О ПРОБЛЕМЕ РЕАЛИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. Г. Пушков, С. Ю. Кривошапко
Бийский технологический институт
Алтайского государственного технического университета, Россия
e-mail:psg@bti.secna.ru

A problem of realization in state space for interval discrete-time dynamic systems is considered. Possible formulations of this problem and the ways of its solution are analyzed. The sufficient criterion of algebraic realizability for impulse sequence of interval matrices is formulated and proved. A method for obtaining algebraic realizations of either totally non-negative or totally non-positive systems is sugested. One numerical example illustrating the method is presented.

Введение

Модели, заданные в пространстве состояний, играют чрезвычайно важную роль во многих областях применения. Модели такого рода являются естественной формой представления для динамических систем теории управления, в особенности теории автоматического управления. Однако метод пространства состояний оказывается применимым и во многих других случаях. Предметом рассмотрения в данной работе является проблема построения модели в пространстве состояний на основе данных о поведении вход-выход линейной стационарной динамической системы с дискретным временем. В теории систем эта проблема известна как задача реализации.

Для класса линейных стационарных динамических систем с дискретным временем задача построения конечномерной реализации успешно решается в рамках алгебраического подхода к проблеме [1]. Однако при исследовании систем, подверженных различным искажениям, а также систем, функционирующих в условиях неопределенности, приходится привлекать дополнительный математический аппарат. Чаще всего этим аппаратом являются методы математической статистики. В последнее время для анализа систем с неопределенностями и неоднозначностями в данных все чаще используются новые подходы, например, такие, как теория нечетких множеств и интервальный анализ.

Стандартным методологическим приемом исследования объектов, функционирующих в условиях неопределенности, является рассмотрение семейства объектов, которое определяется принадлежностью параметров этого объекта некоторым множествам. В случае, когда эти множества — интервалы, мы будем иметь дело с интервальной неопределенностью.

В настоящее время интервальные методы используются как для анализа статических систем (см., например, [2]), так и для решения проблем управления динамическими системами (см., например, [3–5]). Многие задачи математической теории управления допускают естественную “интервализацию” путем замены вещественных параметров и/или переменных на соответствующие интервальные. Большинство этих интервализованных задач оказываются вполне адекватными и интерпретируемыми с точки зрения практических приложений. Не является исключением и рассматриваемая в данной работе проблема реализации.

Далее в данной работе мы будем придерживаться следующих обозначений:

$a, b, \ldots, A, B, \ldots$ — векторы и матрицы с вещественными значениями;

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ — интервалы и векторы с интервальными элементами;

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ — матрицы с интервальными элементами;

$\underline{a}, \overline{a}$ — нижняя и верхняя границы интервала $\mathbf{a}$ соответственно, т.е. $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$;

$\mathbb{Z}$ — множество (кольцо) всех целых чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел;

$\mathbb{IR}$ — классическая интервальная арифметика;

$\mathbb{KR}$ — полная интервальная арифметика (арифметика Каухера);

$W^{\mathbb{Z}_+}$ — множество всех бесконечных последовательностей элементов из W (отображений из $\mathbb{Z}_+$ в W).

1. Классическая проблема реализации

Классическая проблема реализации состоит в определении модели в пространстве состояний для динамической системы, заданной своим поведением вход-выход. Поведение вход-выход линейной стационарной многомерной управляемой системы может быть охарактеризовано импульсной последовательностью матриц размера $p \times m$ (m — число входов, p — число выходов системы):

$$\{A_1, A_2, \ldots\}. \tag{1}$$

В этом случае для заданной последовательности векторов управлений (входной последовательности) $u(0), u(1), \ldots \in U$ выходная последовательность векторов $y(0), y(1), \ldots \in Y$ определяется соотношениями

$$y(t) = \sum_{i=1}^{t} A_i u(t-i), \quad t = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, поведение вход-выход определяет некоторое отображение, которое мы будем называть отображением вход-выход:

$$f\colon U^{\mathbb{Z}_+} \to Y^{\mathbb{Z}_+}.$$

Задача реализации для данного класса систем состоит в определении математической модели этой системы в пространстве состояний, которая описывается разностными уравнениями

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),$$

$$y(t) = Hx(t), \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где $x(t)$ и $x(t+1)$ — векторы состояний в моменты времени t и $t+1$ соответственно. Определению подлежат матрицы F, G и H вместе с их размерностями. Хорошо известно [1], что задача реализации в этом случае сводится к нахождению тройки матриц (F, G, H), таких, что

$$A_i = HF^{i-1}G, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Известно также, что для систем над полями (и даже над коммутативными кольцами) реализуемость последовательности (1) эквивалентна ее рекуррентности [6]. Это означает, что если для последовательности (1) существует конечномерная реализация, то найдутся целое $r > 0$ и коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ из поля (или кольца), над которым определена система, такие, что

$$A_{r+j+1} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i A_{i+j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Существует достаточное количество эффективных вычислительных процедур для построения конечномерных реализаций в случае систем над полями [7, 8], в частности над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Данная проблема может быть обобщена также на случай систем над кольцами [6] и даже для систем с "шумом". В последнем случае речь идет о так называемой проблеме приближенной реализации [9].

2. Интервальные динамические системы

Математическая модель многомерного интервально заданного объекта управления обычно представляется в виде системы уравнений с интервальными параметрами и понимается как семейство математических моделей многомерных динамических объектов, параметры которых принадлежат заданным интервальным. Следуя этому подходу, введем следующее определение.

Определение 1. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем (с m входами, n состояниями и p выходами) с интервальными параметрами будем называть такую систему* $[\Sigma] = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, *динамическое поведение которой описывается уравнениями*

$$x(t+1) = \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t), \quad y(t) = \mathbf{H}x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t), x(t+1) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, *и понимать как семейство математических моделей*

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

матрицы (F, G, H) *которых принадлежат заданным интервальным матрицам* $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, *т.е.* $F \in \mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $G \in \mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}$, $H \in \mathbf{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}$.

Следует заметить, что данный подход к определению интервально заданной линейной системы не является единственно возможным, не исчерпывает всего многообразия поведения объектов с интервальной неопределенностью и поэтому не может служить в качестве общего определения линейной системы с интервальной неопределенностью. Условно называя определенный выше тип динамической системы линейной стационарной динамической системой с дискретным временем с *интервальными параметрами*, мы далее приведем определения еще двух типов линейных динамических систем с интервальной неопределенностью.

Определение 2. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем с интервальными состояниями, входами и выходами будем называть такую систему* $\mathbf{\Sigma} = (F, G, H)$, *динамическое поведение которой описывается уравнениями*

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = H\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{IR}^n, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+1) \in \bar{X} \cong \mathbb{IR}^n, \mathbf{u}(t) \in \bar{U} \cong \mathbb{IR}^m, \quad \mathbf{y}(t) \in \bar{Y} \cong \mathbb{IR}^p,$$

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n}, G \in \mathbb{R}^{n\times m}, H \in \mathbb{R}^{p\times n}.$$

К анализу систем такого типа не применимы методы классической реализации, поскольку $\bar{X}$, $\bar{U}$ и $\bar{Y}$ мы не можем рассматривать как $\mathbb{R}$-модули.

Определение 3. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем с интервальными состояниями, входами и выходами и интервальными параметрами будем называть такую систему* $[\mathbf{\Sigma}] = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, *динамическое поведение которой описывается уравнениями*

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{IR}^n, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+1) \in \bar{X} \cong \mathbb{IR}^n, \mathbf{u}(t) \in \bar{U} \cong \mathbb{IR}^m, \quad \mathbf{y}(t) \in \bar{Y} \cong \mathbb{IR}^p,$$

$$\mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}, \mathbf{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}.$$

Представленные типы интервальных динамических систем являются примерами обобщения обычных линейных стационарных динамических систем с дискретным временем. Эти типы далеко не исчерпывают ни всех возможных типов обобщений, ни видов интервальной неопределенности. Например, имеет право на существование множество типов интервальных динамических систем с интервальной неопределенностью поведения, когда равенства в (2)–(4) заменяются на включения. Можно рассматривать промежуточные типы интервальных динамических систем.

3. Проблема реализации для интервальных систем

С интервальными динамическими системами первого и третьего перечисленных выше типов можно связать импульсную последовательность матриц

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\},$$

где

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{H}\mathbf{F}^{i-1}\mathbf{G}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Здесь матричные произведения выполняются справа налево, т.е. сначала вычисляется произведение $\mathbf{FG}$, затем $\mathbf{F}(\mathbf{FG})$ и т.д. Этой последовательности матриц можно поставить в соответствие отображение вход-выход, под которым в зависимости от того, с системой какого типа мы имеем дело, можно понимать в общем случае разные объекты.

Для системы с интервальными параметрами, введенной определением 1, под отображением вход-выход следует понимать семейство отображений $f_\alpha : U^{\mathbb{Z}_+} \to Y^{\mathbb{Z}_+}$, порождаемых соотношениями

$$y(t) = \sum_{i=1}^{t} A_i^\alpha u(t-i), \quad t = 1, 2, \ldots,$$

для

$$A_i^\alpha \in \mathbf{A}_i \in \mathbb{IR}^{p\times m}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Для системы с интервальными состояниями, входами и выходами и интервальными параметрами, введенной определением 3, под отображением вход-выход целесообразно понимать отображение $f : \bar{U}^{\mathbb{Z}_+} \to \bar{Y}^{\mathbb{Z}_+}$, порождаемое интервальными соотношениями

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{A}_i \mathbf{u}(t-i), \quad t = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Для заданного отображения вход-выход интервальной системы, представленного импульсной последовательностью интервальных матриц, можно поставить задачу построения динамического поведения (2) (или (4)), т.е. задачу реализации. Одной из возможных формулировок задачи реализации для интервальных систем может быть такая:

для заданной последовательности интервальных матриц размера $p \times m$

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\}, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{IR}^{p\times m}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

определить размерность n *и тройку интервальных матриц* $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ *таких, что выполняются интервальные уравнения (5), где* $\mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}, \mathbf{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}$.

Данную задачу мы далее будем называть *задачей алгебраической реализации*, а тройку интервальных матриц $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ будем называть *алгебраической интервальной реализацией*. Поставленная задача, которая по своей сути является задачей *точной* реализации, в общем случае — трудно разрешимая. Более того, в силу "плохих" свойств интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ она вообще может не иметь решения. Проблема остается таковой и в случае рассмотрения систем над $\mathbb{KR}$ вместо $\mathbb{IR}$. Поэтому в данном случае становится актуальной проблема оценки или *приближенного* описания реализаций.

Если для заданной последовательности интервальных матриц (7) мы будем понимать уравнение (5) как семейство уравнений относительно троек матриц (F, G, H) над $\mathbb{R}$, таких, что

$$A_i = HF^{i-1}G, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

для $A_i \in \mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то можно поставить целый ряд задач описания множества реализаций. Среди этих задач выделим следующие:

1) определение мощности множества алгебраических реализаций (сколько их с точностью до изоморфизма);

2) определение алгебраических реализаций минимальной размерности;

3) для подходящего n (которое также нужно определить) определение внешней оценки для (F, G, H), т.е. определение интервальных матриц $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, содержащих все матрицы F, G, H, удовлетворяющие (8) (при определенном значении n);

4) для подходящего n (которое также нужно определить) определение внутренней оценки, т.е. определение таких интервальных матриц $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, точечные значения $F \in \mathbf{F}$, $G \in \mathbf{G}$, $H \in \mathbf{H}$ которых удовлетворяют уравнениям (8) при $A_i \in \mathbf{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots$

5) описание структуры множества конечномерных реализаций (или хотя бы найти способ такого описания).

Очевидно, решение поставленных задач неединственно даже для фиксированной размерности системы. Наибольший интерес представляют в определенном смысле оптимальные оценки. Очевидным критерием качества интервальных решений в задачах оценивания является степень близости (в том или ином смысле) полученной интервальной оценки к точному множеству решений. Для задач внешнего оценивания такая оптимальность обычно понимается в смысле минимальности по включению, а для задач внутреннего оценивания — максимальности по включению. Причем нужно быть готовыми к ситуации, что даже такие оптимальные оценки окажутся неединственными.

Положение еще более усложняется, если ставится задача нахождения реализации минимальной размерности. Здесь мы имеем дело с ситуацией, когда минимизация размерности реализации находится в противоречии с оптимизацией оценок реализации. В связи с этим имеет право на существование целый ряд постановок задач приближенной реализации, являющихся способом разрешения этого противоречия или компромиссного решения.

Далее в данной работе основное внимание будет сосредоточено на проблеме алгебраической реализации.

4. Достаточное условие алгебраической реализуемости

Как мы видели в разд. 1, для классического (неинтервального) случая рекуррентность заданной импульсной последовательности матриц является необходимым и достаточным условием ее реализуемости. Для интервальных систем рекуррентность остается достаточным условием реализуемости.

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность интервальных матриц (7) интервально рекуррентна, если существуют такое целое $r > 0$ и коэффициенты $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r \in \mathbb{IR}$ такие, что*

$$\mathbf{A}_{r+j+1} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{b}_i \mathbf{A}_{i+j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Для интервальных динамических систем, поведение вход-выход которых описывается импульсной последовательностью интервальных матриц, имеет место следующий результат.

Предложение 1. *Если последовательность интервальных матриц интервально-рекуррентна, то для нее существует алгебраическая интервальная реализация.*

Доказательство. Пусть исходная последовательность интервальных матриц (7) интервально-рекуррентна с соотношением рекуррентности (9). Рассмотрим интервальную систему $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, у которой

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \ldots & \mathbf{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{I} \\ \mathbf{b}_1\mathbf{I} & \mathbf{b}_2\mathbf{I} & \mathbf{b}_3\mathbf{I} & \ldots & \mathbf{b}_r\mathbf{I} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{A}_{r-1} \\ \mathbf{A}_r \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ — нулевая интервальная матрица размера $p \times p$, т.е. матрица, все элементы которой имеют вид $[0,0]$; $\mathbf{I}$ — единичная интервальная матрица размера $p \times p$, т.е. матрица, на главной диагонали которой стоят элементы $[1,1]$, а остальные имеют вид $[0,0]$; $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$ — интервальные коэффициенты рекуррентности из соотношения (9). Легко проверить, что полученная таким образом система является реализацией исходной последовательности матриц. □

5. Граничные реализации

Рассмотрим проблему вычисления точной конечномерной реализации для интервальной последовательности матриц (7). В некоторых частных случаях эта проблема может быть успешно решена. В частности, для полностью неотрицательных интервальных систем можно легко получить одно из возможных решений.

С импульсной последовательностью интервальных матриц можно связать две обычные (вещественные) импульсные последовательности, определяемые верхними и нижними границами интервальных матриц.

Определение 5. *Для последовательности интервальных матриц*

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\} = \{[\underline{A}_1, \overline{A}_1], [\underline{A}_2, \overline{A}_2], \ldots\} \tag{10}$$

реализации последовательности

$$\{\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots\} \tag{11}$$

будем называть нижними граничными реализациями последовательности (10), а реализации последовательности

$$\{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots\} \tag{12}$$

будем называть верхними граничными реализациями последовательности (10).

Как уже отмечалось ранее, в рамках интервальной арифметики (как классической, так и полной) не выполняется закон дистрибутивности операций сложения и умножения интервалов. Однако этот закон имеет место, когда мы имеем дело с неотрицательными интервалами, т.е. интервалами, обе границы которых неотрицательны. Это позволяет нам сформулировать и доказать следующий результат, касающийся граничных реализаций.

Предложение 2. *Если для нижней и верхней граничных реализаций одинаковой размерности* $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ *и* $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ *некоторой последовательности интервальных матриц выполняются условия:*

1) $\underline{F}, \underline{G}, \underline{H}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}$ *— неотрицательные;*

2) $\underline{F} \leq \overline{F}, \underline{G} \leq \overline{G}, \underline{H} \leq \overline{H}$,

то интервальная система $([\underline{F}, \overline{F}], [\underline{G}, \overline{G}], [\underline{H}, \overline{H}])$ *является интервальной точной (алгебраической) реализацией этой последовательности.*

Доказательство. Легко заметить, что для неотрицательных интервальных матриц (т.е. матриц, все элементы которых являются неотрицательными интервалами) результат произведения двух неотрицательных матриц будет также неотрицательной матрицей. Для неотрицательных интервальных матриц $\mathbf{B} = [\underline{B}, \overline{B}]$ и $\mathbf{C} = [\underline{C}, \overline{C}]$ имеет место

$$\mathbf{BC} = [\underline{B}, \overline{B}][\underline{C}, \overline{C}] = [\underline{BC}, \overline{BC}].$$

Кроме того, из-за дистрибутивности операций сложения и умножения неотрицательных интервалов выполняется закон ассоциативности для умножения неотрицательных интервальных матриц.

Пусть $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ и $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ — две граничные реализации одинаковой размерности для последовательности интервальных матриц (10). А именно, $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ — реализация последовательности (11), $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ — реализация последовательности (12). Тогда, используя перечисленные выше свойства операции умножения неотрицательных интервальных матриц, получаем

$$[\underline{H}, \overline{H}][\underline{G}, \overline{G}] = [\underline{HG}, \overline{HG}] = [\underline{A}_1, \overline{A}_1] = \mathbf{A}_1,$$

$$[\underline{H}, \overline{H}][\underline{F}, \overline{F}][\underline{G}, \overline{G}] = [\underline{HFG}, \overline{HFG}] = [\underline{A}_2, \overline{A}_2] = \mathbf{A}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$[\underline{H}, \overline{H}][\underline{F}, \overline{F}]^{i-1}[\underline{G}, \overline{G}] = [\underline{HF}^{i-1}\underline{G}, \overline{HF}^{i-1}\overline{G}] = [\underline{A}_i, \overline{A}_i] = \mathbf{A}_i,$$

и т.д. Следовательно, интервальная система $([\underline{F}, \overline{F}], [\underline{G}, \overline{G}], [\underline{H}, \overline{H}])$ является реализацией последовательности (10), что и требовалось доказать. □

Однако очень часто оказывается, что найденные граничные реализации не удовлетворяют условиям предложения 2. Но и в этих случаях ситуация не является безнадежной. Дело в том, что подходящим выбором базисов пространств состояний граничных реализаций часто можно добиться того, чтобы граничные реализации удовлетворяли условиям предложения 2. Легко доказывается следующее утверждение, являющееся следствием предложения 2.

Предложение 3. *Если для граничных реализаций одинаковой размерности* $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ *и* $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ *некоторой последовательности интервальных матриц найдутся такие матрицы* T_1 *и* T_2*, что выполняются неравенства*

$$\hat{\underline{F}} \le \hat{\overline{F}}, \hat{\underline{G}} \le \hat{\overline{G}}, \hat{\underline{H}} \le \hat{\overline{H}},$$

где

$$\hat{\underline{F}} = T_1 \underline{F} T_1^{-1}, \hat{\underline{G}} = T_1 \underline{G}, \hat{\underline{H}} = \underline{H} T_1^{-1}, \tag{13}$$

$$\hat{\overline{F}} = T_2 \overline{F} T_2^{-1}, \hat{\overline{G}} = T_2 \overline{G}, \hat{\overline{H}} = \overline{H} T_2^{-1}, \tag{14}$$

$\hat{\underline{F}}, \hat{\underline{G}}, \hat{\underline{H}}, \hat{\overline{F}}, \hat{\overline{G}}, \hat{\overline{H}}$ — *неотрицательные, то интервальная система* $([\hat{\underline{F}}, \hat{\overline{F}}], [\hat{\underline{G}}, \hat{\overline{G}}], [\hat{\underline{H}}, \hat{\overline{H}}])$ *является интервальной алгебраической реализацией этой последовательности.*

Таким образом, предложение 3 переводит проблему вычисления интервальной алгебраической реализации в задачу линейной матричной алгебры. С использованием предложений 2 и 3 можно строить конечномерные реализации интервальных импульсных последовательностей во многих частных случаях. Алгоритм действий здесь следующий. Сначала ищутся граничные реализации одинаковой размерности. Если они удовлетворяют условиям предложения 2, то соответствующая интервальная реализация будет искомой реализацией заданной импульсной последовательности. В противном случае с помощью преобразований подобия (13), (14) нужно попытаться найти эквивалентные (с точностью до изоморфизма) граничные реализации, для которых условия предложения 2 выполняются. Во многих случаях такими реализациями являются системы в наблюдаемой или управляемой канонической форме.

П р и м е р. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1 = [0, 0.1], \quad \mathbf{A}_2 = [0.81, 1.22], \mathbf{A}_3 = [0.729, 1.574], \quad \mathbf{A}_4 = [1.3122, 3.2308]. \tag{15}$$

Граничные реализации, вычисленные с помощью метода, представленного в [10], имеют вид

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 0.81 & 0 \end{pmatrix}, \underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.81 \end{pmatrix}, \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 12.2 & 1 \\ -133.1 & -11 \end{pmatrix}, \overline{G} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эта пара не удовлетворяет условиям предложения 2. Применив к этим реализациям преобразования подобия

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12.2 & 1 \end{pmatrix},$$

мы получаем другую, эквивалентную исходной, пару реализаций в наблюдаемой канонической форме:

$$\hat{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.81 & 0.9 \end{pmatrix}, \hat{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.81 \end{pmatrix}, \hat{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.1 & 1.2 \end{pmatrix}, \hat{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.22 \end{pmatrix}, \hat{\overline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что интервальная система, составленная на основе этих граничных реализаций, т.е. система с матрицами

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.81,1.1] & [0.9,1.2] \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} [0,0.1] \\ [0.81,1.22] \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \end{pmatrix},$$

является интервальной реализацией интервальной последовательности (15).

Следует заметить, что граничные реализации последовательности (15), полученные с помощью методов, представленных работах [7, 8], сразу удовлетворяют условиям предложения 2.

Данный подход к вычислению алгебраических реализаций можно применять также для импульсных последовательностей полностью неположительных матриц. Действительно, легко показать, что если $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ — интервальная алгебраическая реализация, полученная на основе граничных реализаций для последовательности (10), то для последовательности

$$\{[-\overline{A}_1, -\underline{A}_1], [-\overline{A}_2, -\underline{A}_2], \ldots\}$$

реализациями будут системы $(\mathbf{F}, -\mathbf{G}, \mathbf{H})$ и $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, -\mathbf{H})$.

Хотя метод граничных реализаций является обоснованным для полностью неотрицательных и полностью неположительных систем, работа с многочисленными системами показала, что он оказывается применимым и для других классов систем. Однако пока не удалось очертить достаточно точные границы применимости этого метода.

6. Заключительные замечания

Последовательное изложение теории и методов реализации интервальных систем потребует развития методов интервальной алгебры. Потребуются пересмотр и переопределение таких привычных понятий линейной алгебры, как невырожденная матрица, ранг матрицы и т.п. Без решения этих вопросов не удастся получить не только эффективные методы реализации, но и решить вопрос реализуемости заданной импульсной последовательности интервальных матриц. По-видимому, наибольшего прогресса можно достигнуть путем рассмотрения их в $\mathbb{KR}$ и погружения в линейное пространство [11]. Для погружений множеств входных сигналов, состояний и выходных сигналов интервальной системы в линейные пространства удвоенной размерности имеет место следующая коммутативная диаграмма множеств и отображений:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{KR}^m & \underset{\mathbf{G}}{\longrightarrow} & \mathbb{KR}^n & \underset{\mathbf{F}}{\longrightarrow} & \mathbb{KR}^n & \underset{\mathbf{H}}{\longrightarrow} & \mathbb{KR}^p \\
\Omega \downarrow\uparrow \Omega^{-1} & & \Pi \downarrow\uparrow \Pi^{-1} & & \Pi \downarrow\uparrow \Pi^{-1} & & \Gamma \downarrow\uparrow \Gamma^{-1} \\
\mathbb{R}^{2m} & \underset{\hat{G}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{2n} & \underset{\hat{F}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{2n} & \underset{\hat{H}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{2p} \\
\updownarrow id & & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi & & \updownarrow id \\
\mathbb{R}^{2m} & \underset{\tilde{G}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{2n} & \underset{\tilde{F}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{2n} & \underset{\tilde{H}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{2p}
\end{array}
$$

В общем случае индуцированные погружениями отображения $\hat{F}$, $\hat{G}$ и $\hat{H}$, соответствующие $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$, являются нелинейными. Однако в ряде частных случаев можно добиться того, чтобы они были линейными. Матрицы $\hat{F}$, $\hat{G}$ и $\hat{H}$ должны иметь специальный вид. Этого можно добиться с помощью преобразования подобия φ для реализации $(\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H})$, полученной в линейном пространстве.

Список литературы

[1] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

[2] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61.

[3] Смагина Е.М., Моисеев А.Н. Слежение за полиномиальным сигналом в интервальной динамической системе // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 1. С. 67–74.

[4] Ивлев Р.С., Соколова С.П. Построение векторного управления многомерным интервально заданным объектом // Там же. 1999. Т. 4, № 4. С. 3–13.

[5] Богомолов А.С., Сперанский Д.В. Об одной разновидности задачи стабилизации линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 111–124.

[6] Sontag E.D. Linear systems over commutative rings: A survey // Ricerche di Automatica. 1976. Vol. 7. P. 1–34.

[7] Пушков С.Г. Об алгоритме конечномерной реализации // Автоматика и телемеханика. 1991. № 10. С. 56–63.

[8] Пушков С.Г. Конечномерные реализации импульсной характеристики, основанные на псевдообращении ганкелевой матрицы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 3. С. 5–11.

[9] Пушков С.Г. Об одном подходе к описанию наблюдаемого процесса линейной динамической системой // Там же. 2001. № 1. С. 39–44.

[10] Пушков С.Г. О вычислении конечномерной реализации // Кибернетика и системный анализ. 1991. № 6. С. 107–112.

[11] Шарый С.П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 67–114.

Поступила в редакцию 15 августа 2003 г.,
в переработанном виде — 25 ноября 2003 г.