

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ

А. М. Гудов

*Кемеровский университет, Россия*

e-mail: good@kemgu.kemerovo.su

The nonlinear response of the free surface after bubble close under the free surface are considered. Assumed that the fluid motion is incompressible, inviscid and irrotational [1]. The cylindrical polar coordinates and the boundary element method [2] are used to the calculations. The different cases of motion are shown. The relation between the maximum height of jet on the free surface and the maximum length of waves that produced when the bubble is close, are discussed.

Нередко в результате действия локальной катастрофы, например, извержения подводного вулкана, выброса газов со дна водоема и т. д., образуется полость, заполненная газами или паром. При дальнейшей эволюции газовая полость (пузырь) может достигать свободной поверхности водоема, вызывая ее возмущения. При этом особый интерес представляет изучение взаимного влияния пузыря и поверхности жидкости. Проблема взаимодействия свободной поверхности и пузыря на протяжении всего периода его жизни исследовалась многими авторами (см., например, работы [3–5]), однако вопрос о дальнейшей эволюции свободной поверхности после того, как пузырь схлопывается, до сих пор изучался только с точки зрения брызговых эффектов, возникающих в результате подводного взрыва [6]. Вместе с тем исследование возмущений поверхности жидкости при ее взаимодействии с газовой полостью на малых глубинах имеет важное значение в вопросах обнаружения возможных очагов подводных катаклизмов.

Можно выделить два случая эволюции пузыря под поверхностью жидкости: схлопывание пузыря под ней и выход газов из пузыря через поверхность жидкости в атмосферу. При этом известно несколько режимов схлопывания пузыря: 1) с образованием кумулятивной струйки в нижней или верхней границе пузыря, 2) с образованием одновременно двух кумулятивных струек, направленных друг к другу и 3) без образования кумулятивных струй. Для двух первых случаев характерно значительное (в несколько раз) преобладание скорости частиц жидкости в вершине кумулятивной струи над скоростями частиц на остальной границе. При этом в момент коллапса кумулятивные струи сталкиваются между собой или с относительно “спокойными” слоями жидкости и происходит перераспределение кинетической энергии пузыря на образование ударной волны в жидкости (если скорости этих струй достаточно велики), акустические колебания, инициируемые схлопнувшимся

пузырем, подавление инерции слоев жидкости, находящихся в момент коллапса возле пузыря, и другие физические процессы. Потери энергии в момент коллапса при различных условиях могут составлять от 30 до 60 % (см. [7]).

Третий режим характеризуется как наиболее “спокойный”, при котором форма пузыря даже в последние моменты времени перед коллапсом остается выпуклой, а скорости частиц на границе сопоставимы между собой. В этом случае потери кинетической энергии на сопутствующие физические явления гораздо меньше. Поэтому в рамках принятой модели идеальной жидкости можно качественно проследить распространение возмущений свободной поверхности, возникающих после схлопывания газового пузыря.

## 1. Постановка задачи

Фактически решение поставленной задачи распадается на два этапа: I — решение задачи о динамике пузыря под свободной поверхностью и II — решение задачи о распространении известных возмущений свободной поверхности жидкости, которые возникли в момент коллапса пузыря.

**I. Задача о динамике пузыря.** Постановка задачи об эволюции газовой полости под свободной поверхностью жидкости в цилиндрических координатах  $(r, z, \theta)$ , а также метод численного исследования и алгоритм интегрирования по времени обсуждались в работе [8]. Там же были приведены результаты тестовых расчетов, подтверждающие обоснованность применения выбранной численной методики.

**II. Задача о распространении возмущения.** Для того, чтобы перейти к решению этой задачи, необходимо сделать ряд допущений. Предположим, что в момент времени коллапса пузыря  $t^*$  возможные пульсации давления мгновенно распространяются во все точки жидкости; после прохождения волны давления и акустических колебаний (если таковые возникают) система стабилизируется, и следовательно, становится известно положение свободной поверхности жидкости  $S(t^*)$  и распределение потенциала  $\phi$  на ней:

$$\phi|_{S(t^*)} = \phi^*.$$

Тогда в последующие моменты времени  $t > t^*$  можно определить новое положение свободной поверхности из условия

$$\frac{dx}{dt} = \nabla\phi(t, x), \quad x = x(r, z, \theta)$$

и новое распределение потенциала на этой границе из интеграла Коши — Лагранжа

$$\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\rho}\Delta P + g(z - \rho h) = 0.$$

После обезразмеривания задача решалась численно методом граничных элементов. При расчетах на свободной поверхности жидкости проводилось сглаживание с использованием интерполяционных формул высокого порядка [9] через каждые десять шагов по времени.

## 2. Численные результаты

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов задачи о схлопывании пузыря начального радиуса  $R_0 = 1.0R_m$  (здесь  $R_m$  представляет собой характерный линейный размер задачи — максимальный радиус “рэлеевского пузыря” [10]), который первоначально располагается на расстоянии  $h = 1.5R_m$  от свободной поверхности жидкости. Перепад давлений на свободной поверхности и в пузыре составляет  $\Delta P \approx 1.0(\rho g R_m)$ , начальное давление в пузыре полагается равным  $P_0 = 0.001(\rho g R_m)$ , уровень невозмущенной поверхности жидкости  $Z = 1.5R_m$ .

Начальное состояние задачи изображено на рис. 1, I, *a*, а состояние системы в моменты времени, близкие к коллапсу пузыря, — на рис. 1, I, *б*. Видно, что пузырь сохраняет свою форму выпуклой на протяжении почти 90% своей жизни. При этом схлопывание происходит при образовании незначительной кумулятивной струйки, которая даже не успевает достаточно сформироваться. В момент коллапса пузыря на свободной поверхности жидкости образуется впадина (рис. 1, II) глубиной  $a \approx 0.32R_m$ . Известно [11], что дальнейшая эволюция свободной поверхности при наличии впадины приводит к образованию кумулятивной струйки типа султана. Максимальная высота султана для этого случая составляет  $s \approx 0.94R_m$  (рис. 1, III), что сравнимо с начальным радиусом пузыря. Далее сформировавшийся султан под действием силы тяжести начинает распадаться, генерируя расходящиеся волны (рис. 1, IV, V). В последующие моменты времени султан колеблется с постоянным затуханием. В результате наложения генерируемых колебанием султана и отраженных от берега водоема (расположен на расстоянии  $10R_m$ ) волн на поверхности жидкости образуется рябь. Дальнейшая эволюция приводит к тому, что рябь на свободной поверхности исчезает и образуется одиночная волна с наибольшей максимальной амплитудой  $A \approx 0.15R_m$  (что составляет 15% от максимального радиуса пузыря), которая затем начинает распадаться под действием силы тяжести (рис. 1, V).

На рис. 1, VI, *a* показан график зависимости от времени вертикальной координаты  $Y = Z/R_m$ , а на рис. 1, VI, *б* — нормальной составляющей скорости в точке свободной поверхности, расположенной на оси симметрии данной задачи. Видно, что колебания кумулятивной струйки монотонно затухают и в дальнейшем переходят в почти равномерное колебание жидкости малой амплитуды. При этом начиная с момента времени  $t \approx 30\sqrt{R_m/g}$  процесс эволюции свободной поверхности можно считать установившимся.

На рис. 2 представлены результаты расчетов задачи о расширении пузыря с радиуса  $R_0 = 0.1R_m$  при тех же начальных условиях. Начальное состояние системы показано на рис. 2, I, *a*, состояние задачи в момент, когда пузырь достигает своего максимального радиуса  $R_{\max} \approx 0.4R_m$ , — на рис. 2, I, *б*.

В момент коллапса пузыря на свободной поверхности жидкости образуется впадина глубиной  $a \approx 0.01R_m$ , что составляет 2,5% от максимального радиуса пузыря (рис. 2, II). Для этого случая характерно образование небольшого султана с более гладкой границей в вершине (рис. 2, III). Максимальная амплитуда генерируемых при колебании султана волн (рис. 2, IV, V) в этом случае составляет  $A \approx 0.012R_m$ . Дальнейшая картина течения повторяет результаты предыдущей задачи с той разницей, что амплитуды сгенерированных волн составляют величину порядка 2–3% от максимального радиуса пузыря.

Из графика зависимости от времени вертикальной координаты точки свободной поверхности, расположенной на оси симметрии (рис. 2, VI, *a*), видно, что процесс колебания султана затухает гораздо быстрее, чем в предыдущем случае. Здесь процесс эволюции

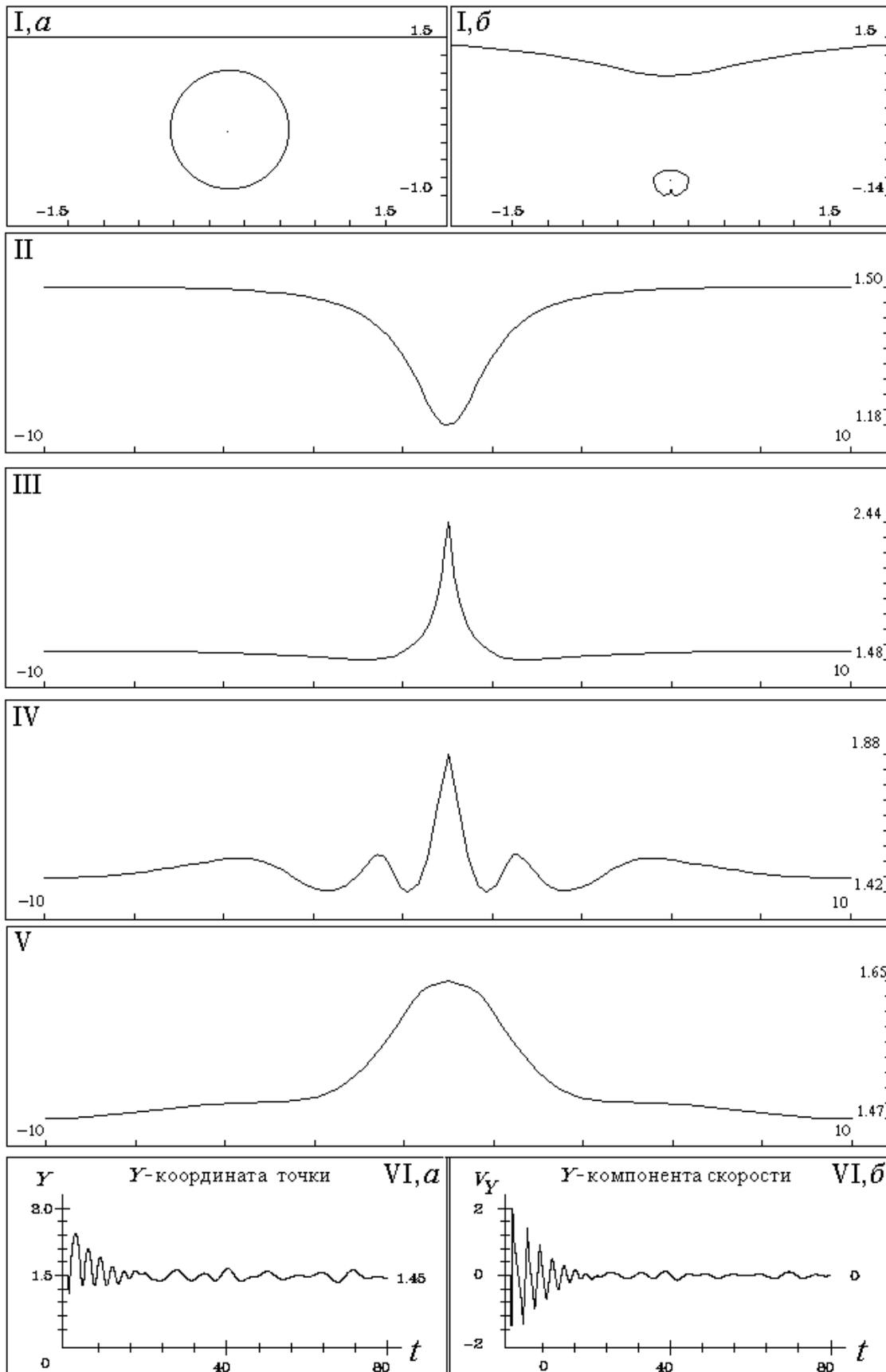


Рис. 1. Возмущение поверхности жидкости при схлопывании пузыря ( $R_0 = 1.0R_m$ ,  $P_0 = 0.001(\rho g R_m)$ ,  $h = 1.5R_m$ ).

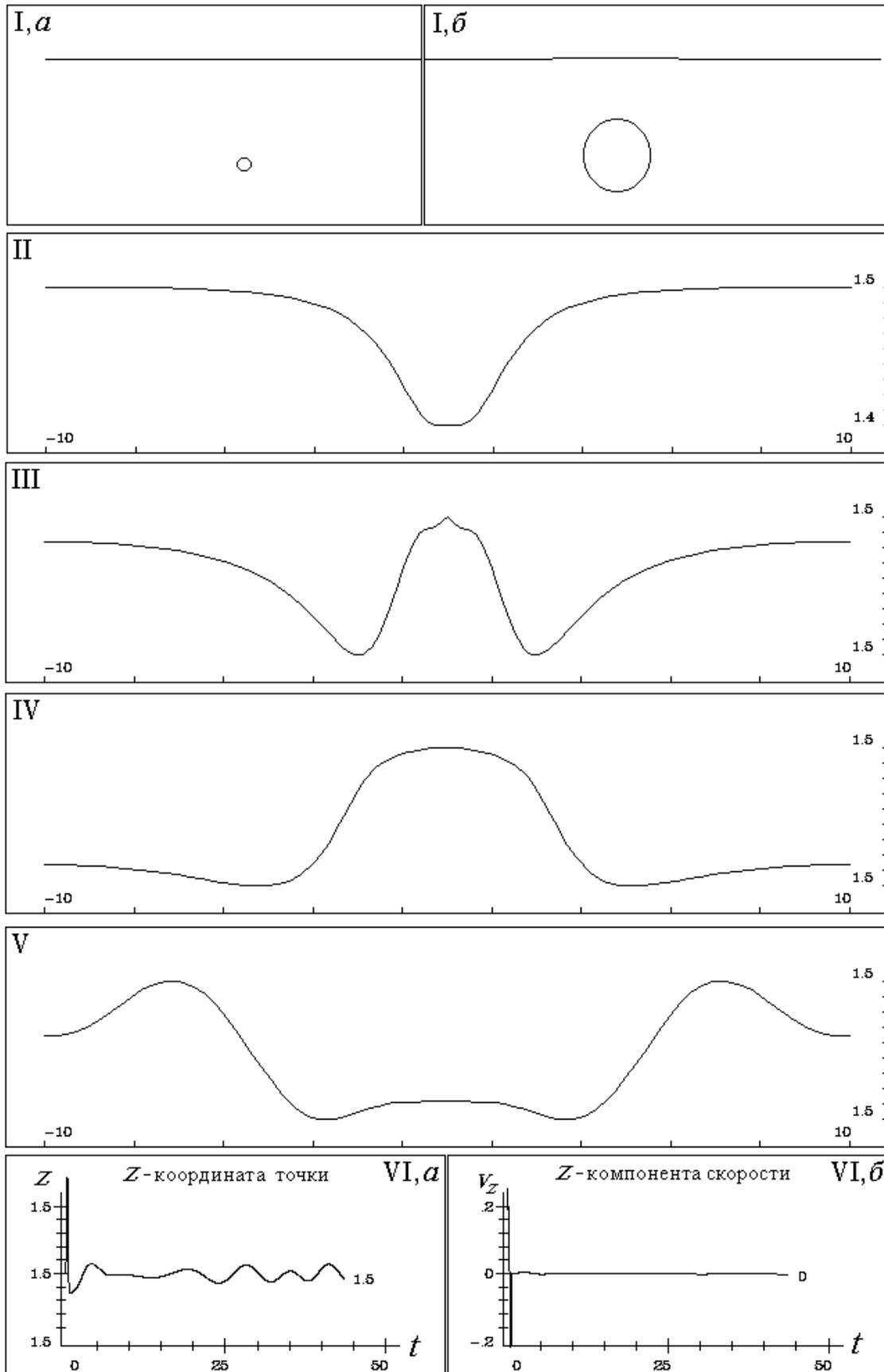


Рис. 2. Возмущение поверхности жидкости при схлопывании пузыря ( $R_0 = 0.1R_m$ ,  $P_0 = 0.001(\rho g R_m)$ ,  $h = 1.5R_m$ ).

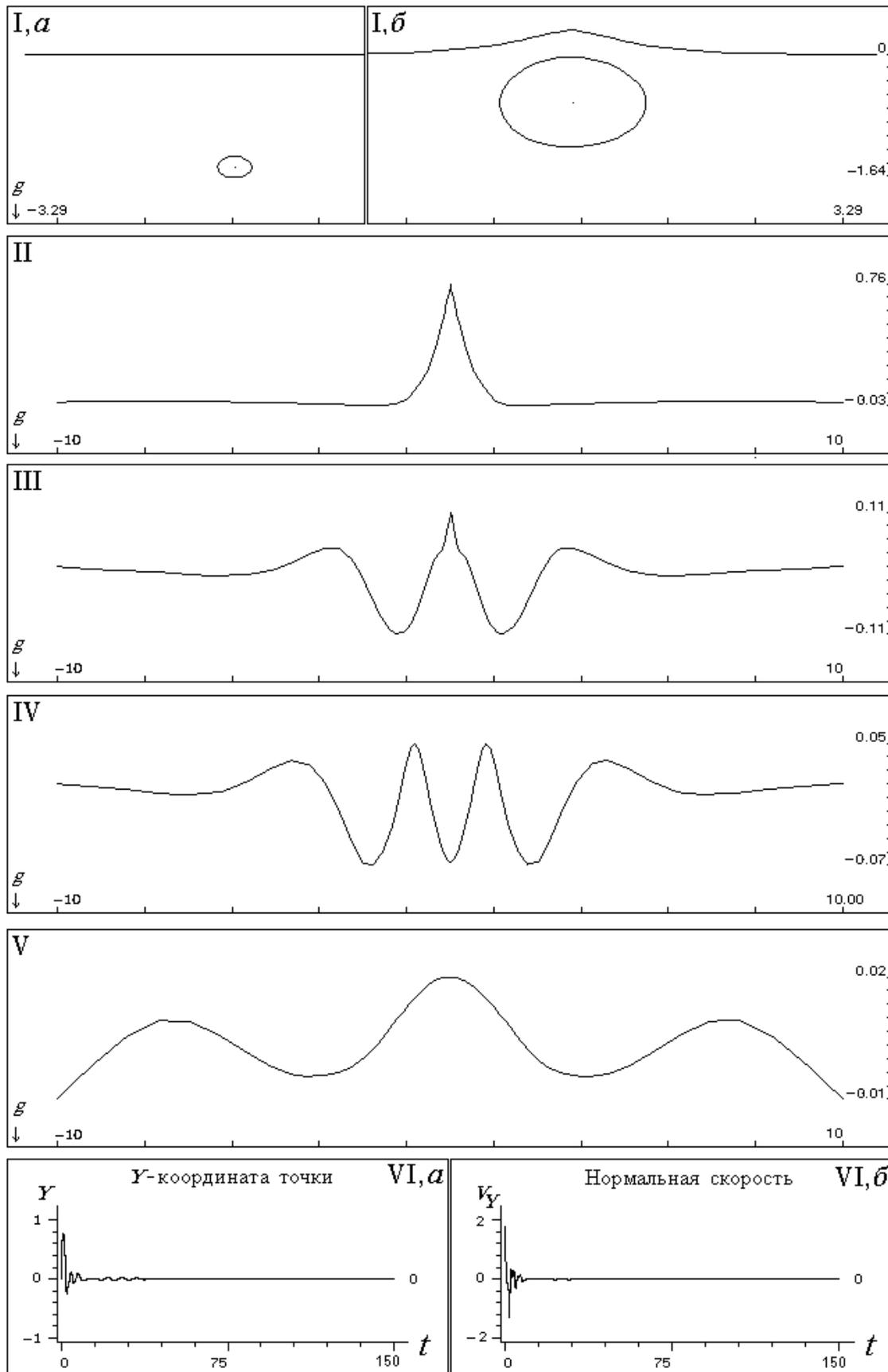


Рис. 3. Возмущение поверхности жидкости при схлопывании пузыря ( $R_0 = 0.1R_m$ ,  $P_0 = 10(\rho g R_m)$ ,  $h = 1.5R_m$ ).

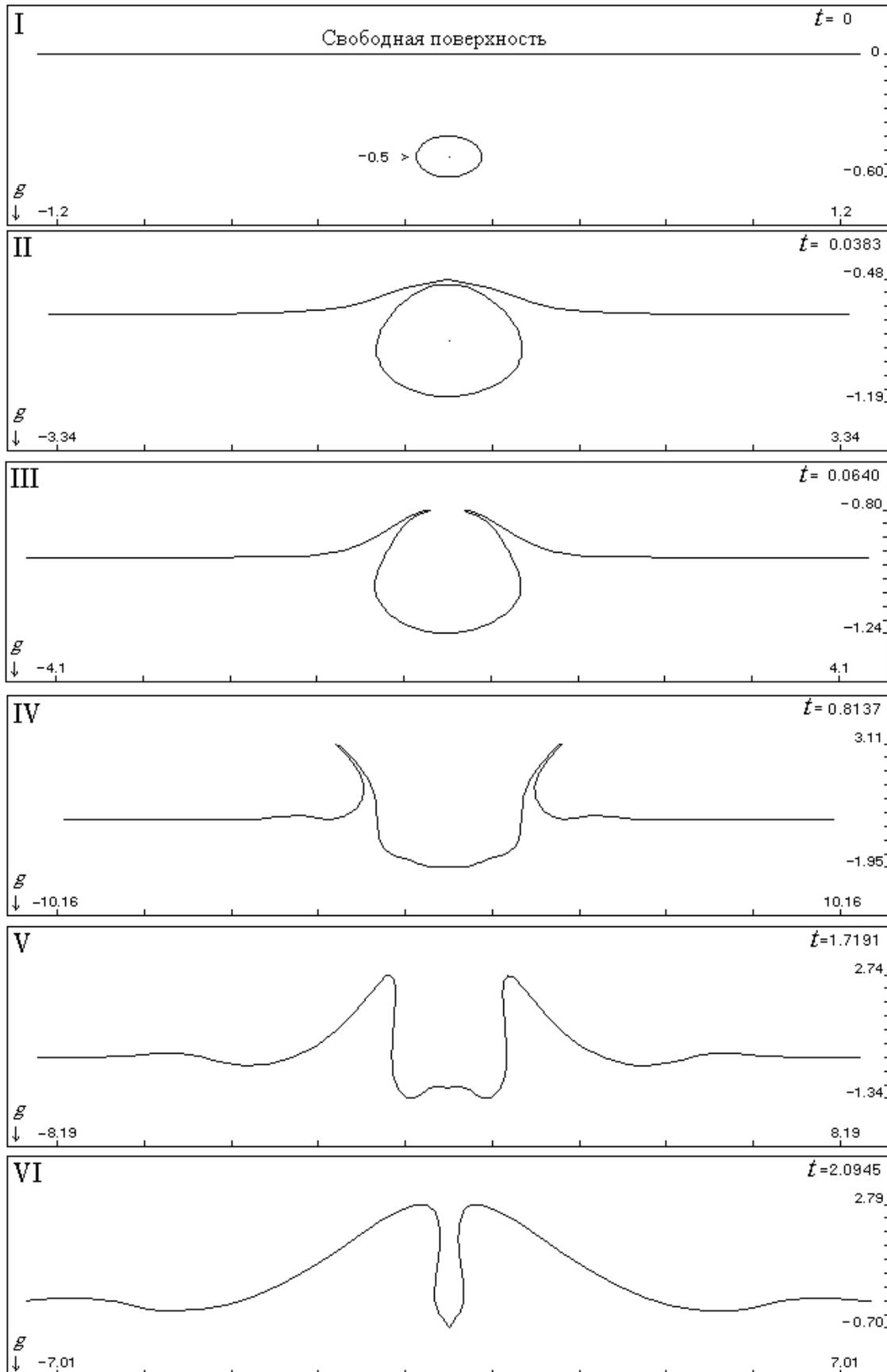


Рис. 4. Возмущение поверхности жидкости при схлопывании пузыря ( $R_0 = 0.1R_m$ ,  $P_0 = 10(\rho g R_m)$ ,  $h = 1.0R_m$ ).

свободной поверхности можно считать установившимся уже начиная с момента времени  $t \approx 20.0\sqrt{R_m/g}$ .

Результаты расчетов следующей задачи о схлопывании пузыря начального радиуса  $R_0 = 0.1R_m$  при начальном внутреннем давлении  $P_0 = 10(\rho g R_m)$  представлены на рис. 3. Пузырь в первые моменты времени располагается на расстоянии  $h = 1.5R_m$  от свободной поверхности жидкости. Первоначальное состояние задачи представлено на рис. 3, I, а; момент времени, при котором пузырь достигает своего максимального радиуса  $R_{\max} \approx 0.9R_m$ , показан на рис. 3, I, б.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что положение свободной поверхности в момент схлопывания пузыря для этого режима течения отличается от предыдущих задач — вместо впадины здесь наблюдается уже сформировавшийся купол максимальной высоты  $s \approx 0.78R_m$  (рис. 3, II). Дальнейшая эволюция свободной поверхности начинается с процесса распада этого купола под действием силы тяжести (рис. 3, III). При этом генерируется отходящая волна с максимальной амплитудой  $A \approx 0.06R_m$  (рис. 3, IV).

Однако колебания султана быстро затухают и дальнейшее возмущение свободной поверхности подразумевает распространение волн малой амплитуды порядка 1–2% от максимального радиуса пузыря (рис. 3, V). Как видно из графика зависимости от времени вертикальной координаты точки, расположенной на оси симметрии (рис. 3, VI, а), начиная с момента  $t \approx 40\sqrt{R_m/g}$  возмущения свободной поверхности практически не происходит, и, в отличие от предыдущих задач, установившаяся картина течения представляет собой почти “полный штиль”.

Если центр пузыря в начальный момент времени располагается на расстоянии  $h = 1.0R_m$  от невозмущенного уровня жидкости, то при всех остальных начальных условиях, характерных для предыдущей задачи, получается совершенно иная картина: пузырь не успевает схлопнуться, а выходит на поверхность.

На рис. 4, I показано начальное состояние системы в тот момент, когда пузырь начинает расширяться под действием своего внутреннего давления  $P_0 = 10(\rho g r_m)$  с начального радиуса  $R_0 = 0.1R_m$  (невозмущенный уровень жидкости  $Z = 0.0R_m$ ), на рис. 4, II — состояние задачи незадолго до момента времени, когда верхняя граница пузыря соприкасается со свободной поверхностью жидкости. При расчетах предполагалось, что последнее происходит в том случае, если минимальное расстояние от точек свободной поверхности до точек, расположенных на верхней границе пузыря, составляло величину  $d \leq 0.002R_0$ , т. е. не превышающую 2% от начального радиуса пузыря. После этого группа точек на свободной поверхности и границе пузыря, удовлетворяющая вышеназванному условию, удалялась из рассмотрения.

Положение свободной поверхности, изображенное на рис. 4, III, соответствует моменту времени, когда газ из пузыря вышел в атмосферу. Теперь поверхность жидкости представляет собой выемку, расположенную на месте бывшего пузыря, с наличием боковых брызговых струй, и ту часть свободной поверхности, которая деформировалась при приближении к ней пузыря. Видно, что в результате дальнейшей эволюции брызговые струйки выпрямляются (рис. 4, IV) и далее разворачиваются на внешнюю сторону выемки. При этом ширина выемки неуклонно сокращается. Из рис. 4, V заметно образование кумулятивной струи в центре “подшвы” выемки.

Однако в дальнейшем боковые стенки выемки становятся почти вертикальными, брызговые струи разворачиваются и вновь смыкаются, образуя полость с внутренним давлением, равным атмосферному (рис. 4, VI). Кумулятивная струя в подошве выемки так и не успевает достаточно сформироваться.

После нового замыкания и образования каверны численные расчеты прекращались. Дальнейшее исследование поведения свободной поверхности жидкости пока не проводилось.

### 3. Обсуждение полученных результатов

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Если пузырь схлопывается уже с максимального радиуса  $R_m$ , то на свободной поверхности жидкости образуется впадина в момент коллапса. Дальнейшая эволюция свободной поверхности приводит к образованию направленной вверх струи жидкости — султана. Эта струя имеет острую вершину и, как правило, достигает большой максимальной высоты, которая зависит от размеров впадины. При своем колебании султан генерирует отходящие волны, амплитуда которых составляет величину порядка 10–15 % от максимального радиуса пузыря.

2. Если пузырь первоначально расширяется с некоторого радиуса  $R_0$  и затем схлопывается под свободной поверхностью, то наблюдается несколько иная картина течения. В процессе эволюции пузыря давление на его свободной границе изменяется по адиабатическому закону  $P_g = P_0 \left( V(0)/V(t) \right)^\gamma$ ; здесь  $V(0)$  — начальный объем пузыря, а  $V(t)$  — его объем в текущий момент времени. Поэтому после того, как в первые моменты времени пузырь начинает быстро увеличивать свой объем, так же быстро падает и его внутреннее давление. Через короткий отрезок времени внутреннее давление в пузыре становится практически нулевым. Однако частицы жидкости на свободной границе пузыря успевают приобрести кинетическую энергию, достаточную для того, чтобы пузырь продолжал расширяться примерно половину своей жизни. При этом свободная поверхность жидкости над пузырем поднимается над невозмущенным уровнем. Достигнув некоторого максимального радиуса, пузырь начинает схлопываться, однако верхний слой жидкости продолжает подниматься благодаря приобретенной кинетической энергии. Поэтому впадины на свободной поверхности не образуется. Вместо этого в момент коллапса пузыря наблюдается возвышение свободной поверхности — купол, который в зависимости от начального расположения пузыря и внутреннего давления в нем может иметь как гладкую поверхность, так и острую вершину. После коллапса пузыря эволюция свободной поверхности жидкости определяется процессом разрушения купола, при котором генерируются отходящие волны.

На рис. 5 показана зависимость максимальной высоты султана и максимальной амплитуды волн от максимального радиуса, до которого расширялся пузырь при различных начальных условиях. Расчеты проводились при постоянном начальном расстоянии от центра пузыря до свободной поверхности жидкости  $h = 1.5R_m$  и радиусе  $R_0 = 0.1R_m$ , но для различных значений давления внутри пузыря:

$$\frac{P_0}{\rho g R_m} = (2.0; 3.0; 4.0; 5.0; 6.0; 7.0; 8.0; 9.0; 10.0; 11.0).$$

Из графика видно, что максимальная высота султана в момент коллапса пузыря начинает быстро расти при значениях максимального радиуса, превышающих  $R_{\max} \approx 0.9R_m$ , что соответствует начальному внутреннему давлению  $P_0 \approx 4.5(\rho g R_m)$ . До этого момента высота султана меняется незначительно, что объясняется недостаточностью начального внутреннего давления необходимого для преодоления инерции слоя жидкости, расположенного

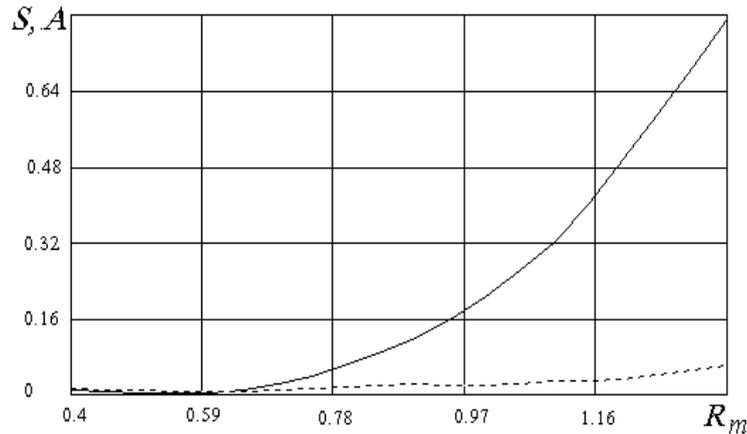


Рис. 5. Зависимость максимальной амплитуды волны  $A$  (пунктир) и максимальной высоты султана  $S$  (сплошная линия) от максимального радиуса.

над пузырьем, и сопротивления свободной поверхности. Однако при резком увеличении максимальной высоты султана не наблюдается сколько-нибудь существенного роста амплитуды отходящих волн. При наибольшей высоте султана  $S_{\max} \approx 0.78R_m$ , достигнутой при расчетах, максимальная амплитуда волны  $A_{\max} \approx 0.06R_m$ , что составляет лишь 6% от характерного максимального радиуса рэлеевского пузыря  $R_m$ , используемого для обезразмеривания задачи. При таких режимах течения процесс схлопывания пузыря порождает на свободной поверхности жидкости слабые волны, амплитуда которых не превышает 10% от характерного линейного размера задачи.

## Список литературы

- [1] ОВСЯННИКОВ Л. В. О всплывании пузыря. *Некоторые проблемы математики и механики*, Наука, М., 1972.
- [2] ТЕРЕНТЬЕВ А. Г., АФАНАСЬЕВ К. Е. *Численные методы в гидродинамике: Уч. пособие*. Чебоксарский гос. ун-т, 1987.
- [3] SHANINE G. L. Interaction between an oscillation bubble and a free surface. *Trans. ASME Serr. J, L. Fluids Engng.*, **99**, 1979, 706–716.
- [4] BLAKE J. R., TAIB B. B. AND DOHERTY G. Transient cavities near boundaries. Pt 2. Free surface. *J. Fluid Mech.*, **181**, 1987, 197–212.
- [5] DOMMERMUTH G. DOUGLAS, YUE K. P. DICK. Numerical simulations of nonlinear axisymmetric flows with a free surface. *J. Fluid Mech.*, **178**, 1987, 195–219.
- [6] МАДЕР Ч. Л. Взрывы вблизи поверхности воды. Подводные и подземные взрывы. Мир, М., 1974, 74–120.
- [7] КОУЛ Р. *Подводные взрывы*. ИЛ, М., 1950.
- [8] ГУДОВ А. М. Численное моделирование возмущений свободной поверхности, вызванных коллапсом газового пузыря. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №11, 1993, 92–103.

- [9] АФАНАСЬЕВ К. Е., САМОЙЛОВА Т. И. Техника использования метода граничных элементов в задачах со свободными границами. В “*Вычислительные технологии*”, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №11, 1993, 19–37.
- [10] RAYLEIGH LORD. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical void. *Phil. Mag.*, **34**, 1917, 94–98.
- [11] ЛАВРЕНТЬЕВ М. А., ШАБАТ Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. Наука, М., 1973.

*Поступила в редакцию 11 октября 1995 г.*