УСЛОВИЯ ГЕНЕРАЦИИ ВИХРЕВОГО ПОЛЯ В ОЧАГАХ ЦУНАМИ*

С. Ф. Доценко
Морской гидрофизический институт НАН Украины, Севастополь
Ю. И. Шокин
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия

Определены условия образования геострофического вихревого поля в зонах генерации цунами. В качестве возможных генераторов волн рассмотрены начальные возмущения океана, смещения участка дна бассейна, массовые силы и подводные гидродинамические источники. Подобные идеализированные начальные и внешние возмущения используются при математическом моделировании процессов возбуждения цунами в океане подводными землетрясениями, извержениями вулканов и взрывами.

1. Введение

К числу основных природных источников генерации цунами относятся подводные землетрясения и вулканические извержения [1]. Первые сопровождаются вертикальными смещениями обширных участков дна океана и горизонтальными сдвигами подводных склонов, вторые — интенсивными, иногда взрывными, выбросами твердых, жидких и газообразных веществ в океан.

Предложено несколько физически обоснованных способов теоретического моделирования процессов передачи энергии подводных землетрясений океанической среде, а именно:

задание начального возмущения жидкости как последствия внешнего воздействия на океан [2, 3];

задание пространственно-временного закона деформаций дна, обусловленных движениями земной коры в период землетрясения [2, 4];

задание начального возмущения океана путем решения задачи гидроупругости в случае известных параметров разлома литосферной плиты при землетрясении [3, 5];

задание нестационарного поля массовых сил в очаге цунами для имитации передачи горизонтального импульса океанической среде, что позволяет сохранить предположение о постоянстве глубины бассейна и эффективно использовать аналитические методы решения линейных волновых задач [6].

Моделирование воздействия на океан при подводных извержениях вулканов и взрывах затруднено сложностью происходящего физического процесса. При моделировании таких генераторов волн наиболее часто применяются два подхода:

задание начального возмущения жидкости по аналогии с подводными взрывами [7, 8];
задание подводного источника импульсного типа [9].

Цунами — не единственное проявление реакции океана на подводные землетрясения, извержения вулканов и подводные взрывы. Эти события могут сопровождаться, например, генерацией акустических и внутренних (бароклинные цунами) волн [2, 10, 11]. Эффекты вращения и сферичности Земли могут оказаться существенными в перераспределении энергии волн в прибрежной зоне и при распространении цунами на трансокеанских трассах [2, 12]. При смещениях участка дна в неоднородном вращающемся океане помимо внутренних волн может генерироваться и вихревое поле [11].

Ниже для непрерывно стратифицированного вращающегося океана постоянной глубины в рамках линейной теории волн определяются общие условия образования геострофических течений в океане под действием различных типов возмущений. В качестве возможных причин генерации геострофических вихрей рассмотрены начальные возмущения океанической среды, деформации дна бассейна, нестационарные массовые силы и подводные источники. В силу сказанного ранее о моделировании механизмов возбуждения цунами, эта задача непосредственно касается изучения гидрофизических процессов, сопутствующих генерации цунами при подводных землетрясениях, извержениях подводных вулканов и подводных взрывах.

2. Постановка задачи

Рассмотрим горизонтальный слой $-\infty < x, y < \infty,\ -H \leq z \leq 0$ идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, вращающийся с угловой скоростью $l/2$ относительно вертикальной оси Oz $(H, l = \text{const} > 0)$. Плотность жидкости ρ_0 в невозмущенном состоянии является гладкой функцией координаты z, причем $\rho_0'(z) < 0$ при всех $z \in [-H, 0]$.

В моменты времени $t \geq 0$ на жидкость, выведенную из состояния гидростатического равновесия, начинает действовать массовая сила с ускорением $(f_x, f_y, f_z)(x, y, z, t)$, внутри жидкости “включаются"источники массы удельной плотности $q(x, y, z, t)$, а дно бассейна деформируется по закону $z = -H + h(x, y, t),\ \max_{x,y,t} \mid h \mid\ll H$. Функции $f_x, f_y, f_z, q, h = 0$ при $t \leq 0$ и финитны по пространственным переменным. Предполагается, что начальное возмущение жидкости, внешние возмущения и генерируемые гидродинамические поля являются малыми величинами одного порядка.

В линейной постановке движение жидкости описывается начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + f_x,\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + f_y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) + f_z,\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\rho_0 N^2}{g}w = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = q, \tag{2}$$

$$p - \rho_0 g\zeta = 0,\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w\ (z = 0), \tag{3}$$

$$w = \frac{\partial h}{\partial t}\ (z = -H), \tag{4}$$

$$\{u, v, w, \rho\} = \{u^0, v^0, w^0, \rho^0\}(x, y, z),\ \zeta = \zeta^0(x, y)\ (t = 0). \tag{5}$$

Здесь $u, v, w(x, y, z, t)$ — горизонтальные и вертикальная координаты вектора скорости, $p, \rho(x, y, z, t)$ — динамические возмущения давления и плотности жидкости относительно гидростатических распределений этих величин в гравитационном поле, $\zeta(x, y, t)$ — вертикальные смещения свободной поверхности, $N(z) = \sqrt{-g\rho_0'/\rho_0}$ — частота Брента—Вяйсяля, g — ускорение свободного падения. Поля $u^0, v^0, w^0, \rho^0, \zeta^0$ задают начальное динамическое состояние среды, причем поле скорости предполагается бездивергентным для обеспечения выполнения уравнения неразрывности в момент времени $t = 0$.

Цель исследования — в рамках задачи (1)–(5) определить необходимые и достаточные условия для образования при $t \to \infty$ стационарных движений непрерывно стратифицированной жидкости в процессе эволюции начальных полей и под действием указанных выше внешних возмущений. Прямой путь выделения финального движения жидкости — нахождение решения неустановившейся задачи (1)–(5) и выполнение в нем предельного перехода к большим временам. Более простой способ достижения поставленной цели реализуется путем применения методов операционного исчисления. Они позволяют получить гидродинамическую задачу для описания финального движения жидкости при $t \to \infty$ без анализа наиболее сложного волнового этапа динамического процесса.

3. Краевая задача для финального движения жидкости при $t \to \infty$

Обозначим через α и $f^+(x, y, z, \alpha)$ параметр преобразования и преобразование Лапласа по времени t функции $f(x, y, z, t)$ соответственно. Применим это интегральное преобразование к исходным уравнениям и граничным условиям (1)–(4) с учетом (5). Для нахождения изображения $p^+(x, y, z, \alpha)$ поля динамического давления получим краевую задачу

$$\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 p^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^+}{\partial y^2}\right) + (\alpha^2 + l^2)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho_0(\alpha^2 + N^2)}\frac{\partial p^+}{\partial z}\right] = a(x, y, z, \alpha), \tag{6}$$

$$\frac{\partial p^+}{\partial z} + \frac{\alpha^2 + N^2}{g}p^+ = b(x, y, \alpha) \ (z = 0), \tag{7}$$

$$\frac{\partial p^+}{\partial z} = c(x, y, \alpha) \ (z = -H), \tag{8}$$

где

$$a = a_0 + a_f + a_q,$$

$$a_0 = \frac{l}{\alpha}\left(\frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y}\right) - \frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\alpha^2 + l^2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\alpha\rho_0 w^0 - g\rho^0}{\rho_0(\alpha^2 + N^2)}\right],$$

$$a_f = \frac{\partial f_x^+}{\partial x} + \frac{\partial f_y^+}{\partial y} + \frac{l}{\alpha}\left(\frac{\partial f_y^+}{\partial x} - \frac{\partial f_x^+}{\partial y}\right) + (\alpha^2 + l^2)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f_z^+}{\alpha^2 + N^2}\right],$$

$$a_q = -\frac{\alpha^2 + l^2}{\alpha}q^+,$$

$$b = b_0 + b_f,$$

$$b_0 = \rho_0 w^0 + \frac{1}{\alpha}\left[\rho_0(\alpha^2 + N^2)\zeta^0 - g\rho^0\right], \ b_f = \rho_0 f_z^+,$$

$$c = c_0 + c_h + c_f,$$

$$c_0 = \rho_0 w^0 - \frac{g}{\alpha}\rho^0, \ c_h = -\rho_0(\alpha^2 + N^2)h^+, \ c_f = \rho_0 f_z^+.$$

Предположим, что существуют следующие пределы и интегралы:

$$\lim_{t\to\infty}\{f_x, f_y, f_z, q\} = 0,\ \lim_{t\to\infty} h = H_0(x,y),$$

$$S(x,y,z) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dt,\ Q(x,y,z) = \int_0^\infty q\, dt.$$

Эти ограничения вполне оправданны в задачах генерации цунами, поскольку реальные сейсмические, вулканические и взрывные процессы характеризуются конечной временно́й продолжительностью.

Получим задачу, описывающую стационарное движение жидкости, которое может существовать при $t \to \infty$. С этой целью умножим равенства (6)–(8) на параметр преобразования α и перейдем к пределу при $\alpha \to 0$. С учетом предельных соотношений операционного исчисления [13]

$$\lim_{\alpha\to 0} f^+(x,y,z,\alpha) = \int_0^\infty f(x,y,z,t)dt,\ \lim_{\alpha\to 0}[\alpha f^+(x,y,z,\alpha)] = f(x,y,z,\infty)$$

придем к искомой краевой задаче относительно возмущений давления $P(x,y,z) = p(x,y,z,\infty)$ в стационарном динамическом образовании

$$\pounds[P] \stackrel{d}{=} \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) + l^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0 N^2}\frac{\partial P}{\partial z}\right) = A(x,y,z), \tag{9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{N^2}{g} P = B(x,y)\ (z=0), \tag{10}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = C(x,y)\ (z=-H). \tag{11}$$

Здесь

$$A = A_0 + A_f + A_q,$$

$$A_0 = l\left(\frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y}\right) - gl^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho^0}{\rho_0 N^2}\right),\ A_f = lS,\ A_q = -l^2 Q,$$

$$B = B_0,\ B_0 = \rho_0 N^2 \zeta^0 - g\rho^0,$$

$$C = C_0 + C_h,\ C_0 = -g\rho^0,\ C_h = -\rho_0 N^2 H_0.$$

4. Условия генерации геострофического вихревого поля

Найдем необходимые условия генерации стационарных движений жидкости под действием внешних и начальных возмущений среды. Полагаем, что поле давления P на больших расстояниях $r = \sqrt{x^2+y^2}$ от зоны возмущений затухает по закону

$$P = O(r^{-s}),\ r\to\infty,\ s \geq 1. \tag{12}$$

Это ограничение традиционно для эллиптических краевых задач в неограниченных областях, к которым относится (9)–(11) [14].

Покажем, что соответствующая (9)–(11) однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Это гарантирует единственность решения исходной задачи.

Применим к произведению $P \cdot \pounds[P] = 0$ первую формулу Грина [14] по цилиндрическому объему $G(r_0) = \{(x, y, z) : r \le r_0, -H \le z \le 0\}$ и перейдем к пределу при $r_0 \to \infty$. В силу (12) интеграл по боковой поверхности цилиндрической области G имеет порядок $O(r_0^{-2s})$, а поэтому стремится к нулю. С учетом граничных условий (10), (11) окончательно получим интегральное соотношение

$$\int\limits_{G(\infty)} \frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \frac{l^2}{N^2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right] dxdydz + \frac{l^2}{\rho_0(0)g} \int\limits_{z=0} P^2 dxdy = 0, \qquad (13)$$

из которого следует, что $P \equiv 0$.

Таким образом, для образования при $t \to \infty$ стационарного распределения возмущений давления необходимо, чтобы в задаче (9)–(11) правые части уравнения и граничных условий не были равны тождественно нулю. Это означает, что $\mid A(x, y, z) \mid > 0$ в некотором объеме жидкости и(или) $\mid B(x, y) \mid + \mid C(x, y) \mid > 0$ в некоторой области переменных x и y. Эти условия являются и достаточными.

Предельный переход в уравнениях (1), (2) при $t \to \infty$ приводит к следующим равенствам, известным в геофизической гидродинамике как геострофические соотношения [15]:

$$U = -\frac{1}{\rho_0 l} \frac{\partial P}{\partial y}, \ V = \frac{1}{\rho_0 l} \frac{\partial P}{\partial x}, \ W = 0, \ \frac{\partial P}{\partial z} = -Rg, \qquad (14)$$

в которых $(U, V, W)(x, y, z)$ — вектор скорости стационарного течения, $R(x, y, z)$ — стационарное возмущение распределения средней плотности жидкости $\rho_0(z)$. Они позволяют определить по известному решению задачи (9)–(11) поля течений и плотности. Равенства (14) означают выполнение точного баланса между силой Кориолиса и горизонтальной составляющей градиента давления.

Из уравнений (14) следуют известные свойства геострофических течений [15]. Такие движения жидкости являются вихревыми, бездивергентными и горизонтальными. Давление в среде на любой вертикали подчинено гидростатическому закону. Геострофическая скорость $(U, V, 0)$ перпендикулярна градиенту давления, а поэтому линии тока в любой плоскости $z = \text{const}$ совпадают с изобарами. Полная энергия течения с точностью до постоянного множителя равна квадратичному функционалу в левой части формулы (13).

В соответствии с видом правых частей задачи (9)–(11) характеристики геострофического течения, если оно образуется, в общем случае зависят от вида начального возмущения жидкости. При малых смещениях участка дна бассейна имеет значение только предельное при $t \to \infty$ распределение смещений дна. Характер изменения внешних возмущений в промежуточные моменты времени $0 < t < \infty$ принципиально важен при воздействии на среду массовых сил и подводных источников.

Рассмотрим условия образования геострофического вихревого поля для отдельных типов возмущений океана.

Начальные возмущения жидкости. Начальные смещения свободной поверхности ($B_0 \not\equiv 0$), возмущения среднего распределения плотности внутри жидкости ($A_0 \not\equiv 0$) или на границах слоя ($B_0 \not\equiv 0, \ C_0 \not\equiv 0$) всегда приводят в процессе адаптации полей к образованию геострофического течения [16]. Начальное поле горизонтальной скорости дает аналогичный результат, если оно является вихревым ($A_0 \not\equiv 0$) [15–17]. Наконец, начальное поле вертикальной скорости не может выступать в качестве генератора геострофических течений, хотя такие движения жидкости несомненно присутствуют на этапе возбуждения цунами подводными землетрясениями.

Смещения участка дна бассейна. Геострофическое течение генерируется при вертикальных смещениях участка дна бассейна, если при $t \to \infty$ возникают остаточные деформации донной поверхности. Аналогичный вывод получен в [11]. Образование сильных цунами, как показывают натурные данные [1, 2, 8] и результаты расчетов полей остаточных смещений дна [3, 12], сопровождалось, как правило, заметными трансформациями рельефа дна океана после землетрясений.

Массовые силы. Геострофическое течение может генерироваться только непотенциальной горизонтальной массовой силой $(f_x, f_y, 0)$. Условие его образования — полный импульс вертикальной проекции ротора этой силы $S(x, y, z) \neq 0$ в некоторых точках жидкости. Аналогичное условие необходимо для образования геострофических движений океана под действием касательных напряжений ветра, моделируемых распределенной массовой силой в приповерхностном слое океана [15].

Подводные источники. В случае распределенных подводных источников массы происходит генерация геострофического течения, если полный расход источников $Q(x, y, z) \neq 0$ в некоторых точках жидкости. Такое условие выполняется для источников импульсного типа, $q = q_0(x, y, z,)\delta(t)$ ($\delta(t)$ — дельта-функция Дирака). Для случая равномерно стратифицированного океана ($N = \mathrm{const} > 0$) этот вывод получен в работе [18] с использованием длинноволнового приближения.

Таким образом, к числу явлений, сопутствующих возбуждению цунами в реальном океане при подводных землетрясениях, извержениях подводных вулканов и подводных взрывах, можно отнести образование геострофического вихревого поля. Пространственная структура и интенсивность таких геострофических вихрей определяются параметрами и географическим положением источника генерации и зависят от средних гидрологических условий океана в районе очага цунами.

Список литературы

[1] Соловьев С. Л., Го Ч. Н. *Каталог цунами на западном побережье Тихого океана.* Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1974.

[2] Мурти Т. С. *Сейсмические морские волны цунами.* Гидрометеоиздат, Л., 1981.

[3] Марчук Ан. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. *Численное моделирование волн цунами.* Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1983.

[4] Kajiura T. Tsunami source, energy and directivity of wave radiation. *Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ.*, **41**, No. 5, 1970, 835–870.

[5] Гусяков В. К. О связи волны цунами с параметрами очага подводного землетрясения. В *“Математ. проблемы геофизики”*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, вып. 5, 1976, 118–140.

[6] Войт С. С., Лебедев А. Н., Себекин Б. И. Формирование направленной волны цунами в очаге возбуждения. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, **17**, №3, 1981, 296–304.

[7] Le Mehaute B. Theory of explosion-generated water waves. In *“Advances in Hydrosciences”*, N. Y., vol. 7, 1971, 1–79.

[8] Пелиновский Е. Н. *Нелинейная динамика волн цунами.* Изд-во ИПФ АН СССР, Горький, 1982.

[9] Егоров Ю. А. Гидродинамическая модель генерации волн цунами извержением подводного вулкана. В *“Природные катастрофы и стихийные бедствия в Дальневосточном регионе”*, ИМГиГ ДВО АН СССР, Владивосток, т. 1, 1990, 82–93.

[10] Фридман В. Е. Гидроакустические сигналы при взрывах и извержениях. В *“Распространение и набегание на берег волн цунами”*, Наука, М., 1981, 10–41.

[11] Доценко С. Ф. Возбуждение волн цунами в непрерывно стратифицированном океане подвижками участка дна. *Исследования цунами*, №3, 1988, 7–17.

[12] Шокин Ю. И., Марчук Ан. Г., Чубаров Л. Б., Симонов К. В. *Вычислительный эксперимент в проблеме цунами.* Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1989.

[13] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* Физматгиз, М., 1958.

[14] Михлин С. Г. *Курс математической физики.* Наука, М., 1968.

[15] Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика. Т. 1.* Мир, М., 1984.

[16] Доценко С. Ф. Эволюция начальных возмущений непрерывно стратифицированной жидкости. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, **20**, №3, 1984, 285–294.

[17] Монин А. С. Об адиабатических возмущениях вращающейся жидкости. *Докл. АН СССР*, **216**, №4, 1974, 784–787.

[18] Зайцев А. А. Вынужденные длинные волны в слое вращающейся жидкости. *Океанология*, **20**, вып. 1, 1980, 13–18.

Поступила в редакцию 8 сентября 1996 г.