, интегрируя (26) по V, запишем

$$\begin{aligned}(A_1\mathbf{u},\mathbf{u}) \quad &= \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\Omega \geq \int\limits_{\Omega} g_{ijkl}(t)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\dot{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u})\Omega \geq \\ &\geq g_{ijkl}(\infty)\int\limits_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\dot{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u})\Omega = \frac{1}{2}g_{ijkl}(\infty)\int\limits_{V} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})V,\end{aligned}$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание неравенство (13) и неравенство Фридрихса, получаем из последнего доказательство утверждения положительной определенности оператора A_1.

Вариационное уравнение [3]

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\Omega = \int\limits_{\Omega} \rho F_i \delta\dot{u}_i\Omega + \int\limits_{\Sigma_1} S^0_i \delta\dot{u}_i\Sigma, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{27}$$

дает обобщенное решение краевой задачи линейной вязкоупругости, определяемое (10), (11) при заданных на Σ_1 граничных условиях в перемещениях. Здесь $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$, $\Sigma_\alpha = \Gamma_\alpha \times [0, T]$, $\alpha = 1, 2$. Кроме того, в силу положительной определенности и симметрии оператора A_1 справедлива теорема о минимуме функционала

$$\Phi_1(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\Omega - \int\limits_{\Omega} \rho F_i \dot{u}_i\Omega - \int\limits_{\Sigma_1} S^0_i \dot{u}_i\Sigma,$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Для оценки погрешности приближенных решений с ОЭМ, определяемых (23), (24), рассмотрим неравенства, связывающие удельные потенциальные энергии деформаций формоизменения, соответствующие определяющим уравнениям (18), (19), в которых $g(t) = g^{\mathrm{opt}}(t)$ — оптимальный эффективный модуль сдвига:

$$m\int\limits_0^T g^{\mathrm{opt}}(t)\varepsilon_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt \leq \int\limits_0^T \dot{\varepsilon}_{ij}G^*\varepsilon_{ij}dt \leq M\int\limits_0^T g^{\mathrm{opt}}(t)\varepsilon_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt, \tag{28}$$

$$M \geq m > 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В силу (26) левое неравенство в (28) будет выполнено и подавно, если

$$m\int\limits_0^T g^{\mathrm{opt}}(t)\varepsilon_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt \leq \int\limits_0^T g(t)\varepsilon_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Отсюда находим

$$m \leq \min_{t\in[0,T]}(g(t)/g^{\mathrm{opt}}(t)), \quad g(t) = G^*h. \tag{29}$$

Правое неравенство в (28) справедливо, если

$$M \geq \max_{t\in[0,T]} (g_\infty / g^{\mathrm{opt}}(t)), \quad g_\infty = g(\infty). \tag{30}$$

Аналогично можно рассмотреть оценки для объемных составляющих удельных потенциальных энергий.

В силу того что функции $g^{\mathrm{opt}}(t)$, $g(t)$ заданы и положительны на интервале $t \in [0,T]$, вычисление m, M по (29), (30) не вызывает затруднений.

Приближенные решения с ОЭМ можно рассматривать в качестве первого приближения итерационной процедуры для вариационного уравнения (27):

$$\int\limits_{\Omega} \sigma^0_{ij}(\mathbf{u}^{n+1})\dot\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\Omega = \int\limits_{\Omega} [\sigma^0_{ij}(\mathbf{u}^n) - \beta\sigma_{ij}(\mathbf{u}^n)]\dot\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\Omega + \beta\left[\int\limits_{\Omega} \rho F_i \dot v_i \Omega + \int\limits_{\Sigma_1} S^0_i \dot v_i \Sigma\right], \tag{31}$$

$$n = 0, 1, \ldots; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \beta = \mathrm{const} > 0.$$

Итерационный процесс (31) является сходящимся, последовательность приближений, получаемых с помощью (31), оценивается как [5]

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*\| \leq q^n \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|_0, \quad q = \frac{M-m}{M+m},$$

где $\mathbf{u}^*$ — точное решение (27), а m и M входят в оценки, которые могут быть получены интегрированием по V неравенств (28):

$$m\|\mathbf{u}\|_0^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \leq M\|\mathbf{u}\|_0^2. \tag{32}$$

Здесь нормы, входящие в (32), образованы следующими скалярными произведениями:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} [\sigma^0_{ij}(\mathbf{u})\dot\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \sigma^0_{ij}(\mathbf{v})\dot\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})]\Omega,$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} [\sigma_{ij}(\mathbf{u})\dot\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \sigma_{ij}(\mathbf{v})\dot\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})]\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\|\mathbf{u}\|_0^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_0, \quad \|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

а неравенства (32) можно рассматривать как условия эквивалентности соответствующих норм.

5. Оператор нелинейной вязкоупругости

Физические уравнения главной квазилинейной теории вязкоупругости [7] имеют вид

$$\sigma_{ij}(t) = \Lambda^*\theta\delta_{ij} + 2G^*\varepsilon_{ij} - \Gamma^*(\varphi(e_n)e_{ij}). \tag{33}$$

Здесь $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \theta\delta_{ij}/3$; Γ^* — интегральный оператор, описывающий нелинейную релаксацию; Λ^*, G^* по-прежнему определены (18). Функция нелинейности удовлетворяет условию [7]

$$0 \leq \varphi(e_n) \leq \varphi(e_n) + 2e_n\frac{d\varphi}{de_n} < 1, \tag{34}$$

$$e_n = e_{ij}e_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Зададим оператор краевой задачи с определяющими уравнениями (33) в виде (25) и рассмотрим для него доказательство положительной определенности. Используем неравенство [6]

$$\int_0^T \sigma_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt \geq \int_0^T \sigma^0_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt, \quad i,j = 1,2,3, \tag{35}$$

$$\sigma^0_{ij} = \lambda(t)\theta\delta_{ij} + 2g(t)\varepsilon_{ij} - \varphi(e_n)\gamma(t)e_{ij},$$

$$g(t) = G^*h, \quad \gamma(t) = \Gamma^*h, \quad k(t) = K^*h,$$

$$K^* = \Lambda^* + \frac{2}{3}G^*, \quad k(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}g(t).$$

Пусть эффективные модули $g(t)$, $\gamma(t)$ связаны неравенством $2g(t) \geq \gamma(t) > 0$. В силу положительной определенности интеграла правой части (35) и неравенств (34) получаем

$$\int_0^T \sigma^0_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dt \geq \int_0^T [2g(t) - \gamma(t)]e_{ij}\dot{e}_{ij}dt + \int_0^T k(t)\theta\dot{\theta}dt \geq$$

$$\geq (2g_\infty - \gamma_\infty)\int_0^T e_{ij}\dot{e}_{ij}dt + k_\infty\int_0^T \theta\dot{\theta}dt = \frac{1}{2}(2g_\infty - \gamma_\infty)e_{ij}e_{ij} + \frac{1}{2}k_\infty\theta^2. \tag{36}$$

Интегрируя по объему V неравенство (35) и учитывая (36), получим

$$(A_1\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\Omega \geq C_1\int_V e_{ij}e_{ij}V + C_2\int_V \theta^2 V, \tag{37}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(2g_\infty - \gamma_\infty), \quad C_2 = \frac{1}{2}k_\infty, \quad i,j = 1,2,3.$$

К неравенству (37) можно теперь применить неравенства Корна и Фридрихса, из чего следует положительная определенность оператора A_1 с физическими уравнениями (33).

6. Численный пример

В качестве примера числового расчета с оптимальными эффективными модулями рассмотрим задачу о нагружении вязкоупругого полупространства нагрузкой $p(t)$, распределенной по кругу радиуса a. Выражения упругих усилий S и перемещений V задаются выражениями [7]

$$S = -\frac{p}{3\pi a^2}\frac{3\omega_0}{2+\omega_0}, \quad V = \frac{2p}{\pi a G_0}\left(1 - \frac{3}{2(2+\omega_0)}\right), \quad \omega_0 = \frac{2G_0}{3K_0}.$$

Здесь G_0, K_0 — упругомгновенные модули.

Значения $g^{\text{opt}}(t)$, $k^{\text{opt}}(t)$ рассчитывались как решения интегральных уравнений (23), (24), затем определялась функция

$$\omega^{\text{opt}}(t) = 2g^{\text{opt}}(t)/3k^{\text{opt}}(t).$$

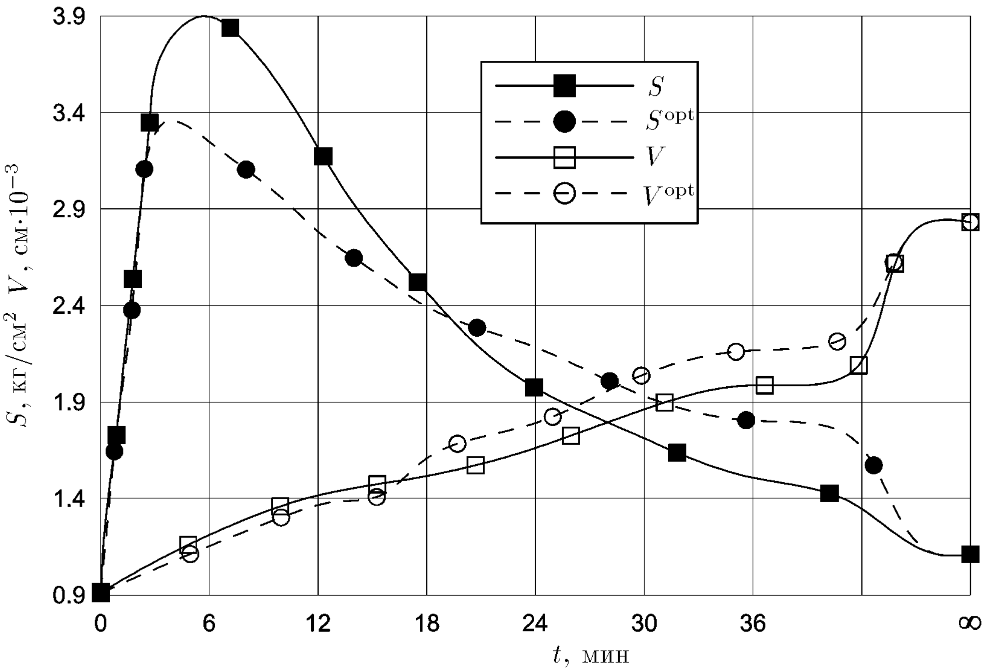

Рис. 1. Напряженно-деформированное состояние вязкоупругого полупространства от нагрузки $p = h(t)$, распределенной по кругу $r = a$. Кривые изменения во времени усилий: $S(t)$, $S^{\mathrm{opt}}(t)$ — точное решение и расчет с оптимальными модулями; $V(t)$, $V^{\mathrm{opt}}(t)$ — аналитические и рассчитанные с ОЭМ перемещения.

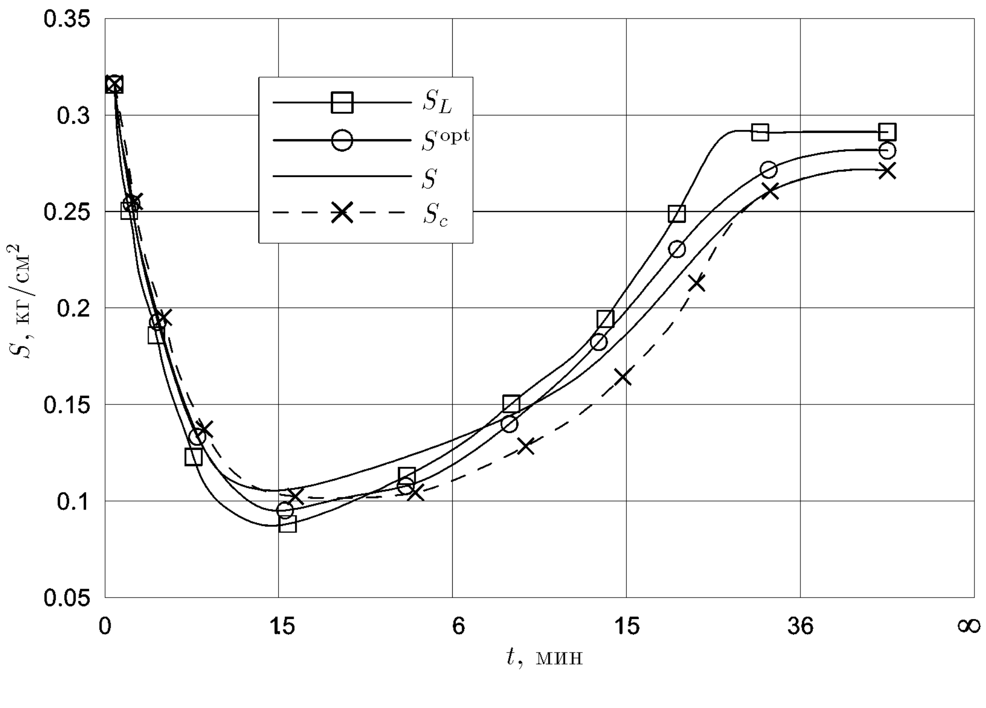

Рис. 2. Сравнение расчетов усилий с ОЭМ и эффективными модулями.

Далее в выражениях для S, V производим замену: $\omega_0 \to \omega^{\text{opt}}(t)$, $G_0 \to g^{\text{opt}}(t)$. Операторы сдвиговой и объемной релаксации задаются в виде

$$G^* x \equiv G_0(1 - \lambda Э^*_\beta)x, \quad K^* x \equiv K_0(1 - \lambda_1 Э^*_{\beta_1})x, \quad Э^*_\gamma x \equiv \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} x(\tau) d\tau.$$

Параметры материальных функций сдвиговой и объемной релаксации задавались следующим образом: $\beta = 0.01$ мин$^{-1}$, $\lambda = 0.051$ мин$^{-1}$, $\beta_1 = 0.5$ мин$^{-1}$, $\lambda_1 = 2.5$ мин$^{-1}$ (случай преобладания скорости объемной релаксации на порядок). Упругомгновенные характеристики $G_0 = 40$ кг/см^2, $K_0 = 133.3$ кг/см^2.

На рис. 1 приведены кривые изменения усилий и перемещений. На рис. 2 представлены точное $S(t)$ и приближенное $S^{\text{opt}}(t)$, $S_L(t)$, $S_c(t)$ решения для другого варианта задания параметров материальных функций: $\beta = 1.5$ мин$^{-1}$, $\lambda = 4.5$ мин$^{-1}$, $\beta_1 = 0.025$ мин$^{-1}$, $\lambda_1 = 0.065$ мин$^{-1}$ (случай преобладания сдвиговой скорости релаксации над объемной). Числовые значения усилий $S_L(t)$ и $S_c(t)$ соответствуют приближенным значениям, полученным использованием расчетов с эффективными модулями лагранжевого и кастильяного типов, вычисляемым по формулам

$$g_L(t) = G^* h, \quad g_c(t) = (G^{*-1} h)^{-1},$$

и по аналогичным формулам для объемных модулей. Из сравнения различных приближенных решений видно, что расчет с оптимальными эффективными модулями более близок к аналитическому решению, это связано с выполнением неравенств для любых t:

$$g_L(t) \le g^{\text{opt}}(t) \le g_c(t).$$

Выводы

1. Доказано выполнение условия эллиптичности для линейно-вязкоупругих тел.

2. Доказаны условия положительной определенности для двух типов операторов линейной вязкоупругости, для которых показана справедливость соответствующих вариационных формулировок и выполнения условий теоремы о минимуме функционала.

3. Получены оценки погрешности для приближенных решений задач линейной вязкоупругости, которые могут быть построены с помощью найденных выражений для эффективных по времени модулей.

4. На примере главной квазилинейной теории вязкоупругости рассмотрено доказательство положительной определенности оператора краевой задачи.

5. Приведен численный пример.

Автор выражает благодарность профессору С.В. Шешенину за обсуждение некоторых вопросов, связанных с проблематикой статьи.

Список литературы

[1] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.

[2] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.

[3] Работнов Ю. И. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

[4] Победря Б. Е. Математическая теория нелинейной вязкоупругости // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 1973. Вып. 3. С. 95–173.

[5] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. 336 с.

[6] Светашков А. А. Эффективные по времени модули и интегральные неравенства для задач нелинейной вязкоупругости // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 3. С. 60–71.

[7] Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

Поступила в редакцию 7 июля 2002 г.