

МЕТОД СЕЛЕКТИВНОГО ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА, КОМПАКТНОГО В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. В. НИКИФОРОВ, В. И. ТАРАКАНОВ

Сургутский государственный университет, Россия

e-mail: igoni@stsland.ru

A method of selective numerical analysis of spectrum of compact in Hilbert space operator, is considered in the case, when the eigenvalues, which are the nearest to some given number, are being found. Vibration eigenfrequencies of the rope, which is loaded by the various longitudinal forces, are obtained using the suggested method.

Введение

Рассматривается процедура селективного численного анализа спектра оператора, компактного в гильбертовом пространстве, когда ищется собственное число, ближайшее к некоторому заданному числу.

Пусть дан компактный в гильбертовом пространстве H оператор $A : H \rightarrow D \subset E \subset H$.

Предполагается, что оператор A симметричен на некотором множестве $E \subset H$ и его ядерное пространство на этом множестве нулевое

$$(u, Av) = (v, Au) \quad \forall u, v \in E, \quad \text{Ker } A = 0. \quad (0.1)$$

Кроме того, предполагается, что оператор A знакопостоянен, причем, не теряя общности, можно считать его положительным

$$(u, Au) > 0 \quad \forall u \in E. \quad (0.2)$$

Спектральные свойства такого оператора известны, в частном случае $E = H$ они получены еще в классических трудах Гильберта, Шмидта [1] и излагаются в [2–4]. Для случая, когда $E \subset H$ не совпадает с H , соответствующие результаты приведены в [5].

Под селективным анализом спектра такого оператора понимается следующая задача. Требуется найти значение спектрального параметра λ_m спектрального уравнения

$$\lambda_k y_k = A y_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (0.3)$$

которое находится на ближайшем расстоянии от некоторого заданного числа $\alpha \in (0, \infty)$, т. е. найти λ_m по условию

$$|\alpha - \lambda_m| = \min_{k \in N} |\alpha - \lambda_k|. \quad (0.4)$$

Следует заметить, что задачу (0.4) формально можно решать перебором, начиная с максимального собственного числа λ_1 , по порядку уменьшения собственных чисел, пока не получится собственное число λ_m . Такая процедура возможна на основе использования вариационного принципа Рэлея для собственных чисел [6, 7] либо на основе использования итерационных методов [3, 5]. Однако такой способ достаточно громоздкий в реализации и, кроме того, связан с накоплением численных ошибок, что приводит к его низкой эффективности, если $m \gg 1$.

Поэтому понятие селективного анализа можно уточнить следующим образом. Это решение задачи (0.4) сразу без перебора собственных чисел, начиная с максимального.

Необходимо отметить, что задача (0.4) отличается от задачи нахождения собственного числа λ_n оператора A с заданным номером n , которая решается на основе минимаксного принципа Куранта [6, 7].

Проблема селективного анализа спектра имеет много приложений, в качестве которых можно привести три задачи.

Задача 1. Определить резонанс механической или физической системы под действием внешней периодической нагрузки с заданной частотой Ω . Для исследования резонанса необходимо найти частоту собственных колебаний системы ω_m , находящуюся на ближайшем расстоянии от заданной частоты Ω .

Задача 2. Дан линейный, компактный, симметричный, положительный оператор A в гильбертовом пространстве, нелинейно зависящий от некоторого параметра σ . Требуется найти значение этого параметра σ из спектрального уравнения

$$y = A(\sigma)y. \quad (0.5)$$

Уравнению (0.5) сопоставляется спектральное уравнение

$$\lambda(\sigma)y = A(\sigma)y. \quad (0.6)$$

Уравнение (0.6) эквивалентно уравнению (0.5), когда $\lambda(\sigma) = 1$, именно эти значения параметра σ будут спектральными параметрами уравнения (0.5).

Задача (0.6) для фиксированного σ решается как задача селективного анализа собственных чисел оператора A , т.е. нахождения собственного числа $\lambda_m(\sigma)$, ближайшего к единице. При решении этой задачи последовательно для разных значений σ находится зависимость $\lambda_m = \lambda_m(\sigma)$, из которой определяются те значения σ , для которых $\lambda_m(\sigma) = 1$.

Задача 3. Рассматривается операторное уравнение

$$y = Ay + f, \quad f \in H, \quad (0.7)$$

где A — компактный, симметричный, положительный оператор в гильбертовом пространстве H .

Вопрос о существовании решения уравнения (0.7) связан с необходимостью нахождения собственного числа λ_m оператора A , ближайшего к единице. Если $\lambda_m \neq 1$, уравнение (0.7) всегда разрешимо при любом элементе f . Если $\lambda_m = 1$, то для разрешимости уравнения (0.7) необходимо выполнение условия $(f, y_m) = 0$.

В практических задачах α задается с некоторой погрешностью, поэтому задача (0.4) рассматривается с позиции строгой математической постановки в дополнительном предположении

$$\alpha \neq \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_{k+1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (0.8)$$

которое при численном решении не является обременительным. Задание α , точно удовлетворяющее условию $\alpha = 1/2(\lambda_k + \lambda_{k+1})$ для некоторого k , маловероятно, а чтобы уменьшить эту вероятность, расчеты можно дублировать, задавая достаточно близкое к α значение α_1 .

1. Схема селективного анализа

Селективный анализ спектральных параметров оператора проводится в два этапа. На первом этапе ищется максимальное собственное число λ_1 на основе итерационной схемы [5]

$$\tau_{k+1}z_{k+1} = Az_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad z_1 = Ah, \quad (1.1)$$

$$\tau_{k+1} = \|Az_k\|/\|z_k\|,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{k+1} = \lambda_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \varphi_1, \quad \lambda_1 \varphi_1 = A\varphi_1,$$

где элемент $h \in H$ задается произвольно с дополнительным условием $\|Ah\| \neq 0$, $(\varphi_1, Ah) \neq 0$.

Если заданное число α в селективном анализе удовлетворяет неравенству $\alpha > \lambda_1$, то, очевидно, выполняется условие

$$\lambda_m = \lambda_1. \quad (1.2)$$

Если выполняется неравенство

$$0 < \alpha < \lambda_1, \quad (1.3)$$

то используется итерационная схема

$$\tau_{k+1}z_{k+1} = Gz_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad (1.4)$$

$$z_1 = Ah, \quad h \in H, \quad \|GAh\| \neq 0, \quad (\varphi_m, Ah) \neq 0; \quad (1.5)$$

$$G = \lambda_1^2 I - (\alpha I - A)^2 \equiv (\lambda_1^2 - \alpha^2) I + 2\alpha A - A^2; \quad (1.6)$$

$$\tau_{k+1} = \|Gz_k\|/\|z_k\|, \quad (1.7)$$

где I — единичный оператор, $h \in H$ задается произвольно.

Условия $(\varphi_1, Ah) \neq 0$, $(\varphi_m, Ah) \neq 0$ априори проверить нельзя, однако при численных расчетах это не создает какую-то серьезную проблему, так как при произвольном задании h точное выполнение условий $(\varphi_1, Ah) = 0$, $(\varphi_m, Ah) = 0$ маловероятно, а чтобы уменьшить эту вероятность, расчеты можно дублировать, задавая другое выражение h . В приведенных здесь численных расчетах именно такое дублирование и выполнялось.

Не рассматривая тривиальный случай $Ah = \varphi_m$, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Итерационный процесс (1.4) сходится, параметр τ_k , монотонно увеличиваясь на итерациях, стремится к величине μ*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \mu, \quad \tau_{k+1} > \tau_k. \quad (1.8)$$

Величина μ связана с собственным числом λ_m оператора A соотношением

$$\mu = \lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_m)^2, \quad (1.9)$$

$$\lambda_m \varphi_m = A\varphi_m, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - c_m \varphi_m\| = 0, \quad (1.10)$$

а собственное число λ_m удовлетворяет условию (0.4).

Доказательство. Из соотношений (1.4), (1.6) следуют условие $z_k \in E$, $k = 1, 2, 3, \dots$ и условие симметричности оператора G на множестве $\{z_k\}$. Скалярно умножая левые и правые части (1.4) сами на себя с учетом (1.7), получим

$$\|z_{k+1}\| = \|z_k\| = \dots = \|Ah\|. \quad (1.11)$$

Записывая (1.4) для индексов k и $k+1$

$$\tau_{k+1}z_{k+1} = Gz_k, \quad \tau_{k+2}z_{k+2} = Gz_{k+1}, \quad (1.12)$$

умножая скалярно первое уравнение на z_{k+1} , второе — на z_k и вычитая эти равенства, можно записать

$$(z_{k+2}, z_k) - \|z_{k+1}\|^2 = (\tau_{k+2}^{-1} - \tau_{k+1}^{-1})(z_{k+1}, Gz_k). \quad (1.13)$$

Кроме того, из (1.4) следует

$$\|z_{k+1}\|^2 = \tau_{k+1}^{-1}(z_{k+1}, Gz_k). \quad (1.14)$$

Из (1.13), (1.14) с учетом (1.11) получается

$$\|z_k\|^2 + \|z_{k+2}\|^2 - 2(z_{k+2}, z_k) = 2\left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_{k+2}}\right)\|z_k\|^2, \quad (1.15)$$

$$\|z_{k+2} - z_k\|^2 = 2\left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_{k+2}}\right)\|z_k\|^2.$$

Отсюда и из соотношения (1.7) следует

$$1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_{k+2}} > 0, \quad \tau_{k+1} < \tau_{k+2}. \quad (1.16)$$

Так как оператор A компактный и, значит, ограниченный, справедливо неравенство $\|Az_k\| \leq c\|z_k\|$, $c > 0$, но тогда ограниченным будет и оператор G : $\|Gz_k\| \leq c_1\|z_k\|$, $c_1 > 0$, а из соотношения (1.7) следует ограниченность монотонно возрастающей последовательности

$$\tau_k : \tau_k \leq c_1 < \infty. \quad (1.17)$$

Поэтому существует предел (1.8).

Так как $z_k \in E$, то в силу свойств оператора A [5] все элементы z_k разлагаются в ряд по собственным элементам φ_j оператора A :

$$z_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(k) \varphi_j, \quad \|\varphi_j\| = 1; \quad (1.18)$$

$$\|z_k\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2(k) \equiv \|Ah\|^2. \quad (1.19)$$

Из итерационной схемы (1.4) следует

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(k+1) \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(k) [\lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_j)^2] \tau_{k+1}^{-1} \varphi_j.$$

Отсюда получается

$$\alpha_j(k+1) = \alpha_j(k) [\lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_j)^2] \tau_{k+1}^{-1}. \quad (1.20)$$

В силу соотношения (1.19) и монотонного возрастания параметра τ_{k+1} к пределу μ следует

$$\mu^{-1} [\lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_j)^2] \leq 1 \quad \forall j \in N. \quad (1.21)$$

Если бы условие (1.21) не выполнялось для какого-нибудь индекса j , то тогда $\|z_k\| \rightarrow \infty$, что противоречит равенству (1.19).

Обозначим через λ_m значение λ_j , если оно существует, для которого соотношение (1.21) переходит в равенство.

В силу монотонного возрастания τ_k к пределу μ , неравенства (1.21), неравенства $\alpha > 0$, дискретности спектра λ_j и наличия точки сгущения спектра только в нуле существует такой номер k_0 , что при $k > k_0$ будет выполняться

$$\tau_{k+1}^{-1} [\lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_j)^2] \leq b < 1, \quad \lambda_j \neq \lambda_m. \quad (1.22)$$

А из условия $\tau_{k+1} < \mu$ следует

$$\mu^{-1} [\lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_j)^2] \leq b < 1, \quad \lambda_j \neq \lambda_m. \quad (1.23)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \alpha_j^2(k)$. В силу соотношений (1.20), (1.22) выполняется

$$\sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \alpha_j^2(k) \leq \sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \alpha_j^2(k_0) b^{k-k_0} \leq \sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \alpha_j^2(k_0).$$

Поэтому в соответствии с признаком равномерной сходимости Вейерштрасса ряд $\sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \alpha_j^2(k)$ сходится равномерно относительно параметра k , так как он мажорируется

абсолютно сходящимся рядом $\sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \alpha_j^2(k_0) \leq \|Ah\|^2$ и этот ряд допускает замену порядка предельного перехода по параметру k и суммирования

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \alpha_j^2(k) = \sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^2(k) \leq \sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^2(k_0) b^{k-k_0} = 0. \quad (1.24)$$

Из соотношения (1.24) следует, что значение λ_m действительно существует, так как в противном случае из (1.19), (1.24) получилось бы равенство $\|Ah\| = 0$, что противоречит условию (1.5). А из (0.8) следует, что значение λ_m может быть только одно.

По этой же причине должно выполняться

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_m(k) = c_m \neq 0. \quad (1.25)$$

Таким образом, существует λ_m , для которого выполняется

$$\mu^{-1} [\lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_m)^2] = 1. \quad (1.26)$$

А из (1.18), (1.24), (1.25) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - c_m \varphi_m\| = 0. \quad (1.27)$$

Поэтому условия (1.9), (1.10) теоремы выполняются.

Сравнивая (1.26) и (1.23), получим $(\alpha - \lambda_m)^2 < (\alpha - \lambda_j)^2$, $j \neq m$, что доказывает выполнение условия (0.4).

Замечание 1. Результаты теоремы дают возможность на основе итерационного процесса (1.4) решать задачу селективного анализа спектра, когда выполняется условие $0 < \alpha < \lambda_1$.

Замечание 2. Из теоремы следует, что при изменении параметра α в пределах $0 < \alpha < \lambda_1$ функция $y(\alpha) = [\lambda_m(1/\alpha)]^{-1}$ будет кусочно-постоянной, неубывающей функцией параметра $1/\alpha$.

Действительно, пусть $\lambda_{j+1} < \alpha < \lambda_j$, тогда при $\lambda_{j+1} < \alpha < 0.5(\lambda_j + \lambda_{j+1})$ итерационный процесс (1.4) будет сходиться к величине λ_{j+1} , а при $0.5(\lambda_j + \lambda_{j+1}) < \alpha < \lambda_j$ — и к величине λ_j . При значении $\alpha = 0.5(\lambda_j + \lambda_{j+1})$ функция $y(\alpha)$ терпит разрыв.

Замечание 3. На первый взгляд кажется, что выбор вспомогательного оператора G

$$G = (\lambda_1^2 - \alpha^2)I + 2\alpha A - A^2 \equiv \lambda_1^2 I - (\alpha I - A)^2$$

достаточно тривиален и якобы может основываться на следующих простых рассуждениях.

Если φ — собственный элемент оператора A

$$A\varphi = \lambda\varphi,$$

то φ будет и собственным элементом оператора G : $G\varphi = \mu\varphi$. При этом между собственными значениями μ , λ существует связь

$$\mu = (\lambda_1^2 - \alpha^2) + 2\alpha\lambda - \lambda^2 \equiv \lambda_1^2 - (\alpha - \lambda)^2.$$

Поэтому для нахождения λ , ближайшего к заданному числу α , и соответствующего собственного элемента φ необходимо, чтобы значение μ было максимальным, что и реализуется в известной итерационной схеме. Приведенные рассуждения фактически несостоятельны по следующей причине. Любой собственный элемент оператора A является и собственным элементом оператора G , но обратное утверждение неверно. Можно доказать даже большее: если ImA бесконечномерен, то существует бесконечное множество параметров α : $0 < \alpha < \lambda_1$, удовлетворяющих условию (0.8), для которых оператор G имеет собственные значения $\mu(\alpha)$ и собственные элементы ϕ_α : $G\phi_\alpha = \mu\phi_\alpha$, но эти собственные элементы не являются собственными элементами оператора A : $A\phi_\alpha \neq \lambda\phi_\alpha$.

Пусть φ_i, φ_j — произвольные собственные элементы оператора A , причем их собственные числа λ_i, λ_j различны: $\lambda_i \neq \lambda_j$, $j \neq i + 1$.

Возьмем в качестве параметра α значение

$$\alpha = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}, \quad 0 < \alpha < \lambda_1, \quad j \neq i + 1. \tag{1.28}$$

Очевидно, что таких значений существует бесконечно много.

С параметром α связывается собственный элемент оператора G : ϕ_α , который выбирается следующим образом: $\phi_\alpha = \varphi_i + a\varphi_j$, $a \neq 0$.

Так как выполняется

$$\begin{aligned} G\varphi_i &= [\lambda_1^2 - \alpha^2 + 2\alpha\lambda_i - \lambda_i^2]\varphi_i, \\ G\varphi_j &= [\lambda_1^2 - \alpha^2 + 2\alpha\lambda_j - \lambda_j^2]\varphi_j, \end{aligned}$$

то в силу условия (1.28) получается

$$\lambda_1^2 - \alpha^2 + 2\alpha\lambda_i - \lambda_i^2 = \lambda_1^2 - \alpha^2 + 2\alpha\lambda_j - \lambda_j^2 \equiv \mu,$$

а из этого условия следует

$$G\phi_\alpha = \mu\phi_\alpha.$$

Однако ϕ_α не является собственным элементом оператора A , так как получается

$$A(\varphi_i + a\varphi_j) = \lambda_i\varphi_i + a\lambda_j\varphi_j \neq \lambda_i(\varphi_i + a\varphi_j).$$

Все сказанное справедливо, конечно, и для случая, когда оператор G рассматривается в конечномерном пространстве, при этом множество значений α , которым будут соответствовать кратные собственные значения оператора G , будет конечным. Так как для практических целей необходимо нахождение не только собственных значений оператора A , удовлетворяющих условию (0.4), но и соответствующих собственных элементов, то отсюда следует, что выбор оператора G и обоснование итерационной схемы (1.4) нуждаются в корректном доказательстве, что и выполнено для теоремы 1.

Замечание 4. Если снять условие (0.2) в теореме 1 и предположить лишь, что оператор A имеет двухстороннюю точку сгущения спектра в нуле, т. е. для $\forall \varepsilon > 0$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ существует бесконечное множество как положительных, так и отрицательных собственных чисел, то тогда второй этап селективного анализа спектра, когда необходимо найти собственное число λ_m , ближайшее к произвольно заданному числу α

$$0 < |\alpha| < |\lambda_1|, \quad \alpha \neq \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}, \quad \alpha \neq \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2}, \quad (1.29)$$

где λ_k, λ_j — соответственно положительные и отрицательные собственные числа, удовлетворяющие условию $\lambda_{k+1} < \lambda_k, |\lambda_{j+1}| < |\lambda_j|$, сводится к следующей итерационной схеме:

$$\tau_{k+1}z_{k+1} = G_1z_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots; \quad (1.30)$$

$$z_1 = Ah, \quad h \in H;$$

$$G_1 = 4\lambda_1^2 I - (\alpha I - A)^2 = (4\lambda_1^2 - \alpha^2) I + 2\alpha A - A^2, \quad (1.31)$$

$$\tau_{k+1} = \|G_1z_k\| / \|z_k\|.$$

При этом аналогично доказательству теоремы 1 можно доказать следующий результат.

Теорема 2. Итерационный процесс (1.30) сходится, параметр τ_k , монотонно увеличиваясь на итерациях, стремится к величине μ_1 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \mu_1, \quad \tau_{k+1} > \tau_k.$$

Величина μ_1 связана с собственным числом λ_m оператора A соотношением

$$\mu_1 = 4\lambda_1^2 - (\alpha - \lambda_m)^2,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \varphi_m, \quad \lambda_m \varphi_m = A\varphi_m,$$

где собственное число λ_m удовлетворяет условию (0.4), а заданное число α находится в интервале (1.29).

2. Численная апробация схемы селективного анализа

Численная апробация схемы проводилась на исследовании резонанса при колебаниях троса, нагруженного продольным усилием при действии возмущающей поперечной нагрузки с заданной частотой колебаний.

Исходная система уравнений и краевых условий имеет вид [8]

$$(N(x)W_{,x})_{,x} = \rho W_{,tt}, \quad 0 < x < l, \quad N(x) > 0; \quad (2.1)$$

$$W = 0, \quad x = 0, \quad W = 0, \quad x = l, \quad N(x) \in C_1(0, l), \quad (2.2)$$

где $W \equiv W(x, t)$ — поперечное смещение троса; x — продольная координата по оси троса; t — время; ρ — погонная плотность; $N(x)$ — продольное усилие.

Решение ищется в виде

$$W(x, t) = u(x) e^{i\Omega t}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2.3)$$

где Ω — собственная частота колебаний троса, $u(x)$ — собственная форма колебаний.

Для функции $u(x)$ получается спектральная задача в дифференциальной форме

$$(N(x)u_{,x})_{,x} + \rho\Omega^2 u = 0, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u(l) = 0.$$

Введением безразмерной координаты $\xi = x/l$, безразмерной частоты $\omega^2 = \rho l^2 \Omega^2 (N_0)^{-1}$, безразмерного усилия $\varphi(\xi) = N(\xi)/N_0$, где N_0 — значение $N(\xi)$ в некоторой точке ξ_0 , задача приводится к виду

$$(\varphi(\xi)u_{,\xi})_{,\xi} + \omega^2 u = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (2.4)$$

Спектральной задаче (2.4) сопоставляется спектральная задача в операторной форме с компактным оператором B в гильбертовом пространстве H

$$By = \lambda y, \quad \lambda^2 = \omega^{-2}. \quad (2.5)$$

Пространство H состоит из двухкомпонентных векторов

$$y = \{y_1, y_2\}, \quad H = \{y = \{y_1, y_2\} | y_i \in L_2(0, 1)\}.$$

В H задаются скалярное произведение и норма

$$(u, v) = \int_0^1 (\varphi u_1 v_1 + u_2 v_2) d\xi, \quad \|u\|^2 = (u, u). \quad (2.6)$$

Вводится множество $E \subset H$:

$$E = \left\{ y = \{y_1, y_2\} \left| \varphi y_1 \in C(0, 1), \quad y_2 \in C(0, 1), \quad \int_0^1 y_1 d\xi = 0 \right. \right\}. \quad (2.7)$$

Оператор B имеет две компоненты — B_1 , B_2 , которые задаются следующим образом:

$$B_1 y = -\frac{1}{\varphi} \left(\int_0^{\xi} y_2 d\xi + c(y_2) \right), \quad B_2 y = \int_0^{\xi} y_1 d\xi, \quad (2.8)$$

$$c(y_2) = - \left(\int_0^1 \frac{d\xi}{\varphi} \right)^{-1} \left(\int_0^1 \frac{1}{\varphi} \left(\int_0^{\xi} y_2 d\xi \right) d\xi \right).$$

Выбор скалярного произведения в H и множества E предполагает, что функция $\varphi(\xi)$ должна удовлетворять условию $\varphi(\xi) > 0$ и принадлежать множеству кусочно-непрерывных функций.

Оператор B обладает следующими свойствами:

1. Оператор B — компактный. Свойство компактности проверяется по условию компактности М. Рисса в $L_2(0, 1)$ [7], а так как в оператор B входят интегральные операторы, это условие выполняется.

2. Оператор B отображает $H \rightarrow E_0 \subset E \subset H$. Это свойство проверяется выполнением соотношений $\varphi B_1 y \in C(0, 1)$, $B_2 y \in C(0, 1)$, $\int_0^1 B_1 y d\xi = 0$.

3. Оператор B — симметричен в E , но не в H . Это свойство проверяется интегрированием по частям в скалярном произведении (u, Bv) , $u, v \in E$.

4. На множестве E выполняется условие $\text{Ker } B = 0$, что проверяется дифференцированием по ξ соотношения $B y_0 = 0$.

5. Оператор B имеет симметричный спектр, при котором каждому собственному числу λ и собственному элементу $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ соответствуют собственное число $-\lambda$ и собственный элемент $\{\varphi_1, -\varphi_2\}$. Это непосредственно проверяется на основе соотношений (2.8). Следовательно, оператор B имеет двухстороннюю точку сгущения спектра в нуле.

6. Если положить

$$u = \int_0^{\xi} y_1 d\xi, \quad \lambda^2 = \omega^{-2}, \quad (2.9)$$

то тогда спектральная задача (2.5) оказывается эквивалентной спектральной задаче (2.4). Проверка этого утверждения сводится к дифференцированию соотношения (2.5) по ξ и подстановке соотношения (2.9).

Перечисленные свойства оператора B позволяют заменить селективный анализ уравнения (2.4) на селективный анализ уравнения (2.5) и, учитывая свойство 5 оператора B , использовать теорему 2 для нахождения спектрального параметра λ_m , ближайшего к некоторому заданному числу α :

$$0 < |\alpha| < |\lambda_1| \quad |\lambda_m - \alpha| = \min_{j \in N} |\lambda_j - \alpha|. \quad (2.10)$$

Заданное число α связано с заданной частотой колебаний внешней силы Ω_0 соотношением $\alpha^2 = \omega_0^{-2}$, $\omega_0^2 = \rho l^2 \Omega_0^2 (N_0)^{-1}$. В этом случае резонанс получается при условии $\lambda_m = \alpha$. В силу симметричности спектра оператора B достаточно рассмотреть только положительные значения α : $0 < \alpha < |\lambda_1|$.

Таким образом, в соответствии с результатами разд. 2 процедура нахождения собственного числа λ_m при заданном α распадается на два этапа.

На первом этапе ищется $|\lambda_1|$ по итерационной схеме:

$$\tau_{k+1}y(k+1) = BB_y(k), \quad y(k) \in E, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.11)$$

$$y(1) = h, \quad h \in H;$$

$$\tau_{k+1} = \|BB_y(k)\| \cdot \|y(k)\|^{-1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{k+1} = \lambda_1^2. \quad (2.12)$$

В (2.11) рассматривается не оператор B , который не является знакоопределенным, а оператор BB , который является положительным. Индекс в скобках для величин $y(k)$ является номером итерации. Если $\alpha > |\lambda_1|$, то λ_m , удовлетворяющее условию (2.12), имеет значение $\lambda_m = |\lambda_1|$.

Если $\alpha < |\lambda_1|$, то производится переход ко второму этапу анализа и величина λ_m находится на основе итерационного процесса

$$\mu_{k+1}y(k+1) = G_1y(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.13)$$

$$y(1) = Bh, \quad h \in H,$$

$$G_1 = (4\lambda_1^2 - \alpha^2)I + 2\alpha B - B^2; \quad (2.14)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{k+1} = \mu, \quad \mu = 4\lambda_1^2 - (\lambda_m - \alpha)^2. \quad (2.15)$$

Величина λ_m из (2.15) находится по следующему алгоритму:

$$\lambda_m = \lambda_a, \quad \eta_1 < \eta_2, \quad \lambda_m = \lambda_b, \quad \eta_1 > \eta_2,$$

$$\lambda_a = \alpha + \sqrt{4\lambda_1^2 - \mu}, \quad \lambda_b = \alpha - \sqrt{4\lambda_1^2 - \mu},$$

$$\eta_1 = \|By(k) - \lambda_a y(k)\|, \quad \eta_2 = \|By(k) - \lambda_b y(k)\|.$$

Для численной реализации селективного анализа спектра составлена программа расчетов, предусматривающая задание произвольной кусочно-непрерывной функции $\varphi(\xi)$.

Программа тестировалась для частного случая задания функции $\varphi(\xi) : \varphi(\xi) = 1$. В этом случае спектр задачи (2.4) находится аналитически, а безразмерные собственные частоты ω_k имеют вид

$$\omega_k = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

Результаты тестирования приведены на рис. 1 и в табл. 1. Для удобства результаты расчетов показаны не в виде зависимости $\lambda_m = \lambda_m(\alpha)$, а в виде зависимости

$$\omega_m = \omega_m(q), \quad \omega_m = \lambda_m^{-1}, \quad q = \left(\frac{1.8\lambda_1^2}{\alpha}\right)^{1/2}. \quad (2.17)$$

Полученная частота ω_m сравнивалась с частотой ω_k (2.16), проверялось существование кусочно-постоянной зависимости $\lambda_m = \lambda_m(\alpha)$ или, что то же самое, кусочно-постоянной зависимости $\omega_m = \omega_m(q)$ для подтверждения теоретических результатов (замечание 2).

Представленная на рис. 1 зависимость $\omega_m = \omega_m(q)$ имеет четко выраженный характер неубывающей кусочно-постоянной функции. Для более точной качественной оценки эти же результаты представлены в табл. 1. Участки постоянного значения функции $\omega_m = \omega_m(q)$ соответствуют частоте собственных колебаний. Эти значения можно сравнить с точными значениями (2.16), совпадение результатов до тринадцатой частоты оказывается достаточно хорошим.

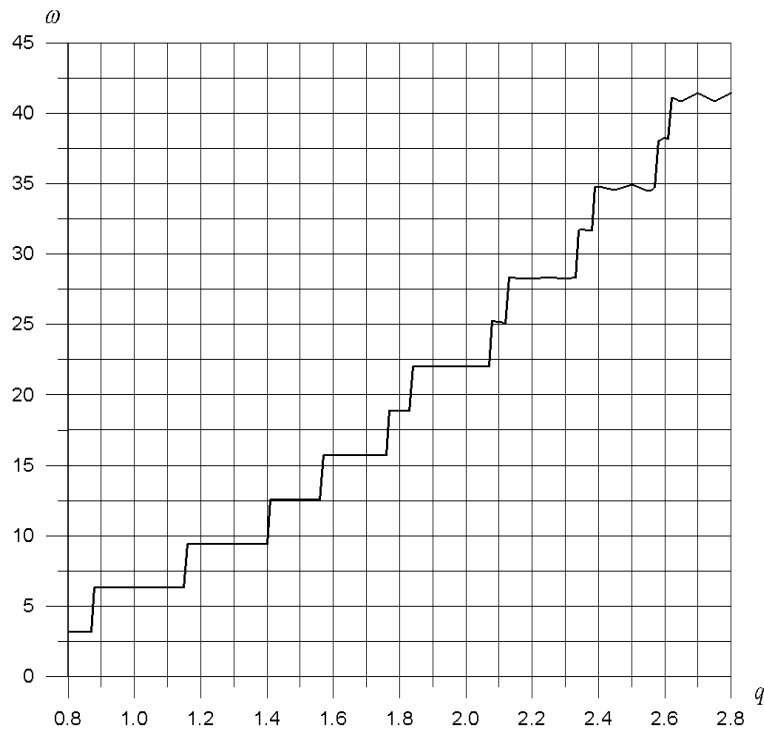


Рис. 1. Зависимость частоты собственных колебаний от параметра, связанного с задаваемым числом α для тестовых расчетов.

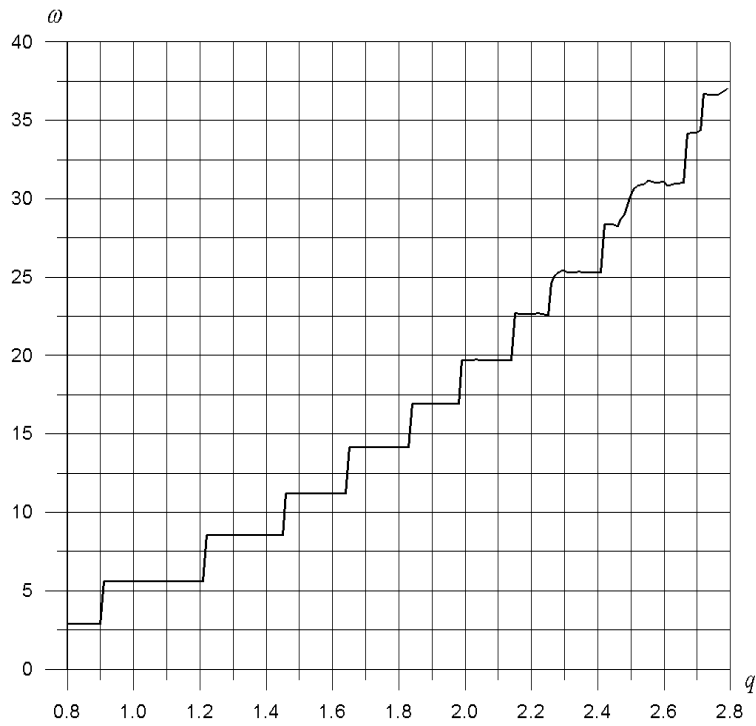


Рис. 2. Зависимость частоты собственных колебаний от параметра, связанного с задаваемым числом α , когда продольное усилие переменное по длине.

Т а б л и ц а 1

| q | ω_m |
|-------|------------|
| 0.800 | 3.14 |
| 0.820 | 3.14 |
| 0.870 | 3.14 |
| 0.880 | 6.28 |
| 0.900 | 6.28 |
| 1.150 | 6.28 |
| 1.160 | 9.42 |
| 1.350 | 9.42 |
| 1.400 | 9.42 |
| 1.410 | 12.57 |
| 1.420 | 12.57 |
| 1.560 | 12.57 |
| 1.570 | 15.71 |
| 1.600 | 15.72 |
| 1.760 | 15.71 |
| 1.770 | 18.90 |
| 1.780 | 18.87 |
| 1.830 | 18.85 |
| 1.840 | 21.99 |
| 1.850 | 21.99 |
| 2.070 | 22.02 |
| 2.080 | 25.27 |
| 2.090 | 25.21 |
| 2.120 | 25.05 |
| 2.130 | 28.39 |
| 2.150 | 28.28 |
| 2.330 | 28.29 |
| 2.340 | 31.63 |
| 2.350 | 31.76 |
| 2.380 | 31.64 |
| 2.390 | 34.77 |
| 2.400 | 34.78 |
| 2.570 | 34.73 |
| 2.580 | 38.05 |
| 2.600 | 38.31 |
| 2.610 | 38.15 |
| 2.620 | 41.09 |
| 2.630 | 41.04 |
| 2.800 | 41.44 |

Т а б л и ц а 2

| q | ω_m |
|-------|------------|
| 0.800 | 2.87 |
| 0.830 | 2.87 |
| 0.900 | 2.87 |
| 0.910 | 5.57 |
| 0.920 | 5.57 |
| 1.210 | 5.57 |
| 1.220 | 8.54 |
| 1.250 | 8.54 |
| 1.450 | 8.54 |
| 1.460 | 11.20 |
| 1.470 | 11.20 |
| 1.640 | 11.20 |
| 1.650 | 14.12 |
| 1.660 | 14.15 |
| 1.830 | 14.13 |
| 1.840 | 16.91 |
| 1.850 | 16.91 |
| 1.980 | 16.90 |
| 1.990 | 19.68 |
| 2.000 | 19.74 |
| 2.140 | 19.69 |
| 2.150 | 22.69 |
| 2.160 | 22.67 |
| 2.250 | 22.58 |
| 2.260 | 24.64 |
| 2.270 | 25.13 |
| 2.410 | 25.27 |
| 2.420 | 28.37 |
| 2.470 | 28.68 |
| 2.480 | 29.00 |
| 2.490 | 29.58 |
| 2.500 | 30.27 |
| 2.510 | 30.63 |
| 2.660 | 30.98 |
| 2.670 | 34.13 |
| 2.680 | 34.16 |
| 2.710 | 34.36 |
| 2.720 | 36.66 |
| 2.730 | 36.65 |
| 2.780 | 36.84 |

Следует заметить, что погрешность расчетов увеличивается при затрате одинаковых вычислительных ресурсов (количества итераций, количества узлов интегрирования при вычислении операторов), когда параметр α стремится к нулю и соответственно выполняется $q \rightarrow \infty$. Это объясняется тем, что спектр оператора B имеет точку сгущения в нуле,

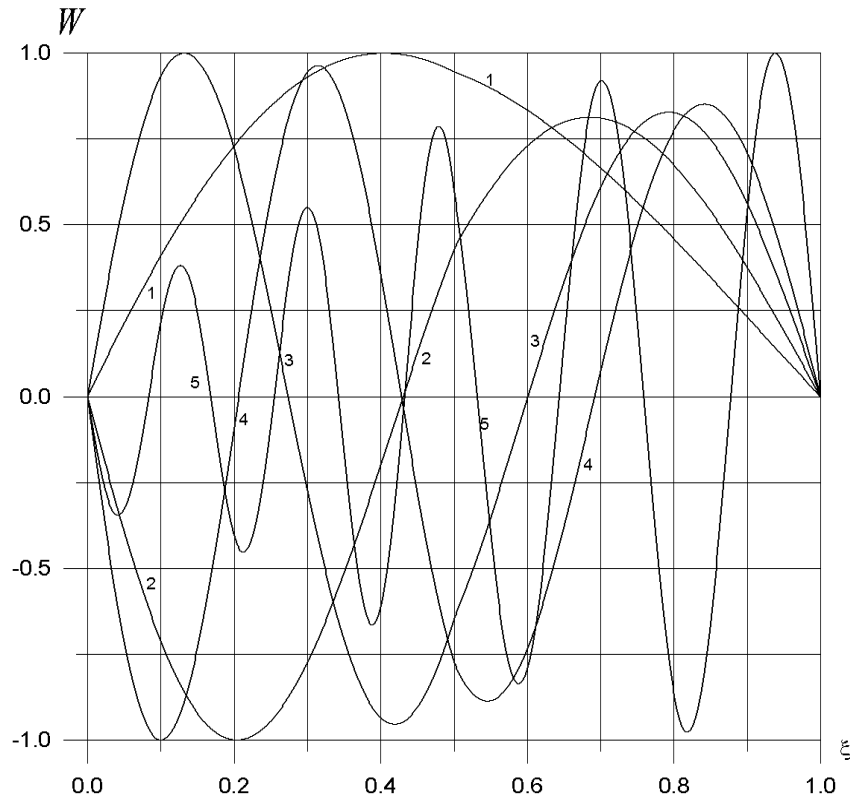


Рис. 3. Формы колебаний, когда продольное усилие является переменным по длине.

поэтому при $\alpha \rightarrow 0$ расстояние между соседними собственными числами уменьшается и для получения нужной точности результатов, повышения “разрешающей способности” численного метода необходимо затрачивать больше вычислительных ресурсов. В табл. 1 используется неравномерный шаг по параметру q , чтобы лучше иллюстрировать поведение функции $\omega_m = \omega_m(q)$ в точках разрыва.

На рис. 2, 3 и в табл. 2 представлены результаты расчетов, когда $\varphi(\xi) \neq 1$. Соответствующая зависимость бралась в виде

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} a + b\xi, & 0 < \xi < p, \\ a + b\xi + c\xi^2, & p < \xi < 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Параметры a , b , c , p для расчетов, представленных на рис. 2, 3 и в табл. 2, имели значения $a = 0.5$, $b = 0.4$, $c = 0.6$, $p = 0.5$.

На рис. 2 дана зависимость $\omega_m = \omega_m(q)$, а на рис. 3 изображены первые пять нормированных собственных функций $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, 5$. В табл. 2 приведены расчетные значения зависимости $\omega_m = \omega_m(q)$, которые также подтверждают монотонный, кусочно-постоянный рост функции $\omega_m = \omega_m(q)$.

В целом необходимо отметить, что проведенные расчеты подтверждают практическую работоспособность метода селективного анализа спектра.

Список литературы

- [1] ГИЛЬБЕРТ Д. Избранные труды. Анализ. Физика. Проблемы. Т. II. М.: Факториал, 1998.

- [2] КРАСНОВ М.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
- [3] ВАСИЛЬЕВА А.Б., ТИХОНОВ Н.А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [4] САДОВНИЧИЙ В.А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [5] ТАРАКАНОВ В.И. О спектральных свойствах оператора, компактного в гильбертовом пространстве и симметричного в некотором его подпространстве // Сб. научных тр. СурГУ. № 5. Сер. физ.-матем. и техн. науки. Сургут: Изд-во СурГУ, 2000. С. 179–186.
- [6] КОЛЛАТЦ А. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.
- [7] ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ анализ: Справочник / Под ред. С.Г. Крейна М.: Наука, 1972.
- [8] РАБОТНОВ Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 5 января 2004 г.,
в переработанном виде — 20 февраля 2004 г.*