ПОСТРОЕНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

О. В. Капцов
Вычислительный центр СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail: kaptsov@cckr.krasnoyarsk.su

The exact solutions of some classical models of hydrodynamics are presented. These solutions are analogues of N-soliton solutions, they are expressed in terms of elementary functions and as a rule are characterized by singularities. Linear differential connections are employed for constructing the solutions.

В настоящее время теория солитонов прошла начальный этап бурного развития и вступила в стадию эволюции, позволяющую оценивать реальные достижения. Для нахождения солитонных решений часто применяются изощренные методы. С другой стороны, поскольку эти решения выражаются через элементарные функции, возникает мысль о том, что они могут быть получены более просто. Билинейный метод Хироты [1, 2] дает пример такого подхода, позволяющего достаточно легко находить решения экспоненциального типа.

В данной работе для построения многопараметрических решений предлагается использовать простейшие дифференциальные связи [3], заданные линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Как показывают примеры, это позволяет находить не только солитонные, но и другие решения, выражающиеся через элементарные функции и имеющие сингулярности. В качестве первого примера рассматривается уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), затем строятся решения уравнений идеальной несжимаемой жидкости.

Основная идея построения многопараметрических решений проста и состоит в следующем. Пусть имеется нелинейное уравнение с частными производными

$$F(u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1x_1}, ...) = 0. \tag{1}$$

Потребуем, чтобы функция $u(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяла дополнительным обыкновенным линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$L_i(u, u_{x_i}, u_{x_ix_i}, ...) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Подставляя общее решение системы (2) в (1), находим частное решение этого уравнения. Очевидно, что чем выше порядок системы (2), тем от большего числа параметров может зависеть частное решение. Данная конструкция легко переносится на системы уравнений с частными производными.

Если искомое уравнение (1) не имеет решений, удовлетворяющих линейной системе (2), то может оказаться, что после некоторой замены переменных преобразованное уравнение будет совместно с системой (2). Во всех примерах данной работы такие замены необходимы.

В качестве первого примера рассматривается уравнение КдФ

$$w_t + w_{xxx} + 6ww_x = 0. \tag{3}$$

В результате замены

$$w = 2d_x^2(\ln u),$$

где $d_x = d/dx$, приходим к уравнению пятого порядка, интегрируя которое, можно понизить порядок и получить билинейное уравнение [1]

$$u_{tx}u - u_t u_x + uu_{xxxx} - 4u_x u_{xxx} + 3u_{xx}^2 = 0. \tag{4}$$

Теперь будем присоединять к (4) линейные уравнения порядка 2^N. В случае $N = 1$ дифференциальные связи имеют вид

$$d_x(d_x - k)u = 0, \quad d_t(d_t + k^3)u = 0, \tag{5}$$

здесь $d_t = d/dt$, k — произвольная константа. При $k \neq 0$ система, состоящая из уравнений (4), (5), имеет решение

$$u = 1 + s \cdot \exp(kx - k^3 t), \tag{6}$$

а при $k = 0$

$$u = x + s, \tag{7}$$

где $s \in R$. Функции (6), (7) порождают известные решения уравнения (3): односолитонное и рациональное.

Пусть $N = 2$; тогда дифференциальные связи задаются уравнениями четвертого порядка

$$d_x(d_x - k_1)(d_x - k_2)(d_x - k_1 - k_2)u = 0, \tag{8}$$

$$d_t(d_t + k_1^3)(d_t + k_2^3)(d_t + k_1^3 + k_2^3)u = 0, \tag{9}$$

где k_1, k_2 — константы, которые могут быть и комплексными. Выбор этих констант определяет тип решения.

Если $k_1 = k_2 = 0$, то общее решение уравнения (8) имеет вид (с точностью до умножения на произвольную функцию от t)

$$u = x^3 + r_2 x^2 + r_1 x + r_0, \tag{10}$$

где r_i могут зависеть только от t. Подставляя представление (10) в (4) и решая полученные уравнения на функции r_i, получаем полиномиальное решение [1]

$$u = (x + a_1)^3 + 12t + a_2, \quad a_i \in R.$$

Если $k_1 \neq 0, k_2 = 0$, то, согласно (8), функция u должна иметь вид

$$u = 1 + r_1 x + (r_2 x + r_3)\exp(k_1 x),$$

где r_i — некоторые функции от t. Снова подставляя данное представление в (4) и решая уравнения для функций r_i, находим

$$r_1 = s_1, \quad r_2 = s_2 \exp(-k_1^3 t),$$

$$r_3 = \frac{s_2(k_1 - 4s_1)}{k_1 s_1} \exp(-k_1^3 t),$$

$$s_1, s_2 \in R.$$

Аналогичным образом изучаются остальные случаи. Ниже приведены некоторые решения системы (4), (8).

При $k_1 = k_2 = k \neq 0$

$$u = 1 + (r_1 x + r_2)\exp(kx) + r_3 \exp(2kx),$$

где

$$r_1 = s_1 \exp(-k^3 t), \quad r_2 = (-3k^2 s_1 t + s_2)\exp(-k^3 t),$$

$$r_3 = -(s_1/2k)^2 \exp(-2k^3 t), \quad s_1, s_2 \in R.$$

При $k_1 = ik, \quad k_2 = -ik$

$$u = kx + 3k^3 t + \sin(kx + k^3 t).$$

При $k_1 = a + ib, \quad k_2 = a - ib$

$$u = 1 + 2\exp A \cdot (s_1 \cos B - s_2 \sin B) - \frac{(s_1^2 + s_2^2)s_2^2}{s_1^2} \exp 2A,$$

где

$$A = a[x + (3b^2 - a^2)t], \quad B = b[x + (b^2 - 3a^2)t].$$

При $k_1, k_2 \in R$, $k_1 \cdot k_2 \neq 0$, $k_1 \neq k_2$ получается решение, выражающееся через экспоненциальные функции и порождающее двухсолитонное решение уравнения КдФ. Некоторые из представленных выше решений можно найти в [4, 5].

В случае $N = 3$ вместо дифференциальной связи (8) имеем уравнение восьмого порядка

$$d_x(d_x - k_1)(d_x - k_2)(d_x - k_3)(d_x - k_1 - k_2)(d_x - k_1 - k_3)\times$$

$$\times(d_x - k_2 - k_3)(d_x - k_1 - k_2 - k_3)u = 0. \tag{11}$$

Подобным же образом выписывается аналог уравнения (9). Снова выбирая различным образом константы k_i, можно найти разные решения системы (11), (4).

При $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ получаем полиномиальное решение

$$u = x^6 + 60x^3 t - 720t^2 + sx, \quad s \in R.$$

При $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \neq 0$, $k_i \neq k_j$ $(i \neq j)$ возникает трехсолитонное решение. Однако этими двумя известными решениями все возможности не исчерпываются.

Например, при $k_1 = k \neq 0$, $k_2 = k_3 = 0$ имеется решение

$$u = (x^3 + r_2 x^2 + r_1 x + r_0)\exp(kx) + (r_7 x^3 + r_6 x^2 + r_5 x + r_4)\exp(k^3 t),$$

где $r_2, r_7 \in R$, $r_1 = r_2^2/3$, $r_0 = 12t$, $r_6 = r_7(12 + kr_2)/k$, $r_5 = r_7(12 + kr_2)/3k^2$, $r_4 = r_7[12t + (2k \cdot r_2 + 12)^2/3k^3]$. При $k_1 = k_2 = k \neq 0$, $k_3 = 0$

$$u = (x + r_5)\exp(2kx - 2k^3 t) + (r_4 x^2 + r_3 x + r_2)\exp(kx - k^3 t) + r_1 x + r_0,$$

где $r_4, r_5 \in R$, $r_3 = -3k^2 r_4 t$, $r_1 = -r_4^2/4k^2$, $r_0 = -r_4^2(kr_5+8)/4k^3$, $r_2 = -r_4((3k^2 r_5 + 12k)t + r_5^2 + 8r_5/k + 12/k^2)$.

В случае $N=4$ дифференциальная связь задается уравнением шестнадцатого порядка

$$d_x \prod_{i=1}^{4}(d_x - k_i) \prod_{i>j}^{4}(d_x - k_j) \prod_{i>j>m} (d_x - k_i - k_j - k_m) \times$$

$$\times \left(d_x - \sum_{i=1}^{4} k_i\right) u = 0. \qquad (12)$$

Если все k_i попарно различны и не равны нулю, то решая уравнения (12), (4) можно получить функцию, порождающую четырехсолитонное решение. При $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ эти уравнения дают полиномиальное решение.

Если же $k_1 = k \neq 0$, а $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, то система (12), (4) имеет решение

$$u = Q\exp(kx - k^3 t) + P,$$

где Q, P — полиномы шестого порядка следующего вида

$$Q = x^6 + 60tx^3 - 720t^2,$$

$$P = x^6 + 60tx^3 - 720t^2 + 720tx^2/k + 24x^5/k + 240x^4/k^2 +$$
$$+ 1200x^3/k^3 + 2880(x/k^5 + x^2/k^4 + tx/k^2 + 2t/k^3).$$

При необходимости, перебирая различные комбинации из $k_1, ..., k_4$, можно построить и другие решения.

Остановимся кратко на уравнении Буссинеска

$$w_{tt} - w_{xx} - 3(w^2)_{xx} - w_{xxxx} = 0.$$

Выполняя замену $w = 2d_x^2(\ln u)$ и интегрируя два раза, можно получить билинейное уравнение [1]

$$uu_{tt} - u_t^2 - uu_{xxxx} + 4u_x u_{xxx} - 3u_{xx}^2 - uu_{xx} + u_x^2 = 0. \qquad (13)$$

Обыкновенные уравнения, задающие дифференциальные связи порядка 2^N, при $N = 2$ имеют вид

$$d_x(d_x - k_1)(d_x - k_2)(d_x - k_1 - k_2)u = 0, \qquad (14)$$

$$d_t(d_t - k_{11})(d_t - k_{22})(d_t - k_{11} - k_{22})u = 0, \qquad (15)$$

где $k_{11} = \varepsilon k_1 \sqrt{1+k_1^2}$, $k_{22} = \varepsilon k_2 \sqrt{1+k_2^2}$, $|\varepsilon| = 1$. Заметим, что уравнения (8) и (14) совпадают.

Вновь перебирая различные значения k_1, k_2, можно строить различные решения. Приведем лишь одно из них (случай чисто мнимых k_1, k_2)

$$u = s_1 x + s_2 t + \sin(kx - k\sqrt{1-k^2}t),$$

здесь $s_1 = \sqrt{3(k^4-k^2)/(4k^2-3)}$, $s_2 = s_1(2k^2-1)/\sqrt{1-k^2}$. Записывая высшие аналоги системы (14), (15) и интегрируя их, несложно найти другие решения уравнения Буссинеска.

Рассмотрим теперь уравнение на функцию тока

$$\triangle\psi = \exp(\psi) - \exp(-2\psi) \tag{16}$$

(здесь $\triangle$ — двумерный оператор Лапласа), которое можно использовать для описания стационарных двумерных течений идеальной жидкости. Некоторые решения этого уравнения имеются в [6, 7].

В результате замены переменных

$$\psi = \ln(1 - 2\triangle(\ln u)) \tag{17}$$

получаем трилинейное уравнение на u:

$$\triangle(\ln[1 - 2\triangle(\ln u)]) = 1 - 2\triangle(\ln u) - 1/[1 - 2\triangle(\ln u)]^2. \tag{18}$$

Представление подобное (17) использовалось в работах [8, 9] при исследовании решений уравнения Цецейки — Булло — Додда.

Дифференциальные связи, описывающие эволюцию по x, задаются теми же уравнениями порядка 2^N , что и для уравнения КдФ. При $N = 1$ имеем связь второго порядка

$$d_x(d_x - k)u = 0.$$

Прямым вычислением проверяется, что функция

$$u = 1 + s\exp(kx + \sqrt{3 - k^2}y)$$

удовлетворяет последнему уравнению и (18).

Следует отметить, что функция

$$u = (1 + s_1\exp(\sqrt{3}x)) \cdot (1 + s_2\exp(\sqrt{3}y))$$

удовлетворяет связям второго порядка

$$d_x(d_x - \sqrt{3})u = 0, \quad d_y(d_y - \sqrt{3})u = 0$$

и уравнению (18).

При $N = 2$ одна дифференциальная связь задается уравнением (8), а вторая есть

$$d_y(d_y - m_1)(d_y - m_2)(d_y - m_1 - m_2)u = 0, \tag{19}$$

где $m_i = \sqrt{3 - k_i^2}$. Если $k_1 \neq k_2$ и $k_1 \cdot k_2 \neq 0$, то система (8), (19), (18) имеет “двухсолитонное"решение

$$\begin{gathered} u = 1 + s_1\exp(k_1x + m_1y) + s_2\exp(k_2x + m_2y) + \\ + s_{12}\exp((k_1 + k_2)x + (m_1 + m_2)y), \end{gathered} \tag{20}$$

где $s_1, s_2 \in R$, $m_i = \sqrt{3 - k_i^2}$, $s_{12} = s_1s_2P_{12}$, причем P_{12} — выражается формулой

$$\begin{gathered} P_{12} = (4m_1m_2k_1k_2 - 9m_1m_2 + 4k_1^2k_2^2 - 6k_1^2 - 9k_1k_2 - 6k_2^2 + 27)/ \\ /(4m_1m_2k_1k_2 + 9m_1m_2 + 4k_1^2k_2^2 - 6k_1^2 + 9k_1k_2 - 6k_2^2 + 27). \end{gathered} \tag{21}$$

Если $k_1 = k_2 = k \neq 0$, то функция

$$u = 1 + (s_1 x + r_1 y)\exp(kx + my) + r_{12}\exp(2kx + 2my),$$

где $m = \sqrt{3 - k^2}$, $s_1 = -r_1 m/k$, $r_{12} = r_1^2/12k^2$, $r_1 \in R$, удовлетворяет уравнениям (8), (19) и (18). Если же $k_1 = k_2 = 0$, то решением этих уравнений является функция

$$u = (s_1 x + m_0)\exp(\sqrt{3}y) + m_1\exp(2\sqrt{3}y) + m_2,$$

где $m_2 = s_1^2/36m_1$.

При $N = 3$ можно построить следующее “трехсолитонное"решение:

$$u = 1 + \sum_{i=1}^{3} s_i\exp(k_i x + m_i y) + \sum_{3\geq i>j\geq 1} s_{ij}\exp[(k_i + k_j)x + (m_i + m_j)y] +$$
$$+ s_{123}\exp((k_1 + k_2 + k_3)x + (m_1 + m_2 + m_3)y), \tag{22}$$

где $s_{ij} = s_i s_j P_{ij}$, $s_{123} = s_1 s_2 s_3 P_{12} P_{13} P_{23}$, а величины P_{ij} определяются формулой (21) с заменой индексов 1 на i, 2 на j.

Вид решений (20), (22) в теории солитонов [1, 10] является типичным. Исходя из этого легко выписать “N-солитонную"формулу, но нужно при этом доказать, что она действительно задает решение уравнения (17).

Показанные выше примеры дают основание предполагать, что дифференциальные связи (8), (12) и их высшие аналоги при построении многопараметрических решений могут претендовать на роль универсальных.

В работах [11, 12] с помощью инвариантных подпространств конечных размерностей были найдены точные решения ряда нелинейных уравнений с частными производными. С. Р. Свирщевский заметил [13], что этот подход связан с инвариантностью линейных обыкновенных уравнений, решения которых и образуют инвариантные подпространства. Однако, как показано тем же автором, требование инвариантности накладывает жесткие ограничения на порядок линейного уравнения. В подходе, описанном в настоящей работе, нет требования инвариантности, что и позволяет дописывать дифференциальные связи высоких порядков и находить многопараметрические решения.

Список литературы

[1] Абловиц М., Сигур Ч. *Солитоны и метод обратной задачи.* Мир, М., 1987.

[2] Matsuno Y. *Bilinear Transformation Method.* Academic Press, N.-Y., 1984.

[3] Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.* Наука, Новосибирск, 1984.

[4] Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К. Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи. *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI (Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 133)*, Наука, Л., 1984, 17–37.

[5] Ablowitz M. J., Cornille H. On solutions of the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Lett.*, **72A**, No. 2, 1979, 277–280.

[6] Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике.* ВО Наука, Новосибирск, 1994.

[7] Марков Ю. А. Об одном классе точных решений кинетической модели равновесия плазмы. *ТМФ*, **91**, №1, 1992, 129–141.

[8] Cherdantzev I. Yu, Sharipov R. I. Solutons on a finite–gap background in Bullough–Dodd–Juber–Shabat model. *Int. J. Modern Phys.*, **5A**, No. 15, 1990, 3021–3027.

[9] Сафин С. С., Шарипов Р. А. Автопреобразование Беклунда для уравнения $u_{tx} = e^u - e^{-2u}$. *ТМФ*, **79**, №1, 151–154.

[10] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* Наука, М., 1980.

[11] Galaktionov V. A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications. *Diff. and Integral Equat.*, **3**, No. 5, 1990, 863–874.

[12] Galaktionov V. A., Posashkov S. A. Examples of nonsymmetric extinction and blow–up for quasilinear heat equations. *Diff. and Integral Equat.*, **8**, No. 1, 1995, 87–103.

[13] Svirshchevskii S. R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations. *Phys. Lett.*, **199A**, 1995, 344–348.

Поступила в редакцию 18 августа 1995 г.