

# ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И КРИВИЗНЫ КАНАЛА НА ТУРБУЛЕНТНУЮ СТРУКТУРУ ТЕЧЕНИЯ

У. С. АБДИБЕКОВ, Г. С. МАКАНАЛИНА

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы*  
e-mail: uali@kazsu.kz, kvt@kazsu.kz

Turbulent flow of conducting fluid in a curved channel is considered under the action of a horizontal magnetic field. A mathematical model is constructed. Problem on the flow of a conducting fluid from a vertical slot into a channel of rectangular section, with longitudinal curvature has been solved numerically.

## Введение

При проектировании технологического оборудования часто возникают задачи, в которых течение теряет устойчивость, или существует возможность реализации нескольких режимов течения при одном и том же наборе критериальных параметров.

Как известно, течения в большинстве технических устройств имеют турбулентный характер. Поэтому турбулентность как явление природы в прикладном плане определяет эффективность различных устройств и технологических процессов в энергетике, металлургии, химической и горно-обогатительной промышленности. В данной работе рассматривается магнитогидродинамическая турбулентность, так как магнитным полем можно бесконтактным способом воздействовать на поток и таким образом изучать фундаментальные свойства турбулентности.

Пространственное течение проводящей жидкости в канале прямоугольного сечения в поперечном магнитном поле исследуется в течение многих лет [1, 2]. Пространственным течениям в условиях воздействия сильного магнитного поля посвящены работы [3, 4]. Большой интерес вызывает более сложное течение, когда на поток проводящей жидкости действуют кривизна канала и поперечное магнитное поле [5–10]. Данный вопрос мало исследован, так как экспериментальные исследования таких течений в основном посвящены определению сопротивления трубы.

В течениях в изогнутых каналах без магнитного поля потери давления и скоростная структура потока на участке поворота в большей мере определяются такими явлениями, как отрыв потока и вторичные течения жидкости, вызванные центробежными силами инерции. В магнитном поле структура потока проводящей жидкости существенно изменяется и зависит от величины и ориентации магнитного поля по отношению к плоскости

поворота. При этом в магнитном поле роль сил инерции в общем балансе сил может оказаться пренебрежимо малой. Однако численные и экспериментальные исследования показали, что в сильном магнитном поле на участке поворота формируются узкие сдвиговые слои, скорость и градиенты скорости в которых велики и резко изменяются на сравнительно коротких участках. Это может привести к тому, что роль конвективного переноса импульса в балансе сил станет значительной.

При изучении магнитогидродинамических машин принимается допущение о малости магнитного числа Рейнольдса ( $Re_m \ll 1$ ), которое характеризует соотношение между процессами диффузии магнитного поля и его конвективным переносом при движении среды.

## 1. Постановка задачи и основные уравнения

В настоящей работе построена полуэмпирическая модель турбулентного сдвигового течения проводящей жидкости в канале со слабой кривизной  $H/R \ll 1$ , где  $H$  — высота канала,  $R$  — радиус кривизны канала.

Рассматриваемое полностью развитое турбулентное течение несжимаемой проводящей жидкости описывается следующей системой [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \\
 + \frac{\partial}{\partial x_1} \langle u_1^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial x_3} \langle -u_1 u_3 \rangle + St_0 (U_0 - U_1) - \frac{U_1 U_3}{R}, \\
 \frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_2^2 \rangle, \\
 \frac{\partial U_3}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + \\
 + \frac{\partial}{\partial x_1} \langle -u_3 u_1 \rangle + \frac{\partial}{\partial x_3} \langle u_3^2 \rangle + St_0 U_3 + \frac{U_1^2}{R}, \\
 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x_1$  — продольная координата,  $x_2$  — поперечная координата,  $x_3$  — вертикальная координата;  $U_i$ ,  $u_i$  — компоненты осредненной и пульсационной скоростей вдоль осей  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $U_0$  — средняя расходная скорость по сечению канала;  $t$  — время;  $P$  — давление;  $\rho$  — плотность жидкости;  $St_0 = (\sigma B_0 L) / (\rho U_0)$  — число Стюарта потока, характеризующее порядок отношения электромагнитной силы к силе инерции, где  $\sigma$  — электрическая проводимость среды;  $B_0$  — величина магнитной индукции внешнего поля;  $L$  — характерный размер. Магнитное поле направлено параллельно оси  $x_2$ , поэтому в системе уравнений (1) корреляции  $\langle u_1 u_2 \rangle$  и  $\langle u_2 u_3 \rangle$  отсутствуют [11].

Граничные условия задаются на твердой стенке для продольной составляющей в виде трения со скольжением

$$\frac{U_g}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^c G),$$

где  $y^c = x^c U_* / \nu$ ;  $\kappa = 0.4$  — постоянная Кармана;  $G = 9$  — коэффициент шероховатости стенки;  $U_*$  — динамическая скорость на стенке;  $U_g$  — пристенная скорость;  $x^c$  задается

так, чтобы выполнялось условие  $30 \leq y^c \leq 100$ . Для поперечной составляющей скорости задается условие прилипания  $U_2 = U_3 = 0$ .

Для замыкания системы уравнений (1) используются выражения для тензоров напряжений, которые получаются из уравнения одноточечных моментов второго порядка полей скорости, записанных для чисто сдвигового развитого турбулентного течения. С учетом сил магнитного поля и центробежных сил, вызванных кривизной канала, система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{u_j u_k}}{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\overline{u_i u_k}}{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) + \frac{2}{3} c \delta_{ij} \frac{E^{3/2}}{l} + \\ & + \frac{U_1}{R} \delta_{3i} \overline{u_1 u_j} - \frac{U_1}{R} \delta_{1i} \overline{u_3 u_j} + \frac{\alpha_* \sigma}{\rho} (2 \overline{u_i u_j} B_s B_s - \overline{u_i u_s} B_j B_s - \overline{u_j u_s} B_i B_s) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E$  — энергия пульсационного движения;  $l = \kappa x_3 \sqrt{1 - x_3/H}$  — масштаб турбулентности;  $\alpha_* = 1 - \beta$ ,  $\beta$  учитывает условия замыкания пульсационных токов [1, 12],  $B_i, B_j, B_s$  — компоненты вектора магнитной индукции ( $i, j, s = 1, 2, 3$ );  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Решение уравнений (2) представляется в виде двух сомножителей. Первый из них совпадает с выражением соответствующей величины в однородной среде, а второй учитывает одновременное влияние центробежных сил и сил магнитных полей, связанных с кривизной потока и наличием поперечных магнитных полей [13]:

$$\begin{aligned} u_2^2 &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{c}{k}\right) \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 \Omega_1, \quad \Omega_1 = \psi^2, \\ -u_1 u_3 &= l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 \Omega_2, \\ \Omega_2 &= \frac{\psi^3 (1 + De)}{(\psi^2 + 3\sqrt{\eta}St\psi + 2\eta St^2 - 6\eta De + 4\eta De^2)}, \\ u_3^2 &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{c}{k}\right) \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 \Omega_3, \\ \Omega_3 &= \frac{\psi^3 (\psi^2 + 3\sqrt{\eta}St\psi + 2\eta St^2 - 8\eta De + 2\eta De^2)}{(\psi + \sqrt{\eta}St) (\psi^2 + 3\sqrt{\eta}St\psi + 2\eta St^2 - 6\eta De + 4\eta De^2)}, \\ u_1^2 &= \frac{2}{3} \left(1 + 2\frac{c}{k}\right) \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 \Omega_4, \\ \Omega_4 &= \frac{\psi^2 (r\psi + m\sqrt{\eta}St) \Psi - 2p\eta\psi (1 + De)}{r (\psi + \sqrt{\eta}St) \Psi}, \\ \Psi &= \psi^2 + 3\sqrt{\eta}St\psi + 2\eta St^2 - 6\eta De + 4\eta De^2, \\ E &= \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left[ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 \right] \psi^2, \\ \psi &= - \left[ \sqrt{\eta}St + \frac{mSt}{6c^{2/3}} \right] + \left( \sqrt{\Phi} - \Theta \right)^{1/3} - \left( \sqrt{\Phi} + \Theta \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\Theta &= \left(\frac{\omega}{3}\right)^3 - \frac{\omega\zeta}{6} + \frac{\phi}{2}, & \Phi &= \Theta^2 + \left(\frac{\zeta}{3} - \frac{\omega^2}{9}\right)^3, \\ \omega &= 3\sqrt{\eta}\text{St} + \frac{m}{2c^{2/3}}\text{St}, \\ \zeta &= \left(2\eta + \frac{3m\sqrt{\eta}}{2c^{2/3}}\right)\text{St}^2 - \left(6\eta + \frac{2}{3}\right)De + \left(4\eta - \frac{1}{2}\right)De^2 - 1, \\ \phi &= \frac{m\eta}{c^{2/3}}\text{St}(\text{St}^2 - 3De + 2De^2).\end{aligned}$$

Безразмерные коэффициенты в (3) определены следующим образом:

$$\begin{aligned}De &= \frac{U_1/R}{\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)}, & \text{St} &= \frac{\alpha_*\sigma B^2/\rho}{\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)}, \\ k &= \sqrt{\frac{c}{k}} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{k}{c} - 1 \right) \right]^{3/4}, & c &= \left( \frac{c}{k} \right)^{3/2} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{k}{c} - 1 \right) \right]^{3/4}, \\ p &= \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{c}{k} \right), & \sqrt{\eta} &= \frac{p}{k^2}, \quad m = 2 - p, \quad r = m - p,\end{aligned}$$

где  $De$  — безразмерный локальный параметр кривизны,  $\text{St}$  — безразмерное локальное число Стюарта,  $k/c = 7$  устанавливается из теории однородной турбулентности как коэффициент анизотропии. Эти коэффициенты являются универсальными и при появлении различных внешних сил остаются неизменными.

Полученная модель турбулентности позволяет замкнуть основные уравнения для движения и приближенно рассчитать пульсационные характеристики течения проводящей жидкости в поперечном магнитном поле в слабо искривленных каналах.

## 2. Численный алгоритм

Для численного решения системы (1) замкнутой моделью турбулентности (3) приведем следующий алгоритм, подробно описанный в работе [14]. Применяется метод расщепления по физическим процессам. На первом этапе предполагаем, что перенос осуществляется за счет конвекции и диффузии [15]:

$$\begin{aligned}\frac{f^{n+\frac{1}{3}} - f^n}{\tau} &= \frac{1}{2}(L_1 f^{n+\frac{1}{3}} + L_1 f^n) + L_2 f^n + L_3 f^n, \\ \frac{f^{n+\frac{2}{3}} - f^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{2}(L_2 f^{n+\frac{2}{3}} - L_2 f^n), \\ \frac{f^{n+1} - f^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{2}(L_3 f^{n+1} - L_3 f^n),\end{aligned}\tag{4}$$

где  $L_1, L_2, L_3$  — операторы, включающие все производные по  $x_1, x_2, x_3$  соответственно;  $f = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}$ . Из первого шага (4) находим  $f^{n+\frac{1}{3}}$  и подставляем во второй шаг системы (4). Подставляя полученное значение  $f^{n+\frac{2}{3}}$  в третий шаг, получаем  $f^{n+1}$ . Каждое из уравнений (4) представляем в виде линейного алгебраического уравнения

$$A_i f_{i+1} + B_i f_i + C_i f_{i-1} = D_i,\tag{5}$$

которое решается методом скалярной прогонки. По изложенному методу определяются предварительные значения для составляющей скорости  $U_2^*$ ,  $U_3^*$  без учета давления.

На втором этапе производится расчет давления, представленного в виде  $P = P_1 + P_2$  [16]. Продольная составляющая скорости определяется как  $U_1 = \alpha + \beta \frac{\partial P_1}{\partial x_1}$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  — рекуррентные коэффициенты, которые определяются из третьего шага (4). Давление  $P_1$  находится из условия сохранения расхода в каждом поперечном сечении

$$S = \iint_{\Omega} U_1 dx_2 dx_3 \quad (6)$$

в виде

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1} = \frac{S - \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{N_3-1} \frac{(\alpha_{i,j,k} + \alpha_{i,j,k+1})}{2} \Delta x_3 + \sum_{k=1}^{N_3-1} \frac{(\alpha_{i,j+1,k} + \alpha_{i,j+1,k+1})}{2} \Delta x_3 \right] \Delta x_2}{\sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{N_3-1} \frac{(\beta_{i,j,k} + \beta_{i,j,k+1})}{2} \Delta x_3 + \sum_{k=1}^{N_3-1} \frac{(\beta_{i,j+1,k} + \beta_{i,j+1,k+1})}{2} \Delta x_3 \right] \Delta x_2}.$$

Две поперечные составляющие скорости представляются с поправкой давления в безразмерном виде:

$$U_2 = U_2^* + \tau \frac{\partial P_2}{\partial x_2}, \quad U_3 = U_3^* + \tau \frac{\partial P_2}{\partial x_3}. \quad (7)$$

Подставляя соотношение (7) и найденное значение  $U_1$  в уравнение неразрывности, получаем двумерное уравнение Пуассона для каждого сечения по координате  $x_1$ :

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_3^2} = - \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2^*}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3^*}{\partial x_3} \right), \quad (8)$$

которое решаем матричной прогонкой. Далее по (7) пересчитываем скорости  $U_2$ ,  $U_3$ .

### 3. Результаты численного моделирования

На основе изложенной модели численно решается задача течения проводящей жидкости, вытекающей из вертикальной щели в канал прямоугольного сечения с продольной кривизной (рис. 1). Проводящая жидкость, вытекая из щели, попадает в искривленный заполненный канал, на который действует поперечное магнитное поле. Течение имеет следующие параметры: высота канала  $H = 90$  мм, ширина щели  $d = 2$  мм, число Рейнольдса  $Re = 9300$ , параметр кривизны  $H/R = 0.025$ . Число Гартмана  $Ha = 82.5$ . Число  $Ha = B_0 L (\sigma / \rho \nu)$  характеризует порядок отношения электромагнитной силы к силе вязкого трения, где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости среды.

В результате моделирования получены профили составляющих скорости по всем трем координатам. Под воздействием магнитного поля течение деформируется. В центральной части потока течение затормаживается, а по краям ускоряется. В то же время начинается проявление центробежного ускорения на поток, а скорость вблизи выпуклой поверхности начинает отставать от скорости течения вблизи вогнутой поверхности.

Из анализа поля векторов скорости следует, что вначале поперечное движение стремится к центру потока, а в дальнейшем переходит в вихревое движение, которое наглядно представлено на рис. 2.

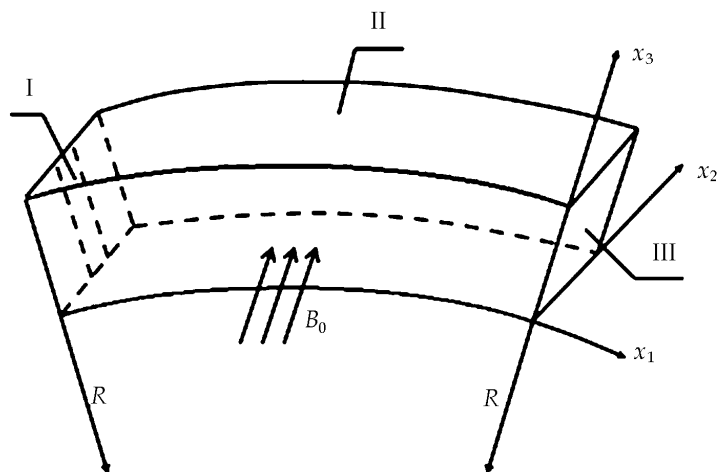


Рис. 1. Схема течения: I — вертикальная щель, II — расчетная область канала, III — выходное сечение канала.

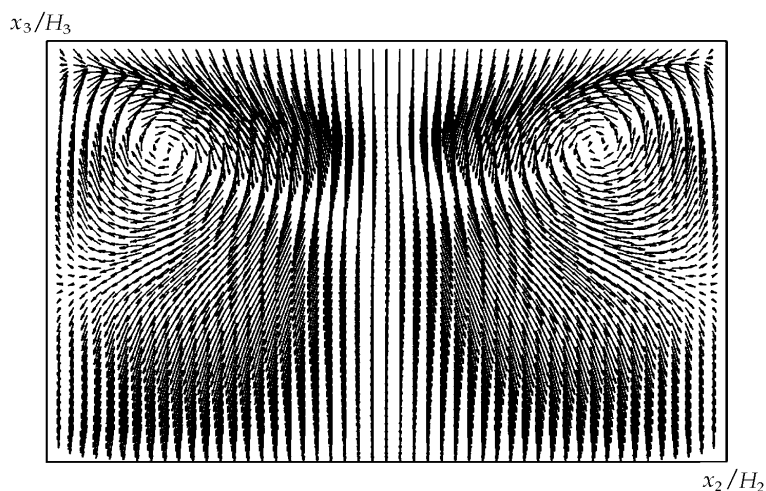


Рис. 2. Поле векторов скорости в поперечном сечении на расстоянии  $x_1/H = 1.5$  от начала канала.

По динамическим характеристикам можно судить, что поток во второй половине канала переходит в плавное течение, которое можно наблюдать по пространственным профилям продольной скорости, приведенным на рис. 3.

Проводящая жидкость, вытекающая из вертикальной щели, попадает в заполненный криволинейный канал, где имеется поперечное магнитное поле. Плоское течение деформируется, как уже говорилось, центральная часть потока тормозится. Постепенно течение переходит в плавное движение, и верхняя часть потока отстает в силу торможения центробежными силами, вызванными кривизной канала. Все происходящие изменения средних динамических характеристик течения сильно отражаются на турбулентных характеристиках потока. Интерес представляет распределение кинетической энергии турбулентного движения (рис. 4). На рис. 5 приведены изолинии распределения кинетической энергии турбулентного потока в поперечном сечении. Представленные данные турбулентных характеристик свидетельствуют о взаимной корреляции пульсационных характеристик потока, динамике изменения пульсационных характеристик по всей длине канала, связанных с присутствием поперечного магнитного поля и кривизной канала.

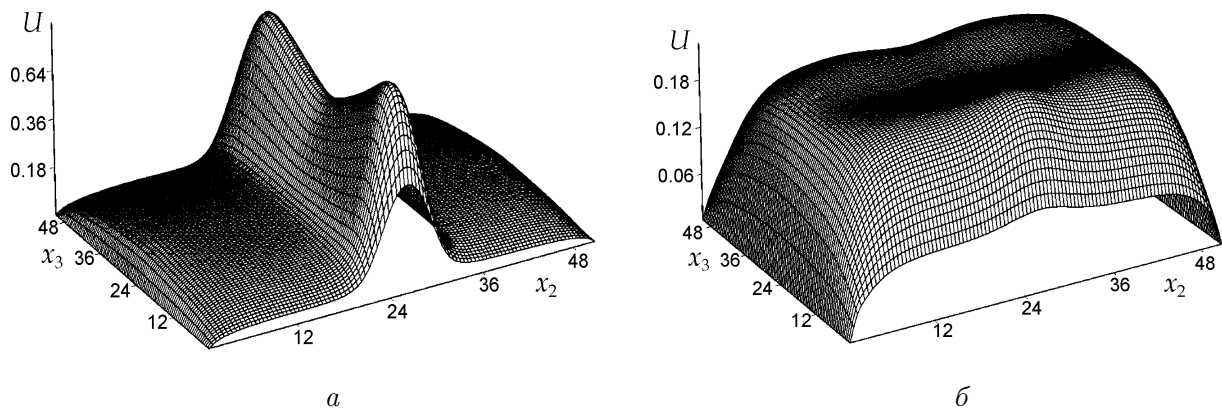


Рис. 3. Пространственный профиль продольной скорости на расстоянии  $x_1/H = 0.5$  (а),  $x_1/H = 1.5$  (б) от начала канала.

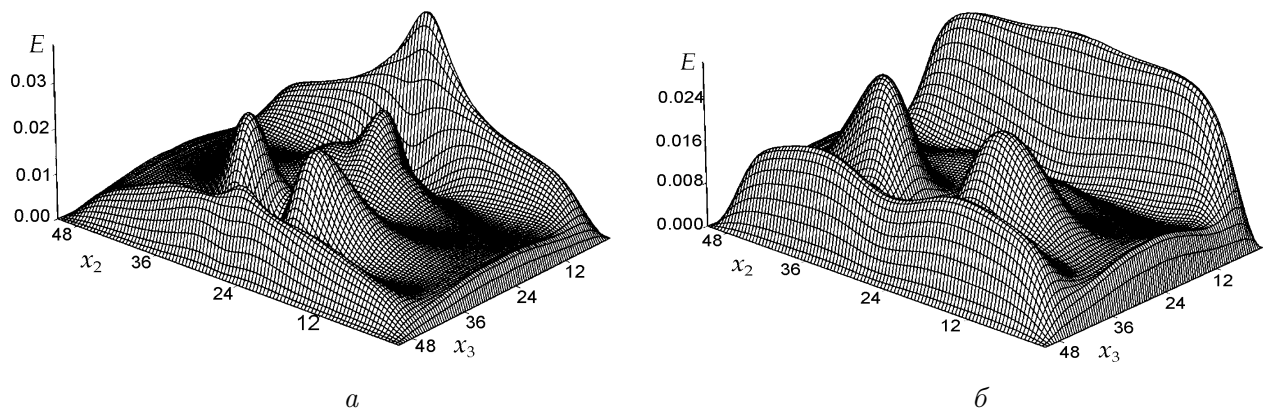


Рис. 4. Распределение кинетической энергии турбулентного потока в поперечном сечении.  $x_1/H = 0.5$  (а),  $x_1/H = 1.5$  (б) от начала канала.

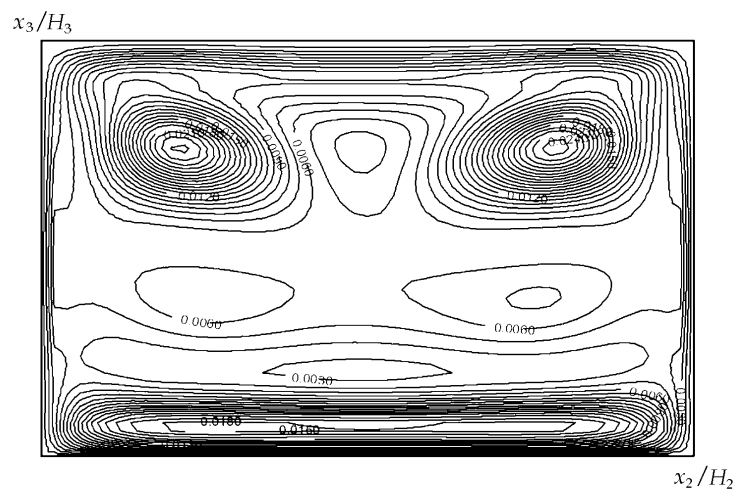


Рис. 5. Изолинии распределения кинетической энергии турбулентного потока в поперечном сечении  $x_1/H = 1.0$  от начала канала.

Таким образом, построенная математическая модель турбулентного сдвигового течения в трехмерном искривленном канале в присутствии поперечного магнитного поля позволяет моделировать динамику течения проводящей жидкости в данных условиях, а также наряду со средними характеристиками вычислять пульсационные характеристики течения. При этом, как видно из модели турбулентных характеристик, выражения для вторых моментов, учитывающие влияние поля и кривизны потока, не требуют какой-либо дополнительной эмпирической информации (по сравнению с течением в однородной среде).

## Список литературы

- [1] БРАННОВЕР Г.Г., ЦИНОБЕР А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970. 380 с.
- [2] ТАНАНАЕВ А.В. Течения в каналах МГД-устройств. М.: Атомиздат, 1979. 368 с.
- [3] HUNT J.C.R., LEIBOVICH S. Magnetohydrodynamic flow in channels of variable cross-section with strong transverse magnetic fields // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 28. Pt 2. P. 241–260.
- [4] WALKER J.S., LUDFORD G.S.S., HUNT J.C.R. Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields. Pt 2. Variable area rectangular ducts with conducting sides // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 46. Pt 4. P. 657–670.
- [5] АИТОВ Т.Н., КАЛЮТИК А.И., ТАНАНАЕВ А.В. Численное исследование динамики течения электропроводящей жидкости в области сложной геометрии при воздействии сильного магнитного поля // Магнитная гидродинамика. 1977. № 1. С. 73–78.
- [6] БОЧЕНИНСКИЙ В.П., ТАНАНАЕВ А.В., ЯКОВЛЕВ В.В. Экспериментальное изучение течения электропроводящей жидкости в изогнутых трубах кругового сечения в сильном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1977. № 4. С. 62–65.
- [7] ИЕВЛЕВ В.М. Численное моделирование турбулентных течений. М.: Наука, 1990. 273 с.
- [8] MOSER R.D., MOIN P. The effects of curvature in wall bounded turbulent flows // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 175. P. 479–510.
- [9] HOLLOWAY A.G.L., TAVOULARIS S. The effect of curvature on sheared turbulence // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 237. P. 569–603.
- [10] ДЖОРОГОВА Е.В., НОВОЖИЛОВ В.В. Расчет установившегося турбулентного течения в криволинейном канале // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 4. С. 819–824.
- [11] КОВНЕР Д.С., ЛЕВИН В.Б. О турбулентном течении электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле // Теплофизика высоких температур. 1964. Т. 2, № 5. С. 742–748.
- [12] ВОРОПАЕВ Г.А., ПТУХА Ю.А. Моделирование турбулентных сложных течений. Киев: Наукова думка, 1991. 166 с.



- [13] Абдибеков У.С. Влияние кривизны и поперечного магнитного поля на пульсационную структуру турбулентного течения // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2001. № 5. С. 60–63.
- [14] Абдибеков У.С., Аметов О.А., Смагулов Ш.С. Численное моделирование турбулентного сдвигового течения в криволинейном канале // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8 (спецвыпуск): Тр. Сов. рос.-каз. рабочей группы по вычисл. и информ. технологиям. С. 18–24.
- [15] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
- [16] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1991. Т. 2. 552 с.

*Поступила в редакцию 22 июля 2003 г.,  
в переработанном виде — 30 марта 2004 г.*