Вычислительные технологии **Том 1, № 1, 1996**

ЯВНЫЙ БЕЗУСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ*

В. Ф. Куропатенко
*Российский федеральный ядерный центр — Всесоюзный научно-исследовательский институт технической физики
Снежинск, Россия*

Рассматривается явный безусловно устойчивый разностный метод, в котором для расчета течений жидкости и в области сжатия применяется явный разностный метод с условием устойчивости Куранта, а для расчета характеристик в области разрежения применяется явный безусловно устойчивый разностный метод, построенный на переменном шаблоне, зависящем от шага по времени. Дается новое определение явных и неявных разностных схем для системы законов сохранения. Обсуждаются примеры эффективности предложенной разностной схемы.

Математическое моделирование распространения волн сжатия или разрежения в нестационарном потоке жидкости с включениями тонких пленок из более тяжелой или более легкой жидкости требует преодоления трудностей, возникающих из-за разномасштабности процессов. Есть разные пути решения этой проблемы. Рассмотрим один из них.

Пусть движение жидкости описывается системой законов сохранения в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E + \frac{1}{2}U^2\right) + \frac{\partial}{\partial m}(PU) = 0, \tag{3}$$

где V — удельный объем, U — массовая скорость, P — давление, E — удельная внутренняя энергия, t — время, m — массовая лагранжева координата.

Дифференциальные уравнения (1)–(3) аппроксимируем разностными уравнениями. В литературе известно много разностных схем, применяемых для численного интегрирования системы (1)–(3) и обладающих различными достоинствами и недостатками. Ограничимся обсуждением только двуслойных разностных схем (РС), связывающих решение в точках сетки для двух соседних моментов времени t^n и $t^{n+1} = t^n + \tau$. Все такие РС делятся на явные и неявные. Разностную схему

$$U^{n+1} = C_{n+1}U^n,$$

где оператор шага $C_{n+1}(\tau, h, T) = {}_\beta T^\beta$, T — оператор сдвига, $_\beta$ — матрица в 4-мерном пространстве компонент вектор-функции

$$U(m,t) = \{V(m,t), U(m,t), P(m,t), E(m,t)\},$$

$$\beta = -q_1, -q_1+1, ..., q_2-1, q_2, \quad q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ q_1+q_2 \geq 1,$$

будем называть явной, если для любого наперед заданного Q из промежутка $[1, \mathrm{N})$, где N — число точек сетки в области интегрирования, найдется такое $\tau > 0$, что $q(\tau) = q_1 + q_2 \leq Q$. В противном случае разностную схему будем называть неявной.

Как правило, явные РС условно устойчивы [1–3]. Условие устойчивости формулируется в виде ограничений на соотношение шагов сетки по времени и по лагранжевой координате. В случае, когда различные фрагменты рассчитываемой системы имеют разные размеры, шаг по времени выбирается по малому элементу системы и оказывается неоправданно малым для больших элементов той же системы. Таким образом, применение явных условно устойчивых РС для расчета течений с разномасштабными элементами оказывается экономически невыгодным. В качестве примера рассмотрим, как влияет тонкая прослойка на увеличение времени решения на ЭВМ задачи о распространении ударной волны в одномерной системе размером H. Ударная волна, распространяющаяся со скоростью W, проходит всю область H за время T. Требуется определить состояние системы в момент времени $5T$. Будем считать ударную волну слабой и положим $W = \mathrm{const}$. В однородных явных условно устойчивых РС ударная волна проходит одну точку сетки за ~ 5 шагов по времени. Если в области интегрирования взять N точек сетки по пространству и на расчет всех величин в одной точке потратить μ операций, то для расчета задачи потребуется $25\mu N^2$ операций. Изменим систему, поместив внутри области H тонкую прослойку толщиной h. Возьмем в прослойке n точек по пространству. Значения h и n таковы, что $\dfrac{H}{N} \gg \dfrac{h}{n}$ и, следовательно, шаг по времени выбирается в точках прослойки. В этом случае на решение задачи потребуется затратить $25\mu n(N+n)\frac{H}{h}$ операций. Таким образом, количество операций возрастает в $\varphi \approx \dfrac{n(N+n)H}{N^2 h}$ раз. Если применяемая ЭВМ такова, что на решение задачи без прослойки при $N = 100$ требуется ~ 20 мин, то для решения задачи с прослойкой при $n = 10, h = 10^{-3}H$ потребуется более 30 часов. Если же решение в прослойке требуется найти с более высокой точностью, то $n = 10$ недостаточно. Но уже при $n = 50$ время решения задачи с прослойкой возрастет до ~ 250 часов.

Безусловно, при разных $\dfrac{n}{N}$ и $\dfrac{h}{H}$ количественные результаты будут разными, но качественный вывод сохранится: для решения задач с тонкими прослойками требуется затратить заметно больше ресурсов ЭВМ.

В течение многих лет для решения таких задач применялись неявные, как правило, безусловно устойчивые РС. Применение неявных РС требует на каждом шаге по t решения системы сеточных уравнений, число которых равно числу точек сетки по пространству. В случае нелинейных уравнений возникает необходимость проведения итераций по нелинейности, что приводит к росту затрат времени ЭВМ. Эти затраты особенно возрастают при использовании сложных уравнений состояния.

В массивно параллельных ЭВМ использование неявных безусловно устойчивых РС снижает эффективность ЭВМ из-за необходимости обмена данными между процессорами на каждой итерации.

Кроме условия устойчивости, ограничивающего отношение шагов по t и m, во всех РС, явных и неявных, условно и безусловно устойчивых, существует условие точности. Это условие формулируется также в виде ограничения на соотношение шагов сетки по времени и по лагранжевой координате и зависит от решения.

В данной работе построена такая явная разностная схема для системы законов сохранения (1)–(3), в которой условие устойчивости трансформируется в условие для выбора числа точек в момент t^n, по которым находится решение в заданной точке в момент t^{n+1}. Иными словами, сеточный шаблон, на котором определяются разностные уравнения, зависит от шага τ. В целом разностная схема с переменным шаблоном оказывается безусловно устойчивой. Идея построения такой разностной схемы впервые изложена в [4], где построена явная разностная схема, в которой ограничение на соотношение шагов τ и h заменяется условием для определения в момент t^n основания характеристического треугольника, по которому проводится суммирование значений давлений и скоростей для определения вспомогательных значений этих величин. Область применимости разностной схемы [4] ограничена только гладкими течениями без ударных волн.

Рассмотрим комбинированную разностную схему, в которой для расчета ударных волн используется метод из [3], а адиабатические гидродинамические течения рассчитываются с помощью явной безусловно устойчивой разностной схемы, идейно близкой к разностной схеме из [4].

Аппроксимируем уравнения (1), (2) разностными уравнениями

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^{n}}{\tau} - \frac{U_{i+1}^{*} - U_{i}^{*}}{h} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{U_{i}^{n+1} - U_{i}^{n}}{\tau} + \frac{P_{i+0.5}^{*} - P_{i-0.5}^{*}}{h} = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим два типа решений: адиабатические волны разрежения (R-волна) и неадиабатические волны сжатия (S-волна). В случае S-волны ($\partial U/\partial x < 0$) вспомогательные значения P^* и U^* определим следующим образом:

$$U_i^* = U_i^{n+1}; P_{i+0.5}^* = \overline{P}_{i+0.5}^n. \tag{6}$$

Далее найдем вспомогательное значение $\overline{P}_{i+0.5}^n$. Предположим, что в сеточном интервале $x_i \le x \le x_{i+1}$ распространяется ударная волна, на фронте которой справедливы уравнения

$$(V_+ - V_-)W + (U_+ - U_-) = 0, \tag{7}$$

$$(U_+ - U_-)W - (P_+ - P_-) = 0, \tag{8}$$

$$E_+ - E_- + 0.5(P_+ + P_-)(V_+ - V_-) = 0, \tag{9}$$

где величины с индексом “–"характеризуют состояние перед фронтом разрыва, а с индексом “+— за фронтом. Будем считать, что

$$P_- = P_{i+0.5}^n;\ \rho_- = \rho_{i+0.5}^n;\ E_- = E_{i+0.5}^n,$$

$$\Delta U = U_+ - U_- = U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}.$$

Поскольку $P_{i+0.5}^n$, $\rho_{i+0.5}^n$, $E_{i+0.5}^n$, U_{i+1}^{n+1}, U_i^{n+1} известны, то уравнения (7)–(9) вместе с уравнением состояния

$$P = P(\rho, E) \tag{10}$$

образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными $P_+,\ \rho_+,\ E_+,\ W$. Решив эту систему, найдем P_+ и положим

$$\overline{P}^{n+1}_{i+0.5} = P_+. \tag{11}$$

Внутренняя энергия $E^{n+1}_{i+0.5}$ определяется из разностного уравнения

$$E^{n+1}_{i+0.5} = E^{n}_{i+0.5} - 0.5(\overline{P}^{n+1}_{i+0.5} + \overline{P}^{n}_{i+0.5})(V^{n+1}_{i+0.5} - V^{n}_{i+0.5}), \tag{12}$$

совпадающего с уравнением ударной адиабаты. Таким образом, обеспечивается правильное изменение энтропии при переходе от E^n к E^{n+1} в "размазанной ударной волне". В работе [2] показано, что рассмотренная РС для S-волны условно устойчива и шаги τ и h должны удовлетворять условию

$$\frac{\tau a}{h} < 1, \tag{13}$$

где a — массовая скорость звука, определяемая уравнением

$$a^2 = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S. \tag{14}$$

В случае R-волны вспомогательные значения P^*, U^* будем вычислять по формулам

$$P^*_{i+0.5} = 0.5(\beta_0 P^n_{i+0.5} + \sum_{\nu=-k_1}^{k_2} \beta_\nu P^n_{i+0.5+\nu}), \tag{15}$$

$$U^*_i = 0.5(\beta_0 U^{n+1}_i + \sum_{\nu=-k_1}^{k_2} \beta_\nu U^{n+1}_{i+\nu}), \tag{16}$$

где

$$\beta_\nu = \frac{h_{i+0.5+\nu}}{\tau a_{i+0.5+\nu}} \le 1.$$

Значение ν в суммах (15), (16) увеличивается до тех пор, пока выполняются условия

$$\sum_{\nu=0}^{k_1-1} \beta_{-\nu} < 1; \quad \sum_{\nu=0}^{k_2-1} \beta_\nu < 1. \tag{17}$$

При нарушении условий (17)

$$\sum_{\nu=0}^{k_1-1} \beta_{-\nu} + \beta_{-k_1} \ge 1, \quad \sum_{\nu=0}^{k_2-1} \beta_\nu + \beta_{k_2} \ge 1$$

значения β_{-k_1} и β_{k_2} пересчитываются по формулам

$$\beta_{-k_1} = 1 - \sum_{\nu=0}^{k_1-1} \beta_{-\nu}, \quad \beta_{k_2} = 1 - \sum_{\nu=0}^{k_2-1} \beta_\nu.$$

При решении задачи о распространении ударной волны по однородному веществу шаг по времени τ будет выбираться в сеточных интервалах "i"с S-волной по условию

$$\frac{\tau a_i}{h_i} = 1. \tag{18}$$

При этом в интервалах с R-волной может оказаться

$$\beta = \frac{h_i}{\tau a_i} \geq 1. \tag{19}$$

Но тогда из (15)–(17) следует, что

$$P^*_{i+0.5} = P^n_{i+0.5}, \quad U^*_i = U^{n+1}_i. \tag{20}$$

РС с такими вспомогательными значениями P^* и U^* исследована в [3].

Рассмотрим погрешность аппроксимации уравнений (1), (2) разностными уравнениями (4), (5) со вспомогательными величинами (20). Условия точности получим, ограничив главные члены этих выражений

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\tau - \frac{1}{24}\frac{\partial^3 U}{\partial m^3}h^2\right| \leq \varepsilon_1,$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 P}{\partial m^3}h^2\right| \leq \varepsilon_2. \tag{21}$$

С помощью (1), (2) преобразуем (21) к виду

$$\frac{\partial}{\partial m}\left|\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial t}\tau - \frac{1}{24}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2}h^2\right| \leq \varepsilon_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial m}\left|-\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial t}\tau + \frac{1}{24}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2}h^2\right| \leq \varepsilon_2.$$

Умножим каждое из этих неравенств на ∂m, проинтегрируем по m от 0 до h и запишем полученный результат в виде

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial t}\tau\right| - \left|\frac{1}{24}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2}h^2\right| \leq \varepsilon_1 h,$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial t}\tau\right| - \left|\frac{1}{24}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2}h^2\right| \leq \varepsilon_2 h, \tag{22}$$

Заменим $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ на $-\dfrac{\partial P}{\partial m}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial t}$ на $-a^2\dfrac{\partial U}{\partial m}$. После этой замены и несложных преобразований условия точности примут вид

$$\tau_1 \leq \frac{2\varepsilon_1 h + \dfrac{1}{12}h^2\left|\dfrac{\partial^2 U}{\partial m^2}\right|}{\left|\dfrac{\partial P}{\partial m}\right|}, \quad \tau_2 \leq \frac{2\varepsilon_2 h + \dfrac{1}{12}h^2\left|\dfrac{\partial^2 P}{\partial m^2}\right|}{\left|a^2\dfrac{\partial U}{\partial m}\right|}. \tag{23}$$

Заменим производные в (23) разностями, получим условия точности в виде

$$\tau_1 \leq h\frac{2\varepsilon_1 h + \dfrac{1}{12}\left|U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}\right|}{\left|P_{i+0.5} - P_{i-0.5}\right|}, \tag{24}$$

$$\tau_2 \leq h\frac{2\varepsilon_2 h + \dfrac{1}{12}\left|P_{i+1.5} - 2P_{i+0.5} + P_{i-0.5}\right|}{a^2_{i+0.5}\left|U_{i+1} - U_i\right|}, \tag{25}$$

В случае движений без ускорения и деформации $P_{i+0.5} = P_{i-0.5},\ U_{i+1} = U_i$ и из (24), (25) следует, что $\tau_1 \leq \infty, \ \ \tau_2 \leq \infty$, т.е. условия точности не дают ограничений на τ.

В адиабатическом течении внутренняя энергия и давление вдоль траектории частицы зависят только от V. Изменения P и E при изменении V определяется системой уравнений

$$\frac{dE}{dt} + P\frac{dV}{dt} = 0, \quad P = P(V, E), \tag{26}$$

где $V = \dfrac{1}{\rho}$. Первое из этих уравнений является следствием трех законов сохранения (1)–(3). Запишем его в виде

$$E^{n+1} = E^n - \int\limits_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E)dV. \tag{27}$$

Заменим интеграл интегральной суммой

$$E^{n+1} = E^n - \sum_{k=0}^{z} P_k(V_k, E_k)(V_{k+1} - V_k), \tag{28}$$

где число слагаемых z выбирается так, чтобы обеспечить нужную точность интегрирования вдоль изэнтропы. Значения V_{k+1}, E_{k+1} определяются из уравнений

$$V_{k+1} = V^n + \frac{k+1}{z+1}(V^{n+1} - V^n), \tag{29}$$

$$E_{k+1} = E_k - \frac{1}{z+1}P_k(V_k, E_k)(V^{n+1} - V^n), \tag{30}$$

а давление P_{k+1} — из уравнения состояния

$$P_{k+1} = P(V_{k+1}, E_{k+1}).$$

При использовании изложенной разностной схемы для расчета характеристик движения жидкости с ударными волнами шаг по времени τ выбирается лишь в интервалах сетки, где решение является S-волной:

$$\tau = \min\{\tau_i(S)\}, \tag{31}$$

здесь $\tau_i(S) = \dfrac{h_i}{a_i}$. При этом в некоторых интервалах сетки с R-волной может оказаться, что $\dfrac{\tau a_i}{h_i} > 1$. В этих интервалах вспомогательные значения U^*_i и $P^*_{i+0.5}$ выбираются с помощью уравнений (15), (16).

Достоинства изложенной РС проявляются особенно при расчете распространения ударной волны по веществу А, содержащему тонкий слой другого вещества Б. В явлении выделим три этапа.

1 этап. Ударная волна распространяется по веществу А и не дошла до прослойки Б. В этом случае шаг по времени выбирается из условий (31) в тех интервалах сетки,

где течение есть S-волна. В остальных интервалах сетки, где решение является R-волной, ограничение на шаг τ снимается применением изложенной выше схемы.

2 ЭТАП. Ударная волна проходит через вещество Б. Пусть для определенности шаг $h_Б$ пространственной сетки в этом тонком слое в k раз меньше $h_А$. Поскольку в интервалах сетки в веществе Б решение есть S-волна, то шаг по времени будет выбираться из условия

$$\tau \leq \frac{h_Б}{a_Б} = \frac{h_А}{k a_Б}.$$

Если $a_Б \approx a_А$, то при прохождении ударной волной тонкой прослойки Б общий шаг по времени уменьшится в k раз.

3 ЭТАП. Ударная волна ушла от прослойки Б. В этом случае шаг по времени выбирается, как на этапе 1, то есть снова возрастает в k раз.

Рассмотрим две задачи с тонкими прослойками.

ЗАДАЧА 1. Жесткость вещества Б (прослойка) выше, чем жесткость вещества А ($\rho_Б c_Б > \rho_А c_А$).

Расчеты проводились для системы $0 \leq x \leq 100$, причем в областях $0 \leq x < 50$; $\quad 50.1 < x \leq 100$ находится вещество А с параметрами $P_0 = 0,\ \rho_0 = 1,\ E_0 = 0,\ U_0 = 0$, а в области $50 \leq x \leq 50.1$ находится вещество Б с начальными параметрами $P_0 = 0,\ \rho_0 = 10,\ E_0 = 0$, $U_0 = 0$. Уравнения состояния были взяты в виде

$$\text{А:}\ \ P = (\gamma - 1)\rho E, \quad \gamma = 5/3;$$

$$\text{Б:}\ \ P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0k}^2(\rho - \rho_{0k}), \quad \rho_{0k} = 10, C_{0k} = 5, \gamma = 3.$$

В качестве краевого условия при $x = 0$ бралось $U = 0.5$.

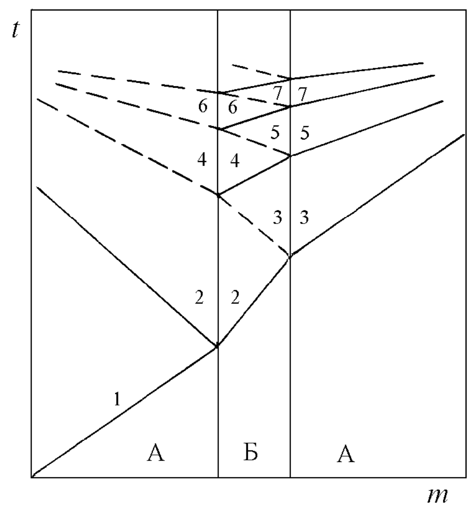

Рис. 1.

Таким образом, в точке $t = 0,\ x = 0$ имеется сильный разрыв — ударная волна с параметрами $P_1 = 0.333,\ U_1 = 0.5$. В момент прихода этой волны на прослойку образуются отраженная и прошедшая ударные волны. После выхода ударной волны на вторую границу прослойки происходит распад разрыва с образованием прямой ударной волны и отраженной волны разрежения. Амплитуда этой ударной волны меньше, чем амплитуда прошедшей ударной волны. Далее начинается взаимодействие волны разрежения с контактной границей и образование новых волн сжатия и разрежения. Вслед за прошедшей волной прослойка излучает волны сжатия и ударные волны, в противоположном направлении — волны разрежения. Вследствие этого амплитуда прошедшей ударной волны возрастает, а отраженной — уменьшается. Через некоторое время амплитуда прошедшей ударной волны становится равной амплитуде падающей волны: ударная волна “забывает"прослойку.

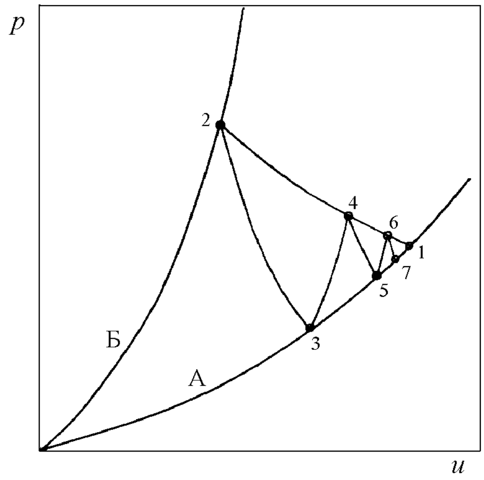

Рис. 2.

Результаты расчетов приведены на рис. 1, 2 и в табл. 1. На рис. 1 схематически изображена волновая картина в переменных m, t, а на рис. 2 — состояния в прослойке и на прошедшей и отраженной волнах в переменных P, U. Пунктиром (см. рис. 1) обозначены траектории волн разрежения.

Таблица 1

№пп.	x	P	U	$\varphi = \dfrac{x-50.1}{0.1}$	$\psi = \dfrac{P-P_1}{P_1}$
1	50.00	0.333	0.500	-1	0
2	50.10	1.807	0.036	0	4.426
3	50.41	0.249	0.433	3.1	-0.25
4	50.88	0.316	0.487	7.8	-0.05
5	51.40	0.332	0.500	13	-0.003
6	51.93	0.336	0.502	18.3	0.009
7	52.46	0.336	0.502	23.6	0.009
8	52.98	0.335	0.501	28.8	0.006
9	55.09	0.335	0.501	49.9	0.006
10	57.20	0.335	0.501	71	0.006
11	59.31	0.334	0.501	92.1	0.003
12	67.24	0.333	0.500	171.4	0

В таблице приведены зависимости давления и массовой скорости на фронте прошедшей ударной волны в зависимости от координаты фронта волны. Расчеты показывают, что на расстоянии порядка 15 толщин прослойки давление на прошедшей волне меньше, чем на падающей. Максимальное отклонение в этой области достигает 25 %. Затем давление становится больше. Область избыточного давления находится расстоянии примерно от 15 до 100 толщин прослойки. При $\varphi > 100$ амплитуда прошедшей ударной волны становится равна амплитуде падающей. Максимальное превышение давления на фронте прошедшей волны давлением на фронте падающей волны для данной пары веществ составило 1 %.

Задача решалась по РС 1 из работы [2], по изложенной выше РС и по схеме из [5] с выделением разрывов до выхода прошедшей ударной волны на правую границу системы с координатой $x = 100$. В изложенной выше схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в 17 раз меньше.

Задача 2. Жесткость вещества Б (прослойки) меньше, чем жесткость вещества А ($\rho_Б c_Б < \rho_А c_А$).

Расчеты проводились для системы $0 \le x \le 100$, однако в областях $0 \le x < 50$, $\quad 50.1 < x \le 100$ находилось вещество А с начальными параметрами $P_0 = 0,\ \rho_0 = 10,\ E_0 = 0,\ U_0 = 0$. В области $50 \le x \le 50.1$ находилось вещество Б с начальными параметрами $P_0 = 0,\ \rho_0 = 1,\ E_0 = 0,\ U_0 = 0$. Для вещества А было взято уравнение состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0k}^2(\rho - \rho_{0k}), \quad \text{где } \rho_{0k} = 10,\ C_{0k} = 5,\ \gamma = 3,$$

для вещества Б — уравнение состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho E, \quad \text{где} \quad \gamma = 5/3.$$

В качестве краевого условия при $x = 0$ было взято значение $U = 5$.

В точке $t = 0$, $\quad x = 0$ образуется ударная волна с параметрами $P = 603.5$, $U = 5.0$ В момент прихода этой ударной волны на прослойку образуются отраженная волна разрежения и прошедшая ударная волна. После ее выхода на вторую границу прослойки происхо-

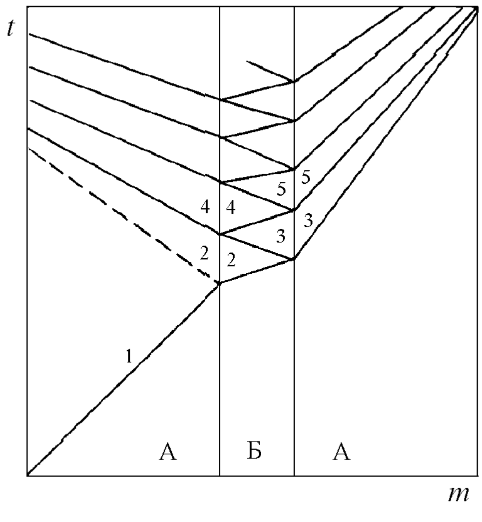

Рис. 3.

дит распад разрыва с образованием отраженной и прошедшей ударных волн. Отраженная волна порождает в прослойке сложную волновую картину. В обе стороны от прослойки распространяются ударные волны. Часть этих волн дополняет прошедшую ударную волну, вследствие чего ее амплитуда возрастает.

Результаты расчетов показаны на рис. 3, 4 и в табл. 2. На рис. 3 схематически изображена получаемая в задаче 2 волновая картина в переменных m, t, а на рис. 4 — состояния

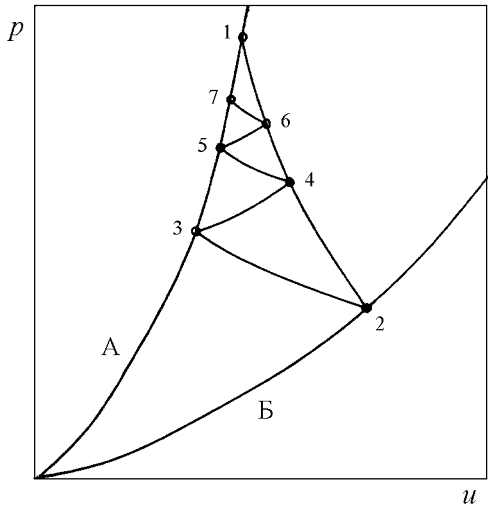

Рис. 4.

в прослойке и на прошедшей и отраженной волнах в переменных P, U.

Таблица 2

№пп.	x	P	U	$\varphi = \dfrac{x-50.1}{0.1}$	$\psi = \dfrac{P-P_1}{P_1}$
1	50.00	603.5	5.000	-1	0
2	50.10	104.6	8.860	0	-1.17
3	50.18	339.9	3.525	0.8	-0.44
4	50.21	554.1	4.754	1.1	-0.082
5	50.41	576.1	4.865	3.1	-0.045
6	50.71	713.1	5.508	6.1	0.18
7	51.00	669.9	5.313	9.0	0.11
8	51.33	637.3	5.161	12.3	0.056
9	51.91	605.1	5.007	18.1	0.0026
10	52.22	600.4	4.984	21.2	-0.0051
11	56.99	597.8	4.972	68.9	-0.0094
12	58.83	607.8	5.020	87.3	0.0071
13	60.36	605.7	5.010	102.6	0.0036
14	69.51	604.4	5.004	194.1	0.0015

В табл. 2 приведены изменения давления P, массовой скорости U на фронте прошедшей ударной волны в зависимости от координаты фронта и относительное отличие в давлении в зависимости от расстояния, выраженного в толщинах прослойки.

Расчеты показывают, что в веществе А за прослойкой есть область, где давление на фронте прошедшей ударной волны ниже, чем на фронте падающей (около пяти толщин прослойки), и это различие достигает 44 %. Затем следует область шириной примерно 15 толщин прослойки, где давление на фронте ударной волны выше, чем на фронте падающей. Это превышение достигает 18 %. Далее вплоть до 200 толщин прослойки имеется область отрицательного и положительного отклонения от амплитуды падающей волны, где отличия не превышают 1 %.

Задача решалась по РС 1 из [2] и по изложенной выше схеме до выхода ударной волны на правую границу системы с координатой $x = 100$. В этой схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в ~ 50 раз меньше.

Возможности изложенной РС проверялись также при расчете волны разрежения в задаче с начальными данными $0 \le x \le 1,\ P_0 = 2, \rho_0 = 1.5,\ E_0 = 0.666,\ U_0 = 0$ при $t = 0$, краевыми условиями $U(0,t) = 0,\ U(1,t) = 1$ и уравнением состояния $P = (\gamma - 1)\rho E$ с $\gamma = 3$.

На рис. 5. приводятся профили давления P и скорости U на один из моментов времени (——— — точное решение, ○ — результаты расчетов с $\tau a/h = 2$ при $h = 0.02$).

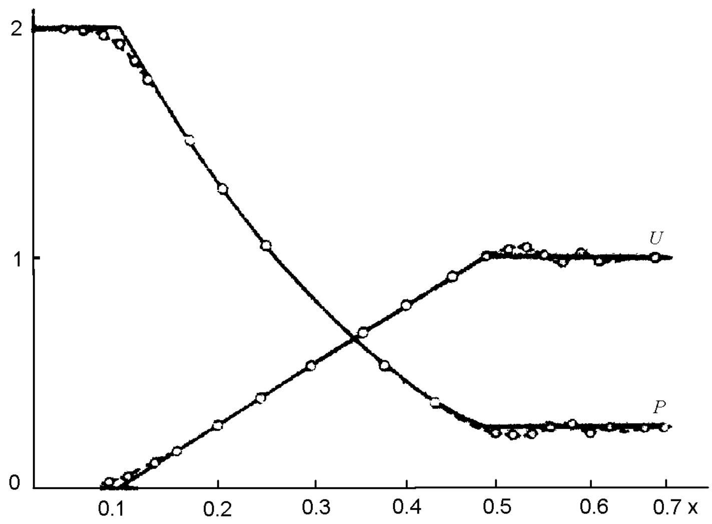

Рис. 5.

Устойчивость этой системы проверялась методом гармоник в акустическом случае и с помощью расчетов в нелинейном случае. Рассчитывалось распространение малых возмущений в покоящейся среде с параметрами: $U_0 = 0,\ \rho_0 = 1,\ P_0 = 1,\ E_0 = 0.5,\ P = (\gamma - 1)\rho E, \gamma = 3, 0 \le m \le 1$. В трех точках $(m = 0.25,\ 0.5,\ 0.75)$ значения E_0 и P_0 отличались от указанных на 1 %. Счет велся с $\dfrac{\tau a}{h} = 10$, при $h = 0.02$. Через 20 шагов по времени возмущения “размазались"и амплитуда возмущений уменьшилась до 0.4 %.

Список литературы

[1] Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач.* Мир, М., 1972.

[2] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений.* Наука, М., 1978.

[3] Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики. *Труды МИ АН СССР им. В.А. Стеклова*, **74**, ч. 1, 1966.

[4] Гаджиева В. В., Куропатенко В. Ф. О некоторых явных разностных схемах для уравнений гидродинамики. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **11**, №6, 1971, 1603.

[5] Куропатенко В. Ф., Еськова Т. Е., Коваленко Г. В., Кузнецова В. И., Михайлова Г. И., Потапкин Б. К., Сапожникова Г. Н. Комплекс программ “Волна"и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. *Вопросы атомной науки и техники, Сер. Математическое моделирование физических процессов*, вып. 2, 1989, 9–25.

Поступила в редакцию 8 августа 1996 г.