ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТФИЗИКИ*

А. Д. Матвеев
Вычислительный центр СО РАН в г. Красноярске, Россия

Ю. В. Немировский
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

Описываются параллельные алгоритмы построения матриц жесткости конечных элементов высокого порядка для задач теории упругости и для стационарных задач матфизики, описываемых квазигармоническим уравнением с переменными коэффициентами.

Процедура построения матриц жесткости конечных элементов высокого порядка многомерных задач матфизики имеет матричную формулировку и сводится к вычислению интегралов от функций, построенных в местной системе координат или в L-координатах [1, 2]. Интегралы определяются численно, и эта процедура связана с выполнением большого объема вычислений.

Использование высокопроизводительной вычислительной техники — параллельных компьютеров при многочисленных исследованиях дает максимальную выгоду [3–5]. Поэтому в последнее время известные методы решения задач механики модифицируются с точки зрения выделения в них параллельных алгоритмов.

В данной статье предлагаются параллельные алгоритмы построения матриц жесткости конечных элементов высокого порядка для задач теории упругости и для стационарных задач матфизики, описываемых квазигармоническим уравнением с переменными коэффициентами.

Краткая суть данного подхода состоит в том, что коэффициенты матрицы жесткости элементов определяются из условия минимизации квадратичного функционала краевой задачи, представленного в скалярной форме (в стандартной процедуре МКЭ функционал энергии имеет векторно-матричный вид), при определенном выборе структуры матрицы функций формы конечного элемента. Коэффициенты матрицы жесткости в данном случае выражаются в явном виде через группу интегралов.

Достоинства рассматриваемого подхода заключаются в том, что, во-первых, если переменные коэффициенты квазигармонического уравнения или модули упругости анизотропного неоднородного тела являются полиномами, то все интегралы в предложенных алгоритмах для элементов формы прямоугольника или прямоугольной призмы определяются аналитически; во-вторых, интегралы в данном подходе определяются независимо друг от друга, и, следовательно, для их вычисления эффективно используются параллельные алгоритмы; и в-третьих, как показывают численные эксперименты, время построения матриц жесткости на моноЭВМ (однопроцессорной ЭВМ) по формулам предлагаемых процедур существенно меньше времени вычисления по известной матричной процедуре МКЭ [1, 2] при равных условиях их реализации.

Вначале рассмотрим построение параллельных алгоритмов вычисления матриц жесткости конечных элементов для трехмерной задачи упругости. Не теряя общности суждений и для удобства изложения будем считать, что конечный элемент V_e второго порядка имеет форму прямоугольной призмы и расположен в декартовой системе координат XYZ (рис. 1), $\xi\eta\zeta$ — местная система координат.

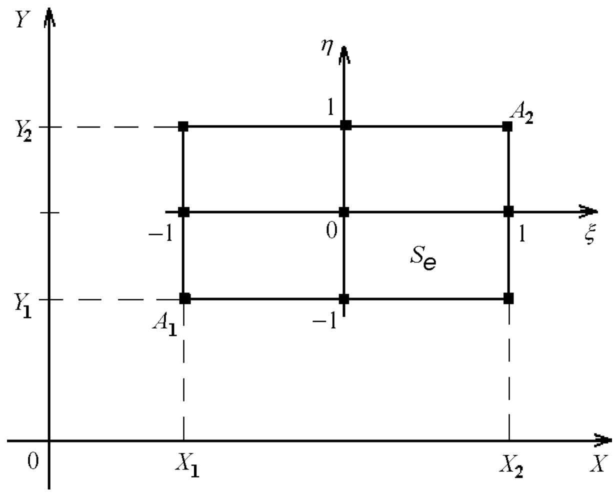

Рис. 1.

Пусть для анизотропного неоднородного конечного элемента V_e выполняются соотношения Гука и Коши [6]:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2}$$

где $\{\sigma\} = \{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy}\}^T$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z\gamma_{yz}\gamma_{xz}\gamma_{xy}\}^T$ — векторы напряжений и деформаций; u, v, w — перемещения элемента V_e, [D] — матрица модулей упругости C_{ij} элемента V_e, $C_{ij} = C_{ji}$, $C_{ij} = C_{ij}(x, y, z)$, $i, j = 1, \ldots, 6$; T — транспонирование, функции $C_{i,j}$ удовлетворяют условиям эллиптичности [7].

Пусть функции C_{ij} в области элемента V_e являются полиномами вида

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} r_k^{ij}\psi_k \quad (r_k^{ij} \text{ — действительные числа}), \tag{3}$$

где

$$\psi_k = x^{\bar{\alpha}_k} y^{\bar{\beta}_k} z^{\bar{\gamma}_k} \quad (\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k, \bar{\gamma}_k \text{ — целые числа}). \tag{4}$$

Используя известные функции формы $N_1, \ \ldots, \ N_n$ элемента V_e, записанные в местной системе координат $\xi\eta\zeta$ [1, 2], представим их в глобальной системе координат XYZ, которые имеют вид

$$N_\alpha = \sum_{j=1}^{n} r_{\alpha_j} \varphi_j \quad (r_{\alpha_j} \text{ — действительные числа}), \tag{5}$$

$$\varphi_j = x^{\alpha_j} y^{\beta_j} z^{\gamma_j} \quad (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \text{ — целые числа}). \tag{6}$$

Следуя МКЭ [1], аппроксимирующие функции перемещений u, v, w элемента V_e определим соотношением

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = [N]\{\delta\}, \quad \{\delta\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{3n} \end{array} \right\}, \tag{7}$$

где структуру матрицы функций формы [N] элемента V_e представим в форме [3]

$$[N] = \left[\begin{array}{ccc} N_1 \ldots N_n & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & N_1 \ldots N_n & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & N_1 \ldots N_n \end{array} \right]. \tag{8}$$

Согласно (7), (8), вектор $\{\delta\}$ узловых неизвестных элемента V_e имеет следующую структуру: $\delta_1, \ \ldots, \ \delta_n$ есть узловые значения перемещений u, $\delta_{n+1}, \ \ldots, \ \delta_{2n}$ — перемещений v, $\delta_{2n+1}, \ \ldots, \ \delta_{3n}$ — перемещений w. Функционал W_e энергии деформаций элемента V_e для представления (1) имеет вид

$$\begin{gathered} W_e = \int\limits_{V_e} \left\{ \varepsilon_x \left(\frac{1}{2} C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{yz} + C_{15}\gamma_{xz} + C_{16}\gamma_{xy} \right) + \right. \\ + \varepsilon_y \left(\frac{1}{2} C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\gamma_{yz} + C_{25}\gamma_{xz} + C_{26}\gamma_{xy} \right) + \\ + \varepsilon_z \left(\frac{1}{2} C_{33}\varepsilon_z + C_{34}\gamma_{yz} + C_{35}\gamma_{xz} + C_{36}\gamma_{xy} \right) + \\ + \gamma_{yz} \left(\frac{1}{2} C_{44}\gamma_{yz} + C_{45}\gamma_{xz} + C_{46}\gamma_{xy} \right) + \\ \left. + \gamma_{xz} \left(\frac{1}{2} C_{55}\gamma_{xz} + C_{56}\gamma_{xy} \right) + \gamma_{xy} \frac{1}{2} C_{66}\gamma_{xy} \right\} dV, \end{gathered} \tag{9}$$

здесь V_e область элемента в системе координат XYZ.

Из условия $\dfrac{\partial W_e}{\partial \delta_i} = 0, i = 1, \ \ldots, \ 3n$, используя при этом в (9) представления (2), (7), (8), т.е. учитывая структуру вектора $\{\delta\}$, получаем формулы для вычисления коэффициентов $K_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ \ldots, \ 3n)$ верхней треугольной части матрицы жесткости $[K]$ элемента V_e:

$$K_{\alpha\beta} = \int\limits_{V_e} \{ C_{11} a_{\alpha\beta} + C_{15}(p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha}) + C_{16}(d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha}) + C_{56}(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\alpha}) +$$

$$+C_{55}q_{\alpha\beta} + C_{66}b_{\alpha\beta}\} \, dV,$$

$$K_{\alpha+2n,\,\beta+2n} = \int\limits_{V_e} \{C_{33}q_{\alpha\beta} + C_{34}(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\alpha}) + C_{35}(p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha}) +$$

$$+C_{45}(d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha}) + C_{44}b_{\alpha\beta} + C_{55}a_{\alpha\beta}\} dV,$$

$$K_{\alpha+n,\,\beta+n} = \int\limits_{V_e} \{C_{22}b_{\alpha\beta} + C_{24}(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\alpha}) + C_{26}(d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha}) +$$

$$+C_{46}(p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha}) + C_{44}q_{\alpha\beta} + C_{66}a_{\alpha\beta}\} dV, \tag{10}$$

здесь $\alpha = 1, \ \ldots, \ n, \quad \beta = \alpha, \ \ldots, \ n;$

$$K_{\alpha+n,\,\beta+2n} = \int\limits_{V_e} \{C_{23}f_{\alpha\beta} + C_{24}b_{\alpha\beta} + C_{25}d_{\beta\alpha} +$$

$$+C_{34}q_{\alpha\beta} + C_{36}p_{\alpha\beta} + C_{45}p_{\beta\alpha} + C_{46}d_{\alpha\beta} + C_{44}f_{\beta\alpha} + C_{56}a_{\alpha\beta}\} dV,$$

$$K_{\alpha,\,\beta+2n} = \int\limits_{V_e} \{C_{13}p_{\alpha\beta} + C_{14}d_{\alpha\beta} + C_{15}a_{\alpha\beta} +$$

$$+C_{35}q_{\alpha\beta} + C_{36}f_{\alpha\beta} + C_{45}f_{\beta\alpha} + C_{46}b_{\alpha\beta} + C_{55}p_{\beta\alpha} + C_{56}d_{\beta\alpha}\} dV,$$

$$K_{\alpha,\,\beta+n} = \int\limits_{V_e} \{C_{12}d_{\alpha\beta} + C_{14}p_{\alpha\beta} + C_{25}f_{\beta\alpha} + C_{26}b_{\alpha\beta} + C_{45}q_{\alpha\beta} +$$

$$+C_{16}a_{\alpha\beta} + C_{56}p_{\beta\alpha} + C_{46}f_{\alpha\beta} + C_{66}d_{\beta\alpha}\} dV, \tag{11}$$

здесь $\alpha, \beta = 1, \ \ldots, \ n;$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_\beta}{\partial x}, \quad b_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\frac{\partial N_\beta}{\partial y}, \quad q_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial z}\frac{\partial N_\beta}{\partial z}, \tag{12}$$

$$\alpha = 1, \ \ldots, \ n, \quad \beta = \alpha, \ \ldots, \ n,$$

$$p_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_\beta}{\partial z}, \quad d_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_\beta}{\partial y}, \quad f_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\frac{\partial N_\beta}{\partial z}, \tag{13}$$

$$\alpha, \beta = 1, \ \ldots, \ n.$$

Подставляя (5) в (12), (13) и учитывая (3), формулы (10), (11) представим в виде

$$K_{\alpha\beta} = C^a_{11\alpha\beta} + \ldots + C^p_{55\alpha\beta} + C^b_{66\alpha\beta},$$

$$K_{\alpha+n,\,\beta+n} = C^b_{22\alpha\beta} + \ldots + C^q_{44\alpha\beta} + C^a_{66\alpha\beta},$$

$$K_{\alpha+2n,\,\beta+2n} = C^q_{33\alpha\beta} + \ldots + C^b_{44\alpha\beta} + C^a_{55\alpha\beta}, \tag{14}$$

$$\alpha = 1, \ \ldots, \ n \quad \beta = \alpha, \ \ldots, \ n,$$

$$K_{\alpha+n,\,\beta+2n} = C^f_{23\alpha\beta} + C^b_{24\alpha\beta} + \ldots + C^a_{56\alpha\beta},$$

$$K_{\alpha,\,\beta+2n} = C^p_{13\alpha\beta} + C^d_{14\alpha\beta} + \ldots + C^p_{55\beta\alpha},$$

$$K_{\alpha,\,\beta+n} = C^d_{12\alpha\beta} + C^p_{14\alpha\beta} + \ldots + C^f_{46\alpha\beta}, \tag{15}$$

$$\alpha, \beta = 1, \ \ldots, \ n,$$

где обозначено

$$C^a_{11\alpha\beta} = \int\limits_{V_e} C_{11} a_{\alpha\beta} dV, \ \ldots, \ C^f_{46\alpha\beta} = \int\limits_{V_e} C_{46} f_{\alpha\beta} dV,$$

$$C^a_{11\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r^{11}_k \overline{C}^a_{11ijk},$$

$$\ldots$$

$$C^a_{55\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r^{55}_k \overline{C}^a_{55ijk}, \tag{16}$$

$$\alpha = 1, \ \ldots, \ n \quad \beta = \alpha, \ \ldots \ , n,$$

$$C^f_{23\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r^{23}_k \overline{C}^f_{23ijk},$$

$$\ldots$$

$$C^f_{46\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r_{\beta_i} r_{\alpha_j} r^{46}_k \overline{C}^f_{46ijk}, \tag{17}$$

здесь $\alpha, \beta = 1, \ \ldots, \ n,$

$$\overline{C}^a_{11ijk} = \int\limits_{V_e} \varphi^i_x \varphi^j_x \psi_k dV, \ \ldots, \ \overline{C}^f_{46ijk} = \int\limits_{V_e} \varphi^i_y \varphi^j_z \psi_k dV, \tag{18}$$

$$\varphi^i_x = \partial\varphi_j/\partial x, \quad \varphi^j_y = \partial\varphi_j/\partial y, \quad \varphi^j_z = \partial\varphi_j/\partial z.$$

Итак, в силу (14) — (17) коэффициенты матрицы жесткости элемента V_e в явном виде могут быть выражены через группу интегралов (18), для нахождения которых в силу (12), (13) достаточно вычислить 6 типов интегралов:

$$J_1 = \int\limits_{V_e} \varphi^i_x \varphi^j_x \psi_k dV, \quad J_2 = \int\limits_{V_e} \varphi^i_y \varphi^j_y \psi_k dV, \quad J_3 = \int\limits_{V_e} \varphi^i_z \varphi^j_z \psi_k dV,$$

здесь $i = 1, \ \ldots, \ n; \quad j = i, \ \ldots, \ n$ и

$$J_4 = \int\limits_{V_e} \varphi^i_x \varphi^j_y \psi_k dV, \quad J_5 = \int\limits_{V_e} \varphi^i_y \varphi^j_z \psi_k dV, \quad J_6 = \int\limits_{V_e} \varphi^i_x \varphi^j_z \psi_k dV,$$

здесь $i, j = 1, \ \ldots, \ n$. В самом деле, например, $C^a_{11ijk} = C^a_{15ijk}, \quad C^p_{15ijk} = C^p_{13ijk}$ и т. д.

Пусть интегралы (18), т. е. $J_1, \ \ldots, \ J_6$, определяются численно. Заметим, что для элементов V_e формы тетраэдра интегралы J_1 следует определять в L-координатах, для V_e (рис. 1) — в местной системе координат $\xi\eta\zeta$.

Рассмотрим один из вариантов параллельного алгоритма вычисления интегралов J_i, который выполняется на параллельном компьютере с шестью процессорами. Работа этого алгоритма показана на рис. 2. Основная программа расщепляется на шесть параллельных ветвей (вычислений): $L_1, \ \ldots, \ L_6$, которые реализуются соответственно на процессорах: $P_1, \ \ldots, \ P_6$. Процессоры P_i работают одновременно и независимо друг от друга. Блок A

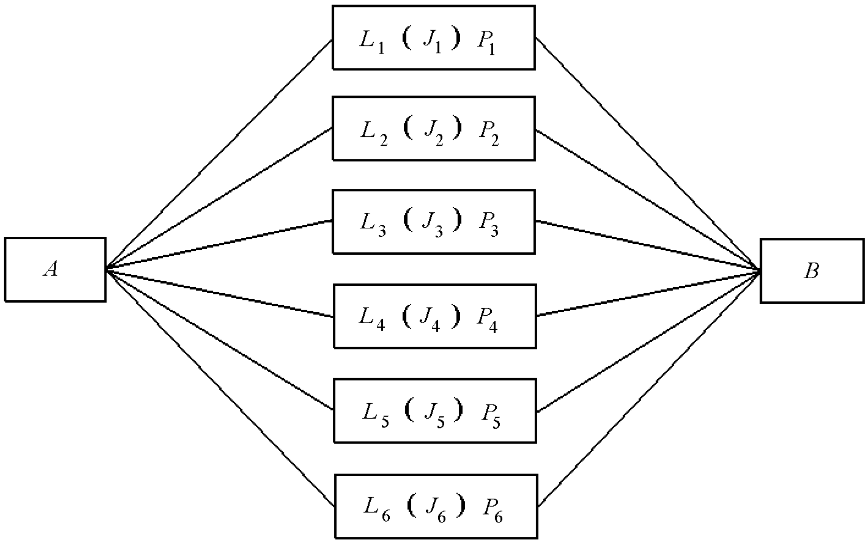

Рис. 2.

содержит операторы ввода и подготовки исходных данных, оператор распараллеливания вычислений (ветвей) и оператор распределения данных. Вначале выполняются операторы блока A, которые расположены в основной программе. Затем операторы ветвей $L_1, \ldots, L_6$ соответственно вычисляют группы интегралов $J_1, \ldots, J_6$ на процессорах $P_1, \ldots, P_6$.

Блок B содержит операторы, которые вычисляют коэффициенты матрицы жесткости элемента по формулам (14) — (15) и расположены в программе. Эти операторы выполняются после завершения параллельных вычислений L_i.

Для однородного элемента V_e ($C_{ij} = \text{const}$, т. е. $\psi_k = \text{const}$) общее число интегралов равно $N = 3n(n+1)/2 + 3n^2$. Следовательно, максимальное число параллельных ветвей равно N. Тогда в этом случае время выполнения параллельного алгоритма на параллельном компьютере, имеющем N процессоров, в t/N раз меньше, чем на моноЭВМ (t — время вычисления N интегралов на моноЭВМ). Например, для квадратичного элемента $V_e(n = 20)$: $N = 1830$.

Отметим, что в блоках A, B, используя принцип потока данных [5], можно выделить ряд систем параллельных вычислений, имеющих структуру графов [4].

Расчеты на моноЭВМ показывают, что при численном интегрировании время построения матрицы жесткости однородного квадратичного элемента V_e формы куба по формулам (10) — (13) в 5 раз меньше времени вычисления $[K]$ по матричной формуле МКЭ [1, 2], т.е. по формуле

$$[K] = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV,$$

где $[B]$ — матрица, связывающая $\{\varepsilon\}$ и $\{\delta\}$ при одинаковом выборе числа точек интегрирования в области V_e.

Для элемента V_e (см. рис. 1) интегралы (18) определяются аналитически. Используя (4), (6) в (18) при $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \geq 1$ найдем

$$\overline{C}^a_{11ijk} = \frac{\alpha_i \alpha_j (X_2^{a_{xx}} - X_1^{a_{xx}})}{a_{xx}} \frac{(Y_2^{b_{xx}} - Y_1^{b_{xx}})}{b_{xx}} \frac{(Z_2^{c_{xx}} - Z_1^{c_{xx}})}{c_{xx}},$$

$$\ldots$$

$$\overline{C}^{f}_{46ijk} = \frac{\beta_i\gamma_j(X_2^{a_{yz}} - X_1^{a_{yz}})}{a_{yz}} \frac{(Y_2^{b_{yz}} - Y_1^{b_{yz}})}{b_{yz}} \frac{(Z_2^{c_{yz}} - Z_1^{c_{yz}})}{c_{yz}}, \tag{19}$$

где

$$a_{xx} = \alpha_i + \alpha_j + \overline{\alpha}_k - 1, \quad b_{xx} = \beta_i + \beta_j + \overline{\beta}_k + 1,$$
$$c_{xx} = \gamma_i + \gamma_j + \overline{\gamma}_k + 1, \ \ldots, \ a_{yz} = \alpha_i + \alpha_j + \overline{\alpha}_k,$$
$$b_{yz} = \beta_i + \beta_j + \overline{\beta}_k, \quad c_{yz} = \gamma_i + \gamma_j + \overline{\gamma}_k + 1$$

(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) — координаты узлов A_1, A_2 элемента V_e в глобальной системе координат XYZ (см. рис. 1).

При $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j = 0$ вычисления по формулам (14)–(17), (19) упрощаются. Например, если $\alpha_j = 0$, то в силу (6) имеем $\partial\varphi_j/\partial x = 0$, и, следовательно, в силу (18) получим $\overline{C}^{a}_{11ijk} = 0$ и т. д.

Коэффициенты нижней треугольной части матрицы жесткости элемента V_e определяются из условия ее симметрии, т. е.

$$K_{\beta\alpha} = K_{\alpha\beta} \quad \alpha = 1, \ \ldots, \ 3n; \quad \beta = \alpha, \ \ldots, \ 3n.$$

Пусть срединная поверхность недеформируемого тонкого прямоугольного анизотропного неоднородного конечного элемента S_e высокого порядка, находящегося в плоском напряженном состоянии, расположена в плоскости XOY. На рис. 3 показан прямоугольный элемент S_e второго порядка в общей системе координат XY и в местной системе координат $\xi\eta$.

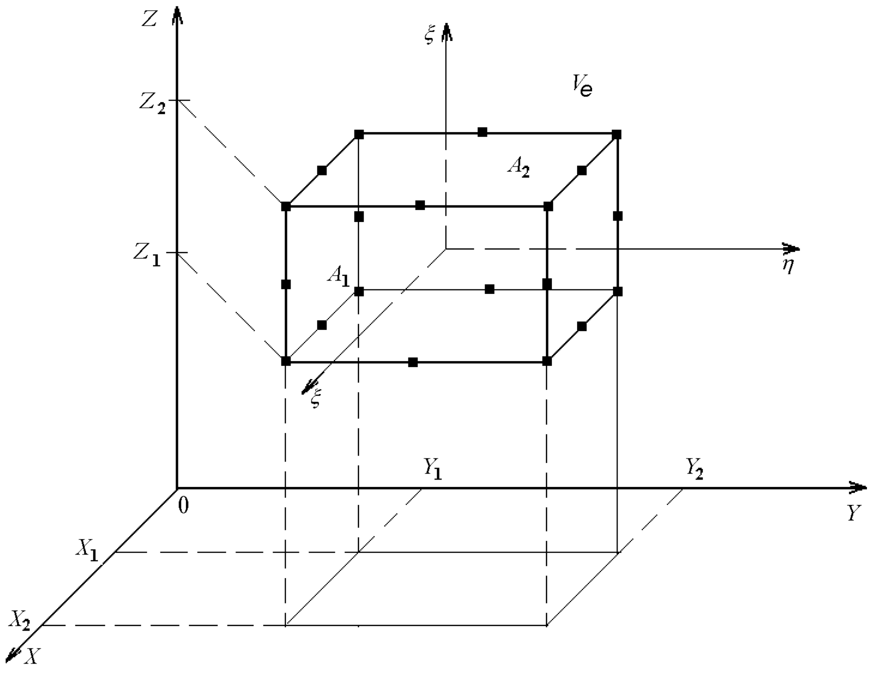

Рис. 3.

Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ и перемещения u, v элемента S_e связаны соотношениями Гука и Коши [6]:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \tag{20}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{21}$$

где $[D]$ — матрица упругости; $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$ — векторы напряжений и деформаций, C_{ij} — модули упругости элемента S_e:

$$\{\sigma\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}, \quad [D] = \left[\begin{array}{ccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{array} \right], \quad \{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}.$$

Пусть функции C_{ij} на S_e в системе координат XY имеют вид

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} r_k^{ij} \psi_k \quad (r_k^{ij} \text{ — действительные числа}), \tag{22}$$

где

$$\psi_k = x^{\overline{\alpha}_k} y^{\overline{\beta}_k} \quad (\overline{\alpha}_k, \overline{\beta}_k \text{ — целые числа}). \tag{23}$$

Отметим, что гладкие функции C_{ij}, заданные для пластины, всегда можно на узловой сетке данного разбиения представить в виде (26), используя, например, линейные или квадратичные интерполяционные полиномы [2].

Потенциальная энергия W_e деформаций S_e элемента с учетом (22), (23) имеет вид

$$W_e = \int\limits_{S_e} \left\{ \varepsilon_x \left(\frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \gamma_{xy} \right) + \varepsilon_y \left(\frac{1}{2} C_{22} \varepsilon_y + C_{23} \gamma_{xy} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \gamma_{xy} C_{33} \gamma_{xy} \right\} dS. \tag{24}$$

Аппроксимирующие функции перемещений u, v элемента S_e по МКЭ определяются соотношением

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = [N]\{\delta\}, \tag{25}$$

где $[N]$ — матрица функций формы S_e размерности $(2 \times 2n)$, $\{\delta\}$ — вектор узловых параметров МКЭ элемента S_e размерности $2n$. За счет перестановки параметров вектора $\{\delta\}$ матрицу $[N]$ представим в форме

$$[N] = \left[\begin{array}{cc} N_1 \dots N_n & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & N_1 \dots N_n \end{array} \right], \tag{26}$$

где N_α — функции формы элемента $S_e (\alpha = 1, \ \dots, \ n)$, построенные по алгоритмам МКЭ в общей системе координат XY

$$N_\alpha = \sum_{j=1}^{n} r_{\alpha_j} \varphi_j, \tag{27}$$

где

$$\varphi_j = x^{\alpha_j} y^{\beta_j} \tag{28}$$

r_{α_j} — действительные, α_j, β_j — целые числа.

Используя представления (21) — (27), из условия

$$\frac{\partial W_e}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1, \ \dots, \ 2n$$

определяем верхнюю треугольную часть матрицы жесткости $[K]$ для элемента S_e, коэффициенты которой вычисляются по формулам

$$K_{\alpha\beta} = \int\limits_{S_e} \{C_{11}A_{\alpha\beta} + C_{13}(D_{\alpha\beta} + D_{\beta\alpha}) + C_{33}B_{\alpha\beta}\}\, dS,$$

$$K_{\alpha+n,\,\beta+n} = \int\limits_{S_e} \{C_{22}B_{\alpha\beta} + C_{23}(D_{\alpha\beta} + D_{\beta\alpha}) + C_{33}A_{\alpha\beta}\}\, dS, \qquad (29)$$

$$\alpha = 1,\ \ldots,\ n, \quad \beta = \alpha,\ \ldots,\ n,$$

$$K_{\alpha,\,\beta+n} = \int\limits_{S_e} \{C_{12}D_{\alpha\beta} + C_{13}A_{\alpha\beta} + C_{23}B_{\alpha\beta} + C_{33}D_{\beta\alpha}\}\, dS,$$

$$\alpha, \beta = 1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_\beta}{\partial x}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\frac{\partial N_\beta}{\partial y},$$

$$\alpha = 1,\ \ldots,\ n, \qquad \beta = \alpha,\ \ldots,\ n,$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_\beta}{\partial y} \qquad \alpha, \beta = 1,\ \ldots,\ n.$$

Дифференцируя (27) с учетом (28), получим

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} r_{\alpha_j}\varphi_x^j, \quad \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} = \sum_{j=1}^{n} r_{\alpha_j}\varphi_y^j, \qquad (31)$$

$$\varphi_x^j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \alpha_j x^{\alpha_j - 1} y^{\beta_j}, \quad \varphi_y^j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = \beta_j x^{\alpha_j} y^{\beta_j - 1}. \qquad (32)$$

Подставляя (30) в (29) с учетом (31), (32), выражения (29) представим в форме

$$K_{\alpha\beta} = C_{11\alpha\beta}^a + C_{13\alpha\beta}^d + C_{13\beta\alpha}^d + C_{33\alpha\beta}^b,$$

$$K_{\alpha+n,\,\beta+n} = C_{22\alpha\beta}^b + C_{23\alpha\beta}^d + C_{23\beta\alpha}^d + C_{33\alpha\beta}^a,$$

$$\alpha = 1,\ \ldots,\ n, \quad \beta = \alpha,\ \ldots,\ n,$$

$$K_{\alpha,\,\beta+n} = C_{12\alpha\beta}^d + C_{13\alpha\beta}^a + C_{23\alpha\beta}^b + C_{33\alpha\beta}^d,$$

$$\alpha, \beta = 1,\ \ldots,\ n,$$

где обозначено

$$C_{11\alpha\beta}^a = \int\limits_{S_e} C_{11}A_{\alpha\beta}dS,\ \ldots,\ C_{33\alpha\beta}^d = \int\limits_{S_e} C_{33}D_{\alpha\beta}dS,$$

$$C_{11\alpha\beta}^a = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r_k^{11} \overline{C}_{11ijk}^a,$$

$$\ldots$$

$$C^d_{33\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r_k^{33} \overline{C}^d_{33ijk}, \tag{34}$$

$$\overline{C}^a_{11ijk} = \int_{S_e} \varphi^i_x \varphi^j_x \psi_k dS, \ \ldots, \ \overline{C}^d_{33ijk} = \int_{S_e} \varphi^i_x \varphi^j_y \psi_k dS. \tag{35}$$

Итак, согласно (33), (34) коэффициенты матрицы жесткости $[K]$ в явном виде зависят от группы интегралов (35). Для нахождения интегралов (35) достаточно вычислить интегралы типа

$$\int_{S_e} \varphi^i_x \varphi^j_x \psi_k dS, \quad \int_{S_e} \varphi^i_y \varphi^j_y \psi_k dS, \quad \int_{S_e} \varphi^i_x \varphi^j_y \psi_k dS,$$

здесь $i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$

Для прямоугольного S_e (рис. 3) эти интегралы определяются аналитически. Подставляя (23), (32) в (35), имеем

$$\overline{C}^a_{ijk} = \frac{\alpha_i \alpha_j (X_2^{a_{xx}} - X_1^{a_{xx}})}{a_{xx}} \frac{(Y_2^{b_{xx}} - Y_1^{b_{xx}})}{b_{xx}},$$

$$\ldots$$

$$\overline{C}^d_{ijk} = \frac{\alpha_i \beta_j (X_2^{a_{xy}} - X_1^{a_{xy}})}{a_{xy}} \frac{(Y_2^{b_{xy}} - Y_1^{b_{xy}})}{b_{xy}}, \tag{36}$$

где $a_{xx} = \alpha_i + \alpha_j + \overline{\alpha}_k - 1$, $b_{xx} = \beta_i + \beta_j + \overline{\beta}_k + 1, \ldots, a_{xy} = \alpha_i + \alpha_j + \overline{\alpha}_k$, $b_{xy} = \beta_i + \beta_j + \overline{\beta}_k$; (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — координаты узлов A_1, A_2 элемента S_e (см. рис. 2).

Коэффициенты нижней треугольной части матрицы $[K]$ определяются из условия ее симметрии.

При $\alpha_i, \beta_i = 0$ имеем $\varphi^i_x = 0, \varphi^i_y = 0$ и, следовательно, в силу (35) получаем $\overline{C}^a_{ijk} = 0$, $\overline{C}^d_{ijk} = 0$ и т.д. Аналогично, как и для трехмерных элементов, определяем интегралы (35) с применением параллельных вычислений для высокоточных треугольных и четырехугольных элементов, используя при этом местные системы координат или L-координаты. В данном параллельном алгоритме вычисления интегралов максимальное число параллельных ветвей для однородного элемента S_e равно $N = 3n(n+1)/2$.

Рассмотрим экономичную процедуру построения матрицы жесткости конечного элемента V_e высокого порядка формы прямоугольного параллелепипеда для стационарных краевых задач, которые описываются квазигармоническим уравнением [2] (записанным в декартовой системе координат XYZ) с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + Q = 0 \quad \text{в} \quad V \in R^3 \tag{37}$$

с граничными условиями

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{на} \quad S_1 \quad (\varphi_0 \text{ задана}) \tag{38}$$

и (или) на S_2:

$$K_{xx}\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + K_{yy}\frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + K_{zz}\frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + q + h(\varphi - \varphi_\infty) = 0, \tag{39}$$

где $S = S_1 + S_2$ — полная граница области V; $q, h = \text{const}$; l_x, l_y, l_z — направляющие косинусы вектора нормали к границе S_2; функции $Q = Q(x, y, z)$, $K_{xx} = K_{xx}(x, y, z)$, $K_{yy} = K_{yy}(x, y, z)$, $K_{zz} = K_{zz}(x, y, z)$ удовлетворяют условиям эллиптичности [7].

Пусть исходная область V представлена конечными элементами V_e высокого порядка (см. рис. 1) и пусть функции K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} в области конечных элементов V_e являются полиномами вида

$$K_{xx} = \sum_{k=1}^{m} r_k^{xx} u_k, \quad K_{yy} = \sum_{k=1}^{m} r_k^{yy} u_k, \quad K_{zz} = \sum_{k=1}^{m} r_k^{zz} u_k, \tag{40}$$

где

$$u_k = x^{\overline{\alpha}_k} y^{\overline{\beta}_k} z^{\overline{\gamma}_k}; \tag{41}$$

здесь r_k^{xx}, r_k^{yy}, r_k^{zz} — действительные числа, $\overline{\alpha}_k$, $\overline{\beta}_k$, $\overline{\gamma}_k$ — целые числа.

Аппроксимирующую функцию φ элемента V_e определяем по МКЭ в глобальной системе координат XYZ, которая имеет вид [1, 2]

$$\varphi = [N_1 \dots N_n] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{array} \right\}, \tag{42}$$

где

$$N_\alpha = \sum_{j=1}^{n} r_{\alpha_j} \psi_j \quad (r_{\alpha_j}\text{— действительные числа}), \tag{43}$$

$$\psi_j = x^{\alpha_j} y^{\beta_j} z^{\gamma_j} \quad (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j\text{— целые числа}). \tag{44}$$

Из условия $\dfrac{\partial W_e}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1, \ \dots, \ n$, где

$$W_e = \int\limits_{V_e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + 2Q\varphi \right] dS +$$

$$+ \int\limits_{S_e} \left[q\varphi + \frac{1}{2} h (\varphi - \varphi_\infty)^2 \right] dS; \tag{45}$$

здесь S_e — поверхность элемента V_e.

Используя (42), (43) в (45) с учетом (40), получаем формулы для вычисления коэффициентов $K_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \ \dots, \ n)$ верхней треугольной части матрицы жесткости [K] элемента V_e

$$K_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}, \tag{46}$$

где

$$\alpha = 1, \ \dots, \ n, \quad \beta = \alpha, \ \dots, \ n,$$

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r_k^{xx} \overline{A}_{ijk},$$

$$B_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r_k^{yy} \overline{B}_{ijk},$$

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r_{\alpha_i} r_{\beta_j} r_k^{zz} \overline{C}_{ijk},$$

$$P_{\alpha\beta} = h\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{\alpha i} r_{\beta j}\overline{P}_{ij}, \tag{47}$$

$$\overline{A}_{ijk} = \int\limits_{V_e} \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}u_k dS, \quad \overline{B}_{ijk} = \int\limits_{V_e} \frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}u_k dS,$$

$$\overline{C}_{ijk} = \int\limits_{V_e} \frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}u_k dS, \quad \overline{P}_{ij} = \int_S \psi_i\psi_j dS. \tag{48}$$

Итак, в силу (46), (47) коэффициенты $K_{\alpha\beta}$ матрицы жесткости элемента V_e выражаются в явном виде через группу интегралов (48). Отметим, что $\overline{A}_{ijk} = \overline{A}_{jik}$, $\overline{B}_{ijk} = \overline{B}_{jik}$, $\overline{C}_{ijk} = \overline{C}_{jik}$, $\overline{P}_{ij} = \overline{P}_{ji}$. Аналогично, как и для трехмерных элементов задачи упругости, определяются интегралы (48) с применением параллельных вычислений. Для трехмерной задачи (37) при $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = \text{const}$ в параллельном алгоритме вычисления интегралов (48) максимальное число параллельных ветвей равно $N = 2n(n+1)$.

Для конечного элемента V_e формы прямоугольной призмы интегралы (48) определяются аналитически. Используя (41), (44), в (48) при $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq\ 1$ имеем

$$\overline{A}_{ijk} = \frac{\alpha_i\alpha_j(X_2^{a_x} - X_1^{a_x})}{a_x}\frac{(Y_2^{a_x} - Y_1^{a_x})}{b_x}\frac{(Z_2^{a_x} - Z_1^{a_x})}{c_x},$$

$$\dots$$

$$\overline{C}_{ijk} = \frac{\gamma_i\gamma_j(X_2^{a_z} - X_1^{a_z})}{a_z}\frac{(Y_2^{b_z} - Y_1^{b_z})}{b_z}\frac{(Z_2^{c_z} - Z_1^{c_z})}{c_z}, \tag{49}$$

где

$$a_x = \alpha_i + \alpha_j + \overline{\alpha}_k - 1, \quad b_x = \beta_i + \beta_j + \overline{\beta}_k + 1,$$

$$c_x = \gamma_i + \gamma_j + \overline{\gamma}_k + 1, \ \dots,$$

$$a_z = \alpha_i + \alpha_j + \overline{\alpha}_k + 1, \quad b_z = \beta_i + \beta_j + \overline{\beta}_k - 1,$$

$$c_z = \gamma_i + \gamma_j + \overline{\gamma}_k - 1,$$

$$\overline{P}_{ij} = \frac{(X_2^{a_0} - X_1^{a_0})}{a_0}\frac{(Y_2^{b_0} - Y_1^{b_0})}{b_0}\frac{(Z_2^{c_0} - Z_1^{c_0})}{c_0}; \tag{50}$$

здесь $a_0 = \alpha_i + \alpha_j + 1$, $\quad b_0 = \beta_i + \beta_j + 1$, $\quad c_0 = \gamma_i + \gamma_j + 1$, $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ — координаты узлов A_1, A_2 элемента V_e в глобальной системе координат XYZ (см. рис. 1).

При $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j = 0$ вычисления по формулам (46), (47), (49) упрощаются. Например, при $\alpha_j = 0$ в силу (44), (48) имеем $\overline{A}_{ijk} = 0$, при $\beta_i = 0$ имеем $\overline{B}_{ijk} = 0$ и т. д. Нижняя треугольная часть матрицы $[K]$ элемента V_e определяется из условия ее симметрии.

Расчеты, проведенные на моноЭВМ, показывают, что при численном интегрировании время построения матрицы жесткости элемента V_e второго порядка формы куба для задачи Дирихле ($K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = 1$) по формулам (46)–(48) примерно в 1.8 раз меньше, чем по станрдартной процедуре МКЭ, и в 2.5 раз меньше для элемента V_e третьего порядка.

Результаты данной работы являются обобщением результатов [8, 9].

Список литературы

[1] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике.* Мир, М., 1975.

[2] Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов.* Мир, М., 1977.

[3] Серебряков В. А. Модель и язык для параллельных вычислений при решении научных задач. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **33**, №7, 1993, 1083–1103.

[4] Воеводин В. В. *Математические модели и методы в параллельных процессах.* Наука, М., 1986.

[5] Ортега Дж. *Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем.* Мир, М., 1991.

[6] Демидов С. П. *Теория упругости.* Высшая школа, М., 1979.

[7] Ректорис К. *Вариационные методы в математической физике и технике.* Мир, М., 1985.

[8] Матвеев А. Д., Немировский Ю. В. Энергетический метод определения матриц жесткости двумерных и трехмерных высокоточных элементов. *Механика деформируемого твердого тела.* ТГУ, Томск, 1988, 95–106.

[9] Матвеев А. Д. *Аналитический метод построения жесткостей однородных элементов высокого порядка двух-, трехмерных задач упругости.* ВЦ СО РАН, Красноярск, 1993.

Поступила в редакцию 12 мая 1996 г.