# ЯВНЫЙ МЕТОД ТИПА РУНГЕ – КУТТЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА

И.В. Олемской
*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*
e-mail: OLIV@pobox.spbu.ru

An explicit one-step method is suggested for numerical integration of the ordinary differential equation system of a special type. Economical numerical schemes of the fifth order are constructed for the integration of both systems and second-order differential equations of this special type. The algorithm of allocation of structural features of the special type is described.

## 1. Метод интегрирования

В [1–3] выделен класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y_0' = f_0(x, y_0, y_1, \ldots, y_n); \tag{1}$$

$$y_i' = f_i(x, y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{l+1}, \ldots, y_n),\ i = 1, \ldots, l; \tag{2}$$

$$y_j' = f_j(x, y_0, \ldots, y_{j-1}),\ j = l+1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\begin{array}{ll}
x \in [X_0, X_k] \subset R, \quad y_s : [X_0, X_k] \longrightarrow R^{r_s}, & s = 0, \ldots, n, \\
f_0 : [X_0, X_k] \times R^m \longrightarrow R^{r_0}, & \\
f_i : [X_0, X_k] \times R^{m - \sum_{s=i}^{l} r_s} \longrightarrow R^{r_i}, & i = 1, \ldots, l, \\
f_j : [X_0, X_k] \times R^{m - \sum_{s=j}^{n} r_s} \longrightarrow R^{r_j}, & j = l+1, \ldots, n, \\
\sum\limits_{s=0}^{n} r_s = m. &
\end{array}$$

Две группы уравнений (2), (3) структурно тождественны. Каждое уравнение одной из групп уравнений (2), (3) занимает определенное место в последовательности уравнений своей группы. Его правая часть не зависит от искомых функций, поведение которых описывается этим и всеми последующими уравнениями этой же группы. Группа уравнений (1), в которую вошли все уравнения, не имеющие структурных особенностей указанного выше типа, называется *общей*. Она, как и группа уравнений (2), может отсутствовать. Для численного интегрирования систем (1)–(3) в [1–3] предложен явный одношаговый метод, в рамках которого построены расчетные схемы $q$-го порядка с числом этапов $m_s(q)$, $s = 0, \ldots, n$:

$$m_0(q) = q, \quad m_s(q) = q - 1, \quad q \leq 4, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что эффективность от применения этого метода при интегрировании систем (1)–(3) тем выше, чем больше отношение $\sum\limits_{s=r_0+1}^{m} w_s \Big/ \left(\sum\limits_{s=1}^{m} w_s\right)$. Здесь $w_s$ — весовые коэффициенты. Отсутствие общей группы уравнений (1) ($r_0 = 0$) в рассматриваемой системе может еще больше повысить эффективность метода. Это было продемонстрировано в [4, 5] для систем

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_2), \\ y_2' &= f_2(x, y_1) \end{cases} \tag{4}$$

($y_i, f_i$ — функции размерности $r_i$, $i = 1, 2$). Например, в [4] для систем (4) построены четырехэтапные расчетные схемы пятого порядка, которые на треть экономичнее формального метода Рунге — Кутты.

В данной работе для систем более общего вида

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{l+1}, \ldots, y_n), & i = 1, \ldots, l, \\ y_j' = f_j(x, y_1, \ldots, y_{j-1}), & j = l+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{5}$$

строится четырехэтапный метод пятого порядка. То есть так же, как и в [4], общая группа уравнений отсутствует ($r_0 = 0$), но снято ограничение на число уравнений в группах (2), (3), $n \geq 3$.

Приближенное решение ищем в виде

$$y_s(x + h) \approx z_s = y_s(x) + \sum_{p=1}^{4} b_{sp} k_{sp}(h), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где функции $k_{sp} \equiv k_{sp}(h)$ вычисляем в строгой последовательности

$$k_{11}, k_{21}, \ldots, k_{n1}, k_{12}, k_{22}, \ldots$$

по схеме

$$\begin{aligned} k_{ip} = hf_i(x + c_{ip}h, y_1(x) + \sum_{\eta=1}^{p} a_{ip1\eta} k_{1\eta}, \ldots, y_{i-1}(x) + \sum_{\eta=1}^{p} a_{i,p,i-1,\eta} k_{i-1,\eta}, \\ y_{l+1}(x) + \sum_{\eta=1}^{p-1} a_{i,p,l+1,\eta} k_{l+1,\eta}, \ldots, y_n(x) + \sum_{\eta=1}^{p-1} a_{ipn\eta} k_{n\eta}); \end{aligned} \tag{7}$$

$$k_{jp} = hf_j(x + c_{jp}h, y_1(x) + \sum_{\eta=1}^{p} a_{jp1\eta} k_{1\eta}, \ldots, y_{j-1}(x) + \sum_{\eta=1}^{p} a_{j,p,j-1,\eta} k_{j-1,\eta}), \tag{8}$$

$$c_{ip} = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \quad c_{j1} \neq 0, \quad j = l+1, \ldots, n.$$

При построении расчетных схем в [3] было получено несколько важных соотношений, связывающих параметры метода $a_{sp\nu\eta}, b_{sp}, c_{sp}$:

$$\begin{array}{lllllllllll} c_{1p} & = & \ldots & = & c_{lp} & \equiv & c_{ip}, & c_{l+1,p} & = & \ldots & = & c_{np} & \equiv & c_{jp}, \\ b_{1p} & = & \ldots & = & b_{lp} & \equiv & b_{ip}, & b_{l+1,p} & = & \ldots & = & b_{np} & \equiv & b_{jp}, \\ a_{ip1\eta} & = & \ldots & = & a_{i,p,i-1,\eta} & \equiv & a_{ip\hat{i}\eta}, & a_{i,p,l+1,\eta} & = & \ldots & = & a_{ipn\eta} & \equiv & a_{ipj\eta}, \\ a_{jp1\eta} & = & \ldots & = & a_{jpl\eta} & \equiv & a_{jpi\eta}, & a_{j,p,l+1,\eta} & = & \ldots & = & a_{j,p,j-1,\eta} & \equiv & a_{jp\hat{j}\eta}. \end{array} \tag{9}$$

Использование ограничений (9) существенно упрощает (не в ущерб экономичности) построение условий порядка, вывод и реализацию расчетных схем. Руководствуясь этими соображениями, здесь будем изначально использовать равенства (9). Это позволяет представить метод (6)–(8) в компактной табличной форме (табл. 1).

*Условия порядка* для метода (6)–(8) пятого порядка даже с использованием равенств (9) и стандартных предположений

$$\sum_{t=1}^{p} a_{spq\eta} = c_{sp} \tag{10}$$

представляют собой систему 102 нелинейных алгебраических уравнений с 50 неизвестными. Для поиска решения этой системы помимо упомянутых выше ограничений (9), (10) были использованы следующие *упрощающие* предположения:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=2}^{q} a_{iq\hat{i}\nu} c_{i\nu} = \frac{1}{2} c_{iq}^2, \quad \sum_{\nu=1}^{q-1} a_{iqj\nu} c_{j\nu} = \frac{1}{2} c_{iq}^2, \\
&\sum_{\nu=2}^{q} a_{jqi\nu} c_{i\nu} = \frac{1}{2} c_{jq}^2, \quad \sum_{\nu=1}^{q} a_{jq\hat{j}\nu} c_{j\nu} = \frac{1}{2} c_{jq}^2, \quad \sum_{\nu=2}^{q} a_{jqi\nu} c_{i\nu}^2 = \frac{1}{3} c_{jq}^3, \\
&\sum_{\nu=v}^{4} b_{i\nu} a_{i\nu\hat{i}v} = b_{iv}\left(1 - c_{iv}\right), \quad \sum_{\nu=v}^{4} b_{j\nu} a_{j\nu iv} = b_{iv}\left(1 - c_{iv}\right), \quad v = 2, \ldots, 4, \\
&\sum_{\nu=v+1}^{4} b_{i\nu} a_{i\nu jv} = b_{jv}\left(1 - c_{jv}\right), \quad \sum_{\nu=v}^{4} b_{j\nu} a_{j\nu\hat{j}v} = b_{jv}\left(1 - c_{jv}\right), \quad v = 1, \ldots, 4, \\
&\sum_{\nu=v+1}^{4} b_{i\nu} c_{i\nu} a_{i\nu jv} = \frac{1}{2} b_{jv}\left(1 - c_{jv}^2\right), \quad v = 1, \ldots, 4.
\end{aligned} \tag{11}$$

**Теорема 1.1.** *В рамках четырехэтапного метода* (6)–(8) *при выполнении ограничений* (9)–(11) *существует расчетная схема пятого порядка численного интегрирования системы* (5).

Методика построения вычислительных схем (с использованием *упрощающих* предположений в рамках структурного подхода) достаточно подробно рассматривалась в [3, 4]. Поэтому здесь, опуская как представление условий порядка, так и само доказательство теоремы, приведем его результат — вычислительную схему явного четырехэтапного одношагового метода пятого порядка — в табличной форме (табл. 2).

По характеристикам (число этапов, порядок точности на шаге) полученная в рамках структурного подхода расчетная схема (см. табл. 2), как и для системы (4), на треть экономичнее лучших существующих [6, 7].

Необходимость в интегрировании систем такого типа возникает, например, в задачах небесной механики, физики высоких энергий и т.д. Как следствие полученного результата (теорема 1.1) выпишем экономичную расчетную схему прямого интегрирования систем дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z'' & = & g(t, z, y, y'), \\ y'' & = & f(t, z, y, z'). \end{array} \right. \tag{12}$$

Приведенная стандартным образом $x_1 = z,\ x_2 = z',\ x_3 = y,\ x_4 = y'$ к нормальной форме систем первого порядка (после переобозначения $\xi_1 = x_2$, $\xi_2 = x_3$, $\xi_3 = x_1$, $\xi_4 = x_4$) система попадает в класс рассматриваемых (5).

Т а б л и ц а 1

Четырехэтапный метод (6)–(8) интегрирования системы (5)

| $c_{is}$ | $a_{is\hat{i}\nu}$ | | | | $a_{isj\nu}$ | | | $b_{is}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | 0 | | | $b_{i1}$ |
| $c_{i2}$ | $a_{i2\hat{i}1}$ | $a_{i2\hat{i}2}$ | | | $a_{i2j1}$ | | | $b_{i2}$ |
| $c_{i3}$ | $a_{i3\hat{i}1}$ | $a_{i3\hat{i}2}$ | $a_{i3\hat{i}3}$ | | $a_{i3j1}$ | $a_{i3j2}$ | | $b_{i2}$ |
| $c_{i4}$ | $a_{i4\hat{i}1}$ | $a_{i4\hat{i}2}$ | $a_{i4\hat{i}3}$ | $a_{i4\hat{i}4}$ | $a_{i4j1}$ | $a_{i4j2}$ | $a_{i4j3}$ | $b_{i4}$ |

| $c_{js}$ | $a_{jsi\nu}$ | | | | $a_{js\hat{j}\nu}$ | | | | $b_{js}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{j1}$ | $a_{j1i1}$ | | | | $a_{j1\hat{j}1}$ | | | | $b_{j1}$ |
| $c_{j2}$ | $a_{j2i1}$ | $a_{j2i2}$ | | | $a_{j2\hat{j}1}$ | $a_{j2\hat{j}2}$ | | | $b_{j2}$ |
| $c_{j3}$ | $a_{j3i1}$ | $a_{j3i2}$ | $a_{i3i3}$ | | $a_{j3\hat{j}1}$ | $a_{j3\hat{j}2}$ | $a_{j3\hat{j}3}$ | | $b_{j3}$ |
| $c_{j4}$ | $a_{j4i1}$ | $a_{j4i2}$ | $a_{j4i3}$ | $a_{j4i4}$ | $a_{j4\hat{j}1}$ | $a_{j4\hat{j}2}$ | $a_{j4\hat{j}3}$ | $a_{j4\hat{j}4}$ | $b_{j4}$ |

Применение для ее интегрирования метода (6)–(8) (см. табл. 1) и последующее сведение расчетной схемы к алгоритмически простому виду дают вычислительную схему четырехэтапного метода пятого порядка прямого интегрирования системы (12) вида

$$z(t+h) = z(t) + h\,z'(t) + h\sum_{p=1}^{4} B_{ip}k_{ip} + O(h^6), \quad z'(t+h) = z'(t) + \sum_{p=1}^{4} b_{ip}k_{ip} + O(h^6),$$
$$y(t+h) = y(t) + h\,y'(t) + h\sum_{p=1}^{4} B_{jp}k_{jp} + O(h^6), \quad y'(t+h) = y'(t) + \sum_{p=1}^{4} b_{jp}k_{jp} + O(h^6), \tag{13}$$

где функции $k_{ip}$, $k_{jp}$ из соображений явности вычисляются в строгом порядке $k_{i1}$, $k_{j1}$, $k_{i2}$, $\ldots$, $k_{i4}$, $k_{j4}$ по правилам

$$k_{ip} = h\,g\left(t + C_{ip}h, z + C_{ip}h\,z' + h\sum_{d=1}^{p-1} A_{ipid}k_{id}, y + C_{ip}h\,y' + h\sum_{d=1}^{p-1} A_{ipjd}k_{jd}, y' + \sum_{d=1}^{p-1} a_{ipjd}k_{jd}\right),$$
$$k_{jp} = h\,f\left(t + C_{jp}h, z + C_{jp}h\,z' + h\sum_{d=1}^{p} A_{jpid}k_{id}, y + C_{jp}h\,y' + h\sum_{d=1}^{p-1} A_{jpjd}k_{jd}, z' + \sum_{d=1}^{p} a_{jpid}k_{id}\right),$$
$$B_{ip} = \sum_{d=p}^{4} b_{jd}a_{jdip}, \quad B_{jp} = \sum_{d=p+1}^{4} b_{id}a_{idjp}, \quad A_{ipid} = \sum_{s=d}^{p-1} a_{ipjs}a_{jsid},$$
$$A_{ipjd} = \sum_{s=d+1}^{p} a_{ip\hat{i}s}a_{isjd}, \quad A_{jpid} = \sum_{s=d}^{p} a_{jp\hat{j}s}a_{jsid}, \quad A_{jpjd} = \sum_{s=d+1}^{p} a_{jpis}a_{isjd}.$$

Значения параметров $a_{ipjd}$, $a_{jpid}$, $b_{ip}$, $b_{jp}$ — в табл. 2, а параметров $A_{ipid}$, $A_{ipjd}$, $A_{jpid}$, $A_{jpjd}$, $A_{jpid}$, $A_{jpjd}$ $B_{ip}$, $B_{jp}$, $C_{ip}$, $C_{jp}$ — в табл. 3.

Т а б л и ц а 2

Метод (6)–(8) пятого порядка интегрирования систем (5)

| $c_{is}$ | $a_{is\hat{i}\nu}$ | | | | $a_{isj\nu}$ | | | $b_{is}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | | | $0$ | | | $\frac{82}{285}+\frac{77\sqrt{6}}{1140}$ |
| $\frac{4}{15}-\frac{\sqrt{6}}{15}$ | $\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{6}}{30}$ | $\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{6}}{30}$ | | | $\frac{4}{15}-\frac{\sqrt{6}}{15}$ | | | $-\frac{297}{1337}-\frac{351\sqrt{6}}{764}$ |
| $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}$ | $\frac{19}{160}-\frac{19\sqrt{6}}{640}$ | $\frac{9}{32}-\frac{9\sqrt{6}}{128}$ | $\frac{1}{10}-\frac{\sqrt{6}}{40}$ | | $\frac{9}{32}-\frac{9\sqrt{6}}{128}$ | $\frac{7}{32}-\frac{7\sqrt{6}}{128}$ | | $\frac{2432}{2415}+\frac{64\sqrt{6}}{345}$ |
| $\frac{7}{10}+\frac{\sqrt{6}}{20}$ | $\frac{19971}{29375}+\frac{142933\sqrt{6}}{940000}$ | $-\frac{64143}{41125}-\frac{772839\sqrt{6}}{1316000}$ | $\frac{263168}{205625}+\frac{110052\sqrt{6}}{205625}$ | $\frac{3}{10}-\frac{\sqrt{6}}{20}$ | $\frac{4977}{9400}-\frac{4419\sqrt{6}}{18800}$ | $\frac{2213}{9400}+\frac{9809\sqrt{6}}{112800}$ | $-\frac{61}{940}+\frac{4469\sqrt{6}}{22560}$ | $-\frac{18184}{250401}+\frac{51676\sqrt{6}}{250401}$ |

| $c_{js}$ | $a_{jsi\nu}$ | | | | $a_{js\hat{j}\nu}$ | | | | $b_{js}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{6}}{30}$ | $\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{6}}{30}$ | | | | $\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{6}}{30}$ | | | | $0$ |
| $\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}$ | $\frac{1}{10}-\frac{\sqrt{6}}{40}$ | $\frac{3}{10}-\frac{3\sqrt{6}}{40}$ | | | $\frac{3}{10}-\frac{3\sqrt{6}}{40}$ | $\frac{1}{10}-\frac{\sqrt{6}}{40}$ | | | $\frac{4}{9}-\frac{\sqrt{6}}{36}$ |
| $\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}$ | $\frac{1337}{1250}+\frac{1947\sqrt{6}}{5000}$ | $-\frac{4551}{1750}-\frac{1083\sqrt{6}}{1000}$ | $\frac{8448}{4375}+\frac{496\sqrt{6}}{625}$ | | $-\frac{6}{25}+\frac{3\sqrt{6}}{200}$ | $\frac{17}{50}+\frac{27\sqrt{6}}{200}$ | $\frac{3}{10}-\frac{\sqrt{6}}{20}$ | | $\frac{4}{9}+\frac{\sqrt{6}}{36}$ |
| $1$ | $-\frac{103}{38}-\frac{83\sqrt{6}}{76}$ | $\frac{2901}{382}+\frac{11721\sqrt{6}}{5348}$ | $-\frac{72}{23}-\frac{272\sqrt{6}}{161}$ | $-\frac{62874}{83467}+\frac{49236\sqrt{6}}{83467}$ | $-\frac{3}{8}+\frac{3\sqrt{6}}{8}$ | $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$ | $\frac{9}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}$ | $0$ | $\frac{1}{9}$ |

Т а б л и ц а 3

Метод пятого порядка (13) интегрирования систем (12)

| $C_{is}$ | $A_{isi\nu}$ | | | $A_{isj\nu}$ | | | $B_{is}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | | | | | $\frac{82}{285}+\frac{77\sqrt{6}}{1140}$ |
| $\frac{4}{15}-\frac{\sqrt{6}}{15}$ | $\frac{11}{225}-\frac{4\sqrt{6}}{225}$ | | | $\frac{11}{225}-\frac{4\sqrt{6}}{225}$ | | | $-\frac{927}{2674}-\frac{1881\sqrt{6}}{5348}$ |
| $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}$ | $\frac{209}{2560}-\frac{19\sqrt{6}}{640}$ | $\frac{231}{2560}-\frac{21\sqrt{6}}{640}$ | | $\frac{363}{2560}-\frac{33\sqrt{6}}{640}$ | $\frac{77}{2560}-\frac{7\sqrt{6}}{640}$ | | $\frac{1552}{2415}+\frac{176\sqrt{6}}{805}$ |
| $\frac{7}{10}+\frac{\sqrt{6}}{20}$ | $\frac{4902303}{9400000}+\frac{1320067\sqrt{6}}{9400000}$ | $-\frac{14304369}{13160000}-\frac{5743641\sqrt{6}}{13160000}$ | $\frac{840941}{1028125}+\frac{340324\sqrt{6}}{1028125}$ | $\frac{34311}{188000}-\frac{8373\sqrt{6}}{94000}$ | $\frac{55983}{376000}+\frac{23087\sqrt{6}}{376000}$ | $-\frac{5933}{75200}+\frac{4713\sqrt{6}}{75200}$ | $-\frac{6986}{83467}+\frac{16412\sqrt{6}}{250401}$ |

| $C_{js}$ | $A_{jsi\nu}$ | | | | $A_{jsj\nu}$ | | | $B_{js}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{6}}{30}$ | $\frac{11}{450}-\frac{2\sqrt{6}}{225}$ | | | | | | | $0$ |
| $\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}$ | $\frac{11}{160}-\frac{\sqrt{6}}{40}$ | $\frac{33}{800}-\frac{3\sqrt{6}}{200}$ | | | $\frac{11}{100}-\frac{\sqrt{6}}{25}$ | | | $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{6}}{36}$ |
| $\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}$ | $\frac{18281}{100000}+\frac{3917\sqrt{6}}{50000}$ | $-\frac{57963}{140000}-\frac{12591\sqrt{6}}{70000}$ | $\frac{7464}{21875}+\frac{3096\sqrt{6}}{21875}$ | | $-\frac{13}{250}-\frac{7\sqrt{6}}{250}$ | $\frac{81}{500}+\frac{17\sqrt{6}}{250}$ | | $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{6}}{36}$ |
| $1$ | $\frac{679}{800}+\frac{537\sqrt{6}}{1600}$ | $-\frac{2157}{1120}-\frac{2211\sqrt{6}}{2240}$ | $\frac{276}{175}+\frac{114\sqrt{6}}{175}$ | $0$ | $-\frac{1}{4}+\frac{5\sqrt{6}}{16}$ | $-\frac{\sqrt{6}}{8}$ | $\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{6}}{16}$ | $0$ |

# 2. Приведение систем к специальному виду

Структурный метод интегрирования систем $m$ обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) самого общего вида

$$z_k' = \varphi_k(x, z_1, \ldots, z_m), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

предполагает, что существует преобразование, приводящее систему (14) к виду (1)–(3). В качестве такого преобразования выбираем перестановку (переобозначение) уравнений системы (14).

Задача состоит в том, чтобы указать порядок следования уравнений и нумерации переменных исходной системы (14), при котором для преобразованной системы

$$\pi z' = \pi\varphi(x, \pi z) \tag{15}$$

с выделенными особенностями (1)–(3) эффект от применения структурного подхода будет максимальным, т. е. максимально отношение $\sum\limits_{s=r_0+1}^{m} w_{\pi(s)} / \sum\limits_{s=1}^{m} w_{\pi(s)}$.

Здесь и в дальнейшем $\pi z = \big(z_{\pi(1)}, z_{\pi(2)}, \ldots, z_{\pi(m)}\big)^T$, $\pi\varphi = \big(\varphi_{\pi(1)}, \varphi_{\pi(2)}, \ldots, \varphi_{\pi(m)}\big)^T$, $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m))$ — перестановка элементов множества $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, определяющая порядок следования уравнений системы (14). Например, $\pi(i) = j$ означает, что $j$-е уравнение системы (14) будет занимать $i$-е место в системе (15). Далее, $w_s$ — весовые коэффициенты, либо задаваемые пользователем, либо вычисляемые как относительные доли затрат (число арифметических операций, время) вычисления правой части $\varphi_s$ от общего числа вычислений всех компонент вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $s = 1, \ldots, m$. Обозначим через $P = \{\pi\}$ множество всех перестановок из $m$ элементов $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$.

В [8] рассматривался частный случай решения этой задачи — алгоритм приведения к виду (1)–(3) в предположении выполнения равенств $w_1 = w_2 = \ldots = w_m$. Здесь будет дано обобщение алгоритма [8] на случай неравноправных правых частей $w_t \neq w_d$ $\forall t,\ d \in I_m$, $t \neq d$.

## 2.1. Основные понятия

**Определение 2.1.** *Матрицу $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$ будем называть структурной матрицей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (14) и обозначать $A(\varphi)$, если*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi_i \text{ не зависит от } z_j, \\ 1, & \text{если} \quad \varphi_i \text{ зависит от } z_j. \end{cases}$$

Так, структурная матрица системы (1)–(3) имеет блочный вид:

$$A(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
* & * & \cdots & * & * & * & * \\ \hline
* & \mathbf{O}_{r_1\times r_1} & \ldots & \mathbf{O}_{r_1\times r_l} & * & * & * \\ \hline
\ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline
* & * & * & \mathbf{O}_{r_l\times r_l} & * & * & * \\ \hline
* & * & * & * & \mathbf{O}_{r_{l+1}\times r_{l+1}} & \ldots & \mathbf{O}_{r_{l+1}\times r_n} \\ \hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \hline
* & * & * & * & * & * & \mathbf{O}_{r_n\times r_n}
\end{array}\right).$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{O}_{r_i\times r_j}$ — нулевая матрица размерности $r_i \times r_j$. Символом $*$ обозначены блоки, которые могут быть и ненулевыми.

**Определение 2.2.** *Множество, элементами которого являются номера компонент искомой вектор-функции $z = \{z_1,\ \ldots,\ldots,\ z_m\}$, от которых не зависит правая часть $i$-го уравнения СОДУ (14), будем называть $i$-м горизонтальным структурным множеством СОДУ (14) и обозначать $E_i(\varphi)$, т. е.*

$$E_i(\varphi) = \{j \in I_m\ :\ a_{ij} = 0,\ A(\varphi) = \{a_{\nu\mu}\}_{\nu,\mu=1}^{m}\}.$$

**Определение 2.3.** *Множество, элементами которого являются номера уравнений СОДУ (14) с правыми частями, не зависящими от $j$-й компоненты вектор-функции $z = \{z_1,\ldots,z_m\}$, будем называть $j$-м вертикальным структурным множеством СОДУ (14) и обозначать $H_j(\varphi)$ :*

$$H_j(\varphi) = \{i \in I_m\ :\ a_{ij} = 0,\ A(\varphi) = \{a_{\nu\mu}\}_{\nu,\mu=1}^{m}\}.$$

Пусть $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in \big(\{0\} \cup N\big) \times N^n$. Введем в рассмотрение

$$\delta(r,k) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i,\ \ \delta(r,0) = 0,\ \ \delta(r,n+1) = m.$$

**Определение 2.4.** *Будем говорить, что СОДУ (14) имеет нуль-структуру с параметрами $l \in \{0\} \cup N$, $n \in N$, $l < n$, $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in \big(\{0\} \cup N\big) \times N^n$, и обозначать ее $ZS_\varphi^m[l,n,r]$, если для горизонтальных множеств справедливы включения*

$$\{\delta(r,i)+1,\ldots,\delta(r,l+1)\} \subset E_{\delta(r,i)+\mu(i)}(\varphi)\,, \quad i = 1,\ldots,l\,, \quad n > l > 0\,,$$

$$\{\delta(r,j)+1,\ldots,\delta(r,n+1)\} \subset E_{\delta(r,j)+\mu(j)}(\varphi)\,, \quad i = l+1,\ldots,n\,, \quad n > l \geq 0\,,$$

*где $\mu(s) = 1,\ldots,r_s$; $s = 1,\ldots,n$.*

Можно ввести это же понятие, используя определение структурной матрицы.

**Определение 2.5.** *Будем говорить, что СОДУ (14) имеет нуль-структуру с параметрами $l \in \{0\} \cup N$, $n \in N$, $l < n$, $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in \big(\{0\} \cup N\big) \times N^n$, и обозначать ее $ZS_\varphi^m[l,n,r]$, если для элементов структурной матрицы $A(\varphi)$ СОДУ (14) справедливы равенства*

$$a_{\xi(s)\nu(s)} = 0, \quad s = 1,\ldots,n,$$

*где*

$$\begin{aligned} \xi(s) = &\ \ \delta(r,s)+1,\ldots,\delta(r,s+1),\\ \nu(s) = &\ \begin{cases} \delta(r,s)+1,\ldots,\delta(r,l+1), & \text{если}\ \ 0 < l < n\ \ s \leq l,\\ \delta(r,s)+1,\ldots,\delta(r,n+1), & \text{если}\ \ 0 \leq l < n\ \ s > l. \end{cases} \end{aligned}$$

Так, СОДУ (1)–(3) имеет нуль-структуру $ZS_f^m[l,n,r]$.

Структурная матрица СОДУ (14) с нуль-структурой $ZS_\varphi^m[0,n,r]$, $n \in N$, имеет вид

$$A(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} * & * & \cdots & * \\ \hline * & \mathbf{O}_{r_1\times r_1} & \ldots & \mathbf{O}_{r_1\times r_n} \\ \hline \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \hline * & * & * & \mathbf{O}_{r_n\times r_n} \end{array}\right).$$

**Определение 2.6.** *Будем говорить, что нуль-структура $ZS^m_\varphi[l,n,r]$ СОДУ (14) — предельная, и обозначать ее $\overline{ZS^m}_\varphi[l,n,r]$, если справедливы невключения*

$$\big\{\delta(r,1),\dots,\delta(r,l+1)\big\} \not\subset E_{\delta(r,1)}(\varphi),\ l>0,$$
$$\big\{\delta(r,l+1),\dots,\delta(r,n+1)\big\} \not\subset E_{\delta(r,l+1)}(\varphi),\ l\geq 0.$$

**Определение 2.7.** *Под объемом нуль-структуры $ZS^m_\varphi[l,n,r]$ СОДУ (14) будем понимать величину $\sum\limits_{\nu=r_0+1}^{m} w_\nu$ и обозначать ее $|ZS^m_\varphi[l,n,r]|$, где $w_\nu$ — весовые коэффициенты.*

*Можно показазать, что $|\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[l,n,r]| > |ZS^m_{\pi\varphi}[\hat{l},\hat{n},\hat{r}]|,\ \pi\in P$.*

Сформулируем с использованием введенных понятий две рассматриваемые здесь задачи.

**Задача 1.** Найти перестановку $\pi^*\in P$ такую, для которой справедливо неравенство

$$|\overline{ZS^m}_{\pi^*\varphi}[0,n,r]| \geq |\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[0,\hat{n},\hat{r}]| \quad \forall\pi\in P.$$

**Задача 2.** Найти перестановку $\pi^*\in P$ такую, для которой справедливо неравенство

$$|\overline{ZS^m}_{\pi^*\varphi}[l,n,r]| \geq |\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[\hat{l},\hat{n},\hat{r}]| \quad \forall\pi\in P.$$

**Определение 2.8.** *Множество $B_\varphi(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_d)\subset I_m$ будем называть элементным нуль-структурным основанием СОДУ (14), если для $B_\varphi=\bigcup_{s=1}^d\omega_s$, $\omega_q\cap\omega_s=\emptyset$, $s\neq q$, справедливы включения $\bigcup_{s=j}^d\omega_s\subset E_k(\varphi)$ $\forall k\in\omega_j$, $j=1,\dots,d$.*

**Определение 2.9.** *Для любого множества $G\subset I_m$ величину $\sum\limits_{i\in G} w_i$ будем называть весом множества $G$ и обозначать* $\mathbf{V}[G]$:

$$\mathbf{V}\,[G]=\sum_{i\in G} w_i.$$

Пусть множество $W\subset I_m$. Перенумеруем элементы этого множества с использованием чисел натурального ряда $W=\{i_1,i_2,\dots,i_q\}$. Здесь и в дальнейшем $|W|=q$ — мощность множества $W$. Введем в рассмотрение

$$h(r,s)=\sum_{i=1}^{s} r_i,\ \ h(r,0)=0,\ \ h(r,d)=|W|,\quad r=(r_1,r_2,\dots,r_d)\in N^d.$$

**Теорема 2.1.** *Для того чтобы множество $B=\{i_1,i_2,\dots,i_q\}$ было элементным нуль-структурным основанием $B_\varphi(\omega_1,\dots,\omega_d)$, $|\omega_s|=r_s$, $s=1,\dots,d$, СОДУ (14), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\{i_p,i_{p+1},\dots,i_{h(r,d)+1-p}\}\subset E_{i_p}(\varphi)\bigcap H_{i_{h(r,d)+1-p}}(\varphi),$$
$$p=1,\dots,h(r,d)-\left[\frac{h(r,d)}{2}\right];$$
$$\{i_{h(r,s-1)+1},i_{h(r,s-1)+2},\dots,i_{h(r,s-1)+k}\}\subset E_{i_{h(r,s-1)+k}}(\varphi),$$
$$k=1,\dots,r_s,\ s=1,\dots,d.$$

Здесь $[a]$ — целая часть числа $a\in R$.

**Теорема 2.2.** *Для того чтобы на множестве перестановок $P = \{\pi\}$ существовала такая $\pi^* \in P$, что СОДУ (15) имела бы нуль-структуру $ZS^m_{\pi^*\varphi}[0, n, r]$, необходимо и достаточно, чтобы существовало элементное нуль-структурное основание $B^2_\varphi(\omega_1, \dots, \omega_n)$, для которого $\omega_0 = I_m \backslash B^2_\varphi(\omega_1, \dots, \omega_n)$, а $|\omega_s| = r_s$, $s = 0, \dots, n$. Причем $\left|ZS^m_{\pi^*\varphi}[0, n, r]\right| = \mathbf{V}\left[B^2_\varphi\right]$.*

**Теорема 2.3.** *Для того чтобы на множестве перестановок $P = \{\pi\}$ существовала такая перестановка $\pi^* \in P$, что СОДУ (15) имела бы нуль-структуру $ZS^m_{\pi^*\varphi}[l, n, r]$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два взаимно непересекающиеся множества — элементные нуль-структурные основания $B^2_\varphi(\omega_1, \dots, \omega_l)$ и $B^1_\varphi(\omega_{l+1}, \dots, \omega_n)$, для которых $\omega_0 = I_m \backslash \left[B^2_\varphi(\omega_1, \dots, \omega_l) \cup B^1_\varphi(\omega_{l+1}, \dots, \omega_n)\right]$, $|\omega_s| = r_s$, $s = 0, \dots, n$. Причем $\left|ZS^m_{\pi^*\varphi}[l, n, r]\right| = \mathbf{V}\left[B^1_\varphi\right] + \mathbf{V}\left[B^2_\varphi\right]$.*

Доказательство теорем 2.1 — 2.3 конструктивно [8]. На их базе и построен алгоритм выделения структурных особенностей и приведения произвольной системы к виду (1)–(3).

## 2.2. Алгоритм решения задач 1, 2

Строим множество $\Omega^{(1,0)} = \{i \in I_m : i \in E_i(\varphi)\}$. Если множество $\Omega^{(1,0)} = \emptyset$, то $\forall \pi \in P$, $\left|\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[l, n, r]\right| = 0$. Это значит, что никакое изменение порядка следования уравнений исходной системы не может обеспечить выделения групп уравнений, имеющих структурные особенности. Представляет интерес случай, когда:

**I.** $\Omega^{(1,0)} \neq \emptyset$. Полагаем значение номера шага алгоритма $\mu = 0$ и вводим в рассмотрение пару множеств $\hat{B}^1$ и $\hat{B}^2$, для определенности будем именовать их *рекордными*. В них будут храниться лучшие по суммарному весу на момент прохождения по дереву перебора упорядоченные множества, построенные в результате работы алгоритма.

**II.** При рассмотрении множества $\Omega^{(1,\mu)}$ необходимо выделить два случая.

**II.A.** Если множество $\Omega^{(1,\mu)} \neq \emptyset$, то:

**II.A.1.** Строим множества $D^{(1,\mu)}_{(i,j)}$, $i \in \Omega^{(1,\mu)}$, $j \in \Omega^{(1,\mu)}$, $i \neq j$, являющиеся пересечением $i$-го горизонтального структурного множества $E_i(\varphi)$ и $j$-го вертикального структурного множества $H_j(\varphi)$ с множеством $\Omega^{(1,\mu)}$:

$$D^{(1,\mu)}_{(i,j)}(\varphi) = E_i(\varphi) \cap H_j(\varphi) \cap \Omega^{(1,\mu)}, \quad i \in \Omega^{(1,\mu)}, \quad j \in \Omega^{(1,\mu)}.$$

**II.A.2.** Затем строим множество возможных продолжений $S^{(1,\mu)}$ на $\mu$-м шаге алгоритма при выбранных элементах $\beta^{(0)}$, $\beta^{(1)}$, …, $\beta^{(\mu-1)}$, называемых в дальнейшем *узловыми*:

$$S^{(1,\mu)} = \{\gamma = (i, j) \in \Omega^{(1,\mu)} \times \Omega^{(1,\mu)}, i \neq j : \{i, j\} \subset D^{(1,\mu)}_\gamma\}.$$

Отдельно следует оговорить несколько специальных случаев:

— так, при $\Omega^{(1,0)} = \{i_1\}$, $i_1 \in I_m$, и $|S^{(1,0)}| = 0$ упорядоченные множества определяются единственным образом: $\hat{B}^1 = \emptyset$, $\hat{B}^2 = \{i_1\}$;

— если $\Omega^{(1,0)} = \{i_1, \dots, i_k\}$, $\{i_1, \dots, i_k\} \in I_m$, $k > 1$, и $|S^{(1,0)}| = 0$, то упорядоченные множества определяются: $\hat{B}^1 = \{i^*\}$, $\hat{B}^2 = \{j^*\}$, где $i^* \in \Omega^{(1,0)} : w_{i^*} = \max_{i \in \Omega^{(1,0)}} w_i$; $j^* \in \Omega^{(1,0)} \backslash \{i^*\} : w_{j^*} = \max_{i \in \Omega^{(1,0)} \backslash \{i^*\}} w_i$;

— для $\Omega^{(1,0)} = \{i_1, i_2\}$, $\{i_1, i_2\} \in I_m$ и $S^{(1,0)} = \{(i_1, i_2)\}$ упорядоченные множества определяются единственным образом: $\hat{B}^1 = \emptyset$, $\hat{B}^2 = \{i_1, i_2\}$;

— если $\Omega^{(1,0)} = \{i_1, i_2\}$, $\{i_1, i_2\} \in I_m$, а $S^{(1,0)} = \{(i_1, i_2), (i_2, i_1)\}$, то из двух равновесовых пар упорядоченных множеств выбираются, например, $\hat{B}^1 = \emptyset$, $\hat{B}^2 = \{i_1, i_2\}$.

Все перечисленные случаи заканчиваются переходом на п. V алгоритма.

**II.A.3.** При рассмотрении построенного множества $S^{(1,\mu)}$ возможны два случая.

**II.A.3.a.** Если $S^{(1,\mu)} = \emptyset$, то проход по этой ветви закончен. Среди еще не рассмотренных элементов $\Omega^{(1,\mu)}$ выбираем элемент $i^*$ (для определенности *центральный*), обладающий максимальным весом $w_{i^*}$. Прежде чем перейти к следующему этапу, необходимо сделать проверку на перспективность дальнейшего рассмотрения этого варианта

$$w_{i^*} + \mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\mu-1}\{\beta_1^{(\xi)}, \beta_2^{(\xi)}\}\Big] > \frac{1}{2}\Big(\mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big]\Big), \quad i^* \in \Omega^{(1,\mu)} : w_{i^*} = \max_{i \in \Omega^{(1,\mu)}} w_i. \tag{16}$$

В случае, если справедливо неравенство (16), строим упорядоченное множество $B^1$. Количество элементов множества $B^1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ будет нечетно ($k = 2\mu + 1$) и сформировано по правилу

$$i_{\xi+1} = \beta_1^{(\xi)}, \quad i_{k-\xi} = \beta_2^{(\xi)}, \quad \xi = 0, 1, \ldots, \mu - 1, \quad i_{\mu+1} = i^* \in \Omega^{(1,\mu)} : w_{i^*} = \max_{i \in \Omega^{(1,\mu)}} w_i.$$

После чего поднимемся вверх по дереву перебора для построения второго упорядоченного множества $B^2$ на п. III алгоритма.

В случае бесперспективности продвижения по этой ветви (неравенство (16) не выполняется) или отсутствия претендента на роль *центрального* элемента, опускаемся на один уровень вниз по дереву перебора. Для чего полагаем $\mu := \mu - 1$ и переходим на п. II.A.3 алгоритма при $\mu > 0$.

**II.A.3.b.** Если $S^{(1,\mu)} \neq \emptyset$, то в качестве узлового элемента $\beta^{(\mu)}$ на $\mu$-м шаге может быть выбран элемент $\beta^* \in S^{(1,\mu)}$, удовлетворяющий двум требованиям. Во-первых, среди не рассматривавшихся ранее в качестве узловых на $\mu$-м шаге ему отвечает множество $D_{\beta^*}^{(1,\mu)}$, имеющее наибольший вес:

$$\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*) \in S^{(1,\mu)} \ : \ \mathbf{V}\Big[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}\Big] \geq \mathbf{V}\Big[D_{\beta}^{(1,\mu)}\Big] \quad \forall \beta \in S^{(1,\mu)}.$$

Во-вторых, при проверке на целесообразность дальнейшего продвижения по ветви $\beta^{(0)}$, $\beta^{(1)}$, …, $\beta^{(\mu-1)}$, $\beta^*$ справедливо неравенство

$$\mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\mu-1}\{\beta_1, \beta_2\}\Big] + \mathbf{V}\Big[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}\Big] > \frac{1}{2}\Big(\mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big]\Big). \tag{17}$$

Если неравенство (17) справедливо, то элемент $\beta^*$ становится узловым на $\mu$-м шаге (уровне) алгоритма $\beta^{(\mu)} = \beta^*$. Формируем множество

$$\Omega^{(1,\mu+1)} = D_{\beta^{(\mu)}}^{(1,\mu)} \backslash \{\beta_1^{(\mu)}, \beta_2^{(\mu)}\}$$

и, увеличивая номер уровня $\mu := \mu + 1$, переходим на п. II.A.

В случае невыполнения любого из перечисленных выше требований, предъявляемых к претенденту на роль узлового элемента, возможны два варианта:

— при $\mu > 0$ необходимо вернуться на предыдущий уровень (для этого уменьшаем его номер на единицу ($\mu := \mu - 1$) и переходим на п. II.A.3 данного алгоритма);

— при $\mu = 0$ работа алгоритма по перебору закончена. Рекордные упорядоченные множества $\hat{B}^1$ и $\hat{B}^2$, определенные на этот момент, и являются искомыми. Переходим на п. V алгоритма.

**II.B.** Если множество $\Omega^{(1,\mu)} = \emptyset$, то построение возможного варианта упорядоченного множества $B_1$ закончено. Критерием целесообразности использования $B^1$ и дальнейшей работы алгоритма по построению множества $B^2$ является выполнение неравенства

$$\mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\mu-1}\{\beta_1^{(\xi)},\beta_2^{(\xi)}\}\Big] > \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big]\right). \tag{18}$$

При выполнении неравенства (18) формируется упорядоченное множество $B^1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Оно будет содержать $k = 2\mu$ элементов, которые определяются по правилу: $i_{\xi+1} = \beta_1^{(\xi)}$, $i_{k-\xi} = \beta_2^{(\xi)}$, $\xi = 0, 1, \ldots, \mu - 1$. Затем для построения второго упорядоченного множества $B^2$ переходим на п. III рассматриваемого алгоритма.

В случае невыполнения неравенства (18) опускаемся по дереву перебора на один уровень ниже, полагая $\mu := \mu - 1$ и переходя на п. II.A.3.

**III.** Строим множество $\Omega^{(2,0)} = \Omega^{(1,0)} \backslash B^1$ при сформированном упорядоченном множестве $B^1$, полагая значение номера шага алгоритма $\nu = 0$. Следующий п. IV алгоритма практически повторяет п. II с той лишь разницей, что имеет другие критерии отсечения и передачи управления.

**IV.** При рассмотрении множества $\Omega^{(2,\nu)}$ необходимо учитывать два варианта перебора.

**IV.A.** Если множество $\Omega^{(2,\nu)} \neq \emptyset$, то:

**IV.A.1.** Строим множества $D_{(i,j)}^{(2,\nu)}$, $i \in \Omega^{(2,\nu)}$, $j \in \Omega^{(2,\nu)}$, $i \neq j$, являющиеся пересечением $i$-го горизонтального структурного множества $E_i(\varphi)$ и $j$-го вертикального структурного множества $H_j(\varphi)$ с множеством $\Omega^{(2,\nu)}$:

$$D_{(i,j)}^{(2,\nu)}(\varphi) = E_i(\varphi) \cap H_j(\varphi) \cap \Omega^{(2,\nu)}, \quad i \in \Omega^{(2,\nu)}, \quad j \in \Omega^{(2,\nu)}.$$

**IV.A.2.** Строим множество возможных продолжений $S^{(2,\nu)}$ на $\nu$-м шаге алгоритма при выбранных узловых элементах $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(1)}$, $\ldots$, $\alpha^{(\nu-1)}$:

$$S^{(2,\nu)} = \{\gamma = (i,j) \in \Omega^{(2,\nu)} \times \Omega^{(2,\nu)}, i \neq j : \{i,j\} \subset D_\gamma^{(2,\nu)}\}.$$

Отдельно следует оговорить несколько специальных случаев.

Если множество $\Omega^{(2,0)} = \{j\}$ состоит из одного элемента, то дальнейший перебор не имеет смысла. Суммарный вес построенных упорядоченных множеств $B^2 = \{j\}$ и $B^1$ имеет максимальное значение. Полагаем $\hat{B}^1 = B^1$, $\hat{B}^2 = B^2$ и переходим на п. V.

При $\Omega^{(2,0)} = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $k > 1$, и $S^{(2,0)} = \emptyset$ из элементов множества выбираем $j^* \in \Omega^{(2,0)} : w_{j^*} = \max_{j \in \Omega^{(2,0)}} w_j$. В том случае, если $\mathbf{V}\Big[B^1\Big] + w_{j^*} > \mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big]$, производим замену рекордных множеств $\hat{B}^1 = B^1, \hat{B}^2 = \{j^*\}$. После проверки на максимум переходим на п. II.A.3 для построения нового упорядоченного множества $B^1$. Причем, если число элементов $B^1$ четно, необходимо понизить уровень первого дерева ($\mu := \mu - 1$).

При $\Omega^{(2,0)} = \{j_1, j_2\}$ и $S^{(2,0)} = \{(j_1, j_2)\}$ полагаем $\hat{B}^1 = B^1$, $\hat{B}^2 = \{j_1, j_2\}$ и переходим на п. V.

При $\Omega^{(2,0)} = \{j_1, j_2\}$ и $S^{(2,0)} = \{(j_1, j_2), (j_2, j_1)\}$ полагаем $\hat{B}^1 = B^1$, $\hat{B}^2 = \{j_1, j_2\}$ и переходим на п. V.

**IV.A.3.** При рассмотрении построенного множества $S^{(2,\nu)}$ необходимо выделять два случая.

**IV.A.3.a.** Если $S^{(2,\nu)} = \emptyset$, то продвижение по этой ветви закончено. Прежде чем перейти к следующему шагу алгоритма, необходимо сравнить вес полученных упорядоченных множеств с весом рекордных

$$\mathbf{V}\Big[B^1\Big] + w_{i^*} + \mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\nu-1}\{\alpha_1^{(\xi)}, \alpha_2^{(\xi)}\}\Big] > \mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big], \tag{19}$$

где $i^* \in \Omega^{(2,\nu)} : w_{i^*} = \max_{i\in\Omega^{(2,\nu)}} w_i$. Если справедливо неравенство (19), то необходимо произвести замену рекордных упорядоченных множеств $\hat{B}^1 = B^1$ и $\hat{B}^2$. Количество элементов множества $\hat{B}^2 = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ будет нечетно ($k = 2\nu + 1$) и сформировано по правилу

$$i_{\xi+1} = \alpha_1^{(\xi)}, \quad i_{k-\xi} = \alpha_2^{(\xi)}, \quad \xi = 0, 1, \dots, \nu - 1, \quad i_{\nu+1} = i^* \in \Omega^{(2,\nu)} : w_{i_{\nu+1}} = \max_{i\in\Omega^{(2,\nu)}} w_i.$$

После проверки на успешность полученного варианта (19) независимо от результата сравнения осуществляем возврат по дереву перебора, для чего полагаем $\nu := \nu - 1$ при $\nu \neq 0$ с дальнейшим переходом на п. IV.A.3 алгоритма. В случае же, если $\nu = 0$, переходим на п. II.A.3 для построения нового упорядоченного множества $B^1$. Причем, если число элементов $B^1$ четно, необходимо понизить уровень первого дерева ($\mu := \mu - 1$).

**IV.A.3.b.** Если $S^{(2,\nu)} \neq \emptyset$, то в качестве узлового элемента $\alpha^{(\nu)}$ на $\nu$-м шаге алгоритма может быть выбран элемент $\alpha^* \in S^{(2,\nu)}$, удовлетворяющий двум требованиям. Во-первых, среди не рассматривавшихся ранее в качестве узловых на $\nu$-м шаге ему отвечает множество $D_{\alpha^*}^{(2,\nu)}$, имеющее наибольший вес:

$$\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) \in S^{(2,\nu)} \ : \ \mathbf{V}\left[D_{\alpha^*}^{(2,\nu)}\right] \geq \mathbf{V}\left[D_{\gamma}^{(2,\nu)}\right] \quad \forall\gamma \in S^{(2,\nu)}.$$

Во-вторых, при проверке на целесообразность дальнейшего продвижения по ветви $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(1)}$, ..., $\alpha^{(\nu-1)}$, $\alpha^*$ справедливо неравенство

$$\mathbf{V}\Big[B^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\nu-1}\{\alpha_1^{(\xi)}, \alpha_2^{(\xi)}\}\Big] + \mathbf{V}\Big[D_{\alpha^*}^{(2,\nu)}\Big] > \mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right]. \tag{20}$$

При выполнении этих требований элемент $\alpha^*$ становится узловым: $\alpha^{(\nu)} = \alpha^*$ на $\nu$-м шаге (уровне) алгоритма.

Для перехода на следующий верхний уровень дерева перебора формируем множество $\Omega^{(2,\nu+1)} = D_{\alpha^{(\nu)}}^{(2,\nu)} \backslash \{\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}\}$ и, увеличивая номер уровня ($\nu := \nu + 1$), переходим на п. IV.A.

В случае невыполнения неравенства (20) при $\nu > 0$ необходимо вернуться на предыдущий (нижний) уровень. Для этого уменьшаем его номер на единицу ($\nu := \nu - 1$) и переходим на п. IV.A.3 данного алгоритма.

В случае невыполнения неравенства (20) при $\nu = 0$ работа алгоритма по поиску наилучшего упорядоченного множества $B^2$ при фиксированном $B^1$ закончена. Необходимо перейти на п. II.A.3 для построения нового упорядоченного множества $B^1$. Причем, если число элементов $B^1$ четно, необходимо понизить уровень первого дерева ($\mu := \mu - 1$).

**IV.B.** Если множество $\Omega^{(2,\nu)} = \emptyset$, то необходимо иметь в виду, что:

**IV.B.1.** При $\nu = 0$ на множестве $I_m$ не существует упорядоченного непустого множества $B^2$ с заданными свойствами. При $B^1 \neq \emptyset$ рекордными становятся $\hat{B}^1 = B^1$, $B^2 = \emptyset$, и переходим на п. V.

**IV.B.2.** При $\nu \neq 0$ проход по этой ветви закончен. При выполнении неравенства

$$\mathbf{V}\left[B^1\right] + \mathbf{V}\left[\bigcup_{\xi=0}^{\nu}\{\alpha_1^{(\xi)}, \alpha_2^{(\xi)}\}\right] > \mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right], \tag{21}$$

необходимо произвести обновление рекордных упорядоченных множеств $\hat{B}^1 = B^1$ и $\hat{B}^2 = \{i_1, \dots, i_k\}$. Причем $\hat{B}^2$ будет содержать $k = 2\nu$ элементов, которые определяются по правилу $i_{\xi+1} = \alpha_1^{(\xi)}, \quad i_{k-\xi} = \alpha_2^{(\xi)}, \quad \xi = 0, 1, \dots, \nu - 1$. После сравнения весов множеств и обновления рекордных упорядоченных множеств (если это потребуется) опускаемся по дереву перебора на один уровень ниже, полагая $\nu := \nu - 1$ и переходя на п. IV.A.3 алгоритма.

Работа алгоритма по пп. I–IV будет закончена естественным образом на нулевом уровне дерева перебора при бесперспективности продолжения перебора с построенными упорядоченными множествами $\hat{B}^1$ и $\hat{B}^2$. Только после этого выполняется следующий пункт алгоритма.

**Замечание 3.1.** Элементы любого упорядоченного множества $B^s = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $s = 1, 2$, построенного по пп. I–IV данного алгоритма, удовлетворяют условию (2.5) теоремы 2.1. Покажем это. Действительно, по построению справедливы следующие включения:

$$\begin{aligned}
&\{i_1, i_k\} \subset E_{i_1}(\varphi) \cap H_{i_k}(\varphi) \cap \Omega^{(s,0)} \equiv \hat{D}^{(s,0)},\\
&\Omega^{(s,1)} = \hat{D}^{(s,0)} \backslash \{i_1, i_k\},\\
&\{i_2, i_{k-1}\} \subset E_{i_2}(\varphi) \cap H_{i_{k-1}}(\varphi) \cap \Omega^{(s,1)} \equiv \hat{D}^{(s,1)},\\
&\Omega^{(s,2)} = \hat{D}^{(s,1)} \backslash \{i_2, i_{k-1}\};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\{i_{t(s)}, i_{k+1-t(s)}\} \subset E_{i_{t(s)}}(\varphi) \cap H_{i_{k+1-t(s)}}(\varphi) \cap \Omega^{(s,t(s)-1)} \equiv \hat{D}^{(s,t(s)-1)},\\
&\Omega^{(s,t(s))} = \hat{D}^{(s,t(s)-1)} \backslash \{i_{t(s)}, i_{k+1-t(s)}\},\\
&\Omega^{(s,t(s))} = \begin{cases} \emptyset, & k = 2t(s),\\ \{i_{t(s)+1}\}, & k = 2t(s) + 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{22}$$

И в силу того, что $\hat{D}^{(s,t(s)-1)} \subset \hat{D}^{(s,t(s)-2)} \subset \dots \hat{D}^{(s,1)} \subset \hat{D}^{(s,0)}$, справедливы включения $\{i_p, i_{p+1}, \dots, i_{k+1-p}\} \subset E_{i_p}(\varphi) \cap H_{i_{k+1-p}}(\varphi)$, $t(1) = \mu$, $t(2) = \nu$, $p = 1, \dots, t(s)$. Что и требовалось доказать. □

**Замечание 3.2.** Для любого упорядоченного множества $B^s = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \ s = 1, 2$, построенного по пп. I–IV, можно провести разбиение на классы.

Для этого полагаем, что $i_1 \in \omega_1$. Элемент $i_2$ будет принадлежать множеству $\omega_1$, если $i_1 \in E_{i_2}(\varphi)$. Если же $i_1 \notin E_{i_2}(\varphi)$, то $\omega_1 = \{i_1\}$ и $i_2 \in \omega_2$.

Предположим, что $\{i_1, i_2\} \subset \omega_1$. Тогда, если $\{i_1, i_2\} \subset E_{i_3}(\varphi)$, то $i_3 \in \omega_1$, иначе (если $\{i_1, i_2\} \not\subset E_{i_3}(\varphi)$) $i_3 \in \omega_2$.

Допустим, что уже произведено разбиение множества $B^s = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ до элемента $i_{u_{\xi-1}+d}$ включительно, т. е.

$$\omega_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_{u_1}\}, \ \omega_2 = \{i_{u_1+1}, i_2, \dots, i_{u_2}\}, \ \dots, \ \omega_{\xi-1} = \{i_{u_{\xi-2}+1}, \dots, i_{u_{\xi-1}}\},$$

и установлено, что $\{i_{u_{\xi-1}+1}, \dots, i_{u_{\xi-1}+d}\} \subset \omega_\xi$.

Элемент $i_{u_{\xi-1}+d+1}$ упорядоченного множества будет принадлежать этому же классу $i_{u_{\xi-1}+d+1} \in \omega_\xi$, если справедливо включение $\{i_{u_{\xi-1}+1}, \dots, i_{u_{\xi-1}+d}\} \subset E_{i_{u_{\xi-1}+d+1}}(\varphi)$. После чего естественным образом переходим к рассмотрению следующего элемента $i_{u_{\xi-1}+d+2}$ на принадлежность множеству $\omega_\xi$.

В случае же, если $\{i_{u_{\xi-1}+1}, \dots, i_{u_{\xi-1}+d}\} \not\subset E_{i_{u_{\xi-1}+d+1}}(\varphi)$, формирование класса $\omega_\xi$ закончено и $\omega_\xi = \{i_{u_{\xi-1}+1}, \dots, i_{u_\xi}\}, \ u_\xi = u_{\xi-1} + d, \quad i_{u_\xi+1} \in \omega_{\xi+1}$. После этого проверяем на принадлежность множеству $\omega_{\xi+1}$ элемент $i_{u_\xi+2}$. И так до тех пор, пока не исчерпаем все элементы множества $B^s$.

Для проведенного разбиения упорядоченного множества $B^s$ на классы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p(s)}$ справедливо представление $B^s = \bigcup_{i=1}^{p(s)} \omega_i$, причем $\bigcup_{i=d}^{p(s)} \omega_i \subset E_g(\varphi)\ \forall g \in \omega_d,\ d = 1, \ldots, p(s)$, $\omega_t \cap \omega_q = \emptyset,\ t \neq q$, которое обеспечивает выполнение условия (2.6) теоремы 2.1. А это значит, что все построенные упорядоченные множества $B^s$ являются (с учетом замечания 3.1 и утверждения теоремы 2.1) элементными нуль-структурными основаниями $B^s_\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p(s)})$ .

**V.** Руководствуясь правилом замечания 3.2, проведем поочередно разбиение рекордных множеств на классы. Сначала сделаем это для упорядоченного множества $\hat{B}^2 \equiv \hat{B}^2_\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l)$, а затем для $\hat{B}^1 \equiv \hat{B}^1_\varphi(\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \ldots, \omega_n)$.

**Замечание 3.3.** Результатом работы алгоритма является построение двух взаимно непересекающихся элементных нуль-структурных оснований $\hat{B}^1,\ \hat{B}^2$ — пары, имеющей максимальный суммарный вес.

Действительно, были рассмотрены пары взаимно непересекающихся упорядоченных множеств $B^1,\ B^2$ на множестве $I_m$. Из рассмотрения были исключены лишь те, которые заведомо не могли дать максимальной суммы (ограничения (19)–(21)), а также те, которые не удовлетворяли условиям (16)–(18).

Условия (16)–(18) выражают симметричность построения $B^1$ на множестве $I_m$ и $B^2$ на множестве $I_m \backslash B^1$.

Предположим, что нашлась такая пара $\bar{B}^1$ и $\bar{B}^2$ среди пар взаимно непересекающихся упорядоченных множеств, не рассмотренных нами из-за ограничений (16)–(18), для которой их суммарный вес превосходит суммарный вес рекордных множеств, т. е. справедливы неравенства

$$\mathbf{V}\left[\bar{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\bar{B}^2\right] > \mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right], \tag{23}$$

$$\mathbf{V}\left[\bar{B}^1\right] \leq \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right]\right).$$

Но в таком случае неравенство (23) справедливо только при

$$\mathbf{V}\left[\bar{B}^2\right] > \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right]\right).$$

А это значит, что упорядоченное множество $\bar{B}^2 \subset I_m \backslash \bar{B}^1 \subset I_m$ уже рассматривалось при построении первого упорядоченного множества. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

**Замечание 3.4.** Руководствуясь утверждениями теоремы 2.2 (для решения задачи 1) и теоремы 2.3 (для решения задачи 2), для любой пары $B^1_\varphi(\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \ldots, \omega_n)$ и $B^2_\varphi(\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots, \omega_l)$ элементных нуль-структурных оснований (полученной в результате работы пп. I–V алгоритма) можно построить перестановку $\pi \in P$, на которой СОДУ (15) имеет нуль-структуру $ZS^m_{\pi\varphi}[l, n, r],\ l \in N$. Для этого необходимо перенумеровать элементы классов

$$\omega_s = \left\{g_{\delta(r,s)+1}, \ldots, g_{\delta(r,s)+r_s}\right\}, \quad r_s = |\omega_s|, \quad s = 1, \ldots, n,$$

элементных нуль-структурных оснований $B^2_\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l, )$ и $B^2_\varphi(\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \ldots, \omega_n)$ и множества $\omega_0 = I_m \backslash \left(B^1 \cup B^2\right) = \{g_1, \ldots, g_{r_0}\}$, где $r_0 = |\omega_0|$. После чего искомая перестановка представима в виде

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r_0 & r_0+1 & \ldots & \delta(r, l+1) & \delta(r, l+1)+1 & \ldots & m \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_{r_0} & g_{\delta(r,1)+1} & \cdots & g_{\delta(r,l+1)} & g_{\delta(r,l+1)+1} & \cdots & g_{\delta(r,n+1)} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $ZS^m_{\pi\varphi}[l,n,r]$ для любой пары нуль-структурных оснований $B^1$, $B^2$, сформированной пп. I–IV алгоритма, является предельной.

Предположим, что это не так, т. е. справедливы включения

$$\left\{g_{\delta(r,1)},\ldots,g_{\delta(r,l+1)}\right\}\subset E_{g_{\delta(r,1)}}(\varphi)\,,\ l>0,\quad \left\{g_{\delta(r,l+1)},\ldots,g_{\delta(r,n+1)}\right\}\subset E_{g_{\delta(r,l+1)}}(\varphi)\,,\ l\geq 0.$$

А это значит, что как для упорядоченного множества $\bar{B}^1=\left\{g_{\delta(r,l+1)},g_{\delta(r,l+1)+1},\ldots,g_{\delta(r,n+1)}\right\}$, так и для $\bar{B}^2=\left\{g_{\delta(r,1)},g_{\delta(r,1)+1},\ldots,g_{\delta(r,l+1)-1}\right\}$ выполняются включения алгоритма (22). И в силу того, что $\mathbf{V}[\bar{B}^1]>\mathbf{V}[B^1]$ и $\mathbf{V}[\bar{B}^1]+\mathbf{V}[\bar{B}^2]>\mathbf{V}[B^1]+\mathbf{V}[B^2]$, пара $B^1$, $B^2$ вообще не могла быть построена в рамках приведенного алгоритма. Полученное противоречие и доказывает предельность нуль-структуры. Таким образом, *нуль-структура* $ZS^m_{\pi\varphi}[l,n,r]$, $l\in N$, *на любой перестановке* $\pi$, *построенной по приведенному выше правилу, является предельной.*

**VI.** Руководствуясь замечанием 3.4, на базе рекордных элементных нуль-структурных оснований $\hat{B}^1$, $\hat{B}^2$ строим искомую перестановку $\pi^*$, которая является решением задачи 1 или задачи 2.

Отдельно следует отметить три важных случая.

1. Суммарный вес построенной пары упорядоченных множеств $B^1$ и $B^2$ равен максимально возможному: $\mathbf{V}[B^1]+\mathbf{V}[B^2]=\mathbf{V}[\Omega^{(1,0)}]$. Дальнейший перебор улучшения дать не сможет. Рекордными делаем множества $\hat{B}^1=B^1$ и $\hat{B}^2=B^2$ с дальнейшим переходом на п. V алгоритма.

2. Вес упорядоченного множества $B^2$ равен максимально возможному: $\mathbf{V}[B^2]=\mathbf{V}[\Omega^{(2,0)}]$. Дальнейший перебор на втором дереве улучшения дать не сможет. Переходим на п. II.A.3 для построения нового упорядоченного множества $B^1$. Если число элементов $B^1$ четно, то необходимо понизить уровень первого дерева ($\mu:=\mu-1$).

3. Для использования алгоритма при решении задачи 1 необходимо считать постоянно $B^1=\emptyset$ и $\hat{B}^1=\emptyset$ . Начать работу алгоритма следует с п. III и ограничить только перебором по верхнему дереву, т. е. требование спуститься по дереву перебора на поиск нового упорядоченного множества $B^1$ означает (при решении задачи 1) окончание перебора с переходом на п. V.

## 2.3. Пример применения алгоритма выделения структурных особенностей

Продемонстрируем работу алгоритма решения задачи 2 на примере выделения нуль-структуры $ZS^m_{\pi^*F}[l,n,r]$ максимального объема СОДУ

$$y^{'}=F(x,y),\quad y,F\in R^7. \tag{24}$$

Структурная матрица исходной системы $A(F)$ с весовыми коэффициентами $w_2=w_3=2$, $w_5=w_6=3$, $w_1=w_7=4$, $w_4=5$ имеет нуль-структуру $\overline{ZS^7}_F[1,2,r]$, $r=(5,1,1)$. Ее объем $|\overline{ZS^7}_F[1,2,r]|=7$.

$$A(F)=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&1&1\\1&0&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0\\1&1&1&1&1&0&1\\1&0&0&1&0&1&0\end{pmatrix},\quad A(\pi^*F)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&1&1\\0&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0\\1&0&1&1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Перестановка (переобозначение) $\pi^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ найдена за восемнадцать шагов алгоритма. Его работа схематично представлена в табл. 4. Структурная матрица преобразованной системы $A(\pi^* F)$ имеет нуль-структуру $\overline{ZS^7}_{\pi^* F}[3,5,r]$, $r = (1,1,1,1,1,2)$ с объемом $|\overline{ZS^7}_{\pi^* F}[3,5,r]| = 21$. Эффективность применения структурного подхода при интегрировании исходной системы определяется отношением

$$\sum_{s=r_0+1}^{m} w_s / \sum_{s=1}^{m} w_s = 7/23,$$

а преобразованной —

$$\sum_{s=r_0+1}^{m} w_{\pi(s)} / \sum_{s=1}^{m} w_{\pi(s)} = 21/23.$$

# 3. Тестирование

Для сравнения была взята задача из [7]. Во-первых, она подходит по наличию структурных особенностей рассматриваемого типа и позволяет продемонстрировать не только преимущество полученной схемы, но и работу предложенного здесь алгоритма. Во-вторых, на этой задаче уже проводилось тестирование, и среди испытуемых методов одним из лучших был метод Дормана — Принса. Эти обстоятельства и определили выбор как тестовой задачи

$$\begin{cases} y_1' = 2x\, y_2^{1/5}\, y_4 = f_1(x, y_2, y_4), & y_2' = 10x\, \exp\left(5(y_3 - 1)\right) y_4 = f_2(x, y_3, y_4), \\ y_3' = 2x\, y_4 = f_3(x, y_4), & y_4' = -2x\, \ln y_1 = f_4(x, y_1), \end{cases} \tag{25}$$
$$y_i(0) = 1,\ x \in [0, 10],\ F = (f_1, \ldots, f_4)^T,$$

так и оппонента — метод Дормана — Принса.

Точное решение задачи Коши (25) имеет вид

$$y_1(x) = \exp\left(\sin x^2\right),\ y_2(x) = \exp\left(5 \sin x^2\right),\ y_3(x) = \sin\left(x^2\right) + 1,\ y_4(x) = \cos\left(x^2\right).$$

Весовые коэффициенты задаем, полагая $w_1 = w_2 = w_4 = 10,\ w_3 = 1$. В соответствии с определениями и классификацией, введенными выше, система (25) уже имеет нуль-структуру $\overline{ZS^4}_F[1,2,r]$, $r = (2,1,1)$ с объемом $|\overline{ZS^4}_F[1,2,r]| = 11$. Отметим, что наличие общей группы уравнений сразу не позволяет применить метод, предложенный здесь (см. табл. 2). Для интегрирования системы (25), имеющей такой вид, могут применяться экономичные расчетные схемы структурного метода [3].

Используя алгоритм выделения структурных особенностей исходной системы (25), можно построить четыре перестановки, на которых преобразованные системы имеют нуль-структуры с равным максимально возможным объемом. Рассмотрим две из них:

$$\overline{ZS^4}_{\pi^1 F}[2,3,r^1],\ r^1 = (0,1,1,2) \text{ и } \overline{ZS^4}_{\pi^2 F}[1,3,r^2],\ r^2 = (0,2,1,1),$$
$$|\overline{ZS^4}_{\pi^1 F}[2,3,r^1]| = |\overline{ZS^4}_{\pi^2 F}[1,3,r^2]| = 31$$

на перестановках $\pi^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ соответственно.

Т а б л и ц а 4

Схема работы алгоритма при решении задачи 2

| $N$ | $\mu/\nu$ | $\Omega^{(p,\mu/\nu)}$ | $S^{(p,\mu/\nu)}$ | $\|S^{(p,\mu/\nu)}\|$ | $\beta^{(\mu)}/\alpha^{(\nu)}/i^*$ | $\mathbf{V}[D_{\beta^*/\alpha^*}]/w_{i^*}$ | $B^p$ | $\mathbf{V}[B^p]$ | $\sum\limits_{d=1}^{2}\mathbf{V}[\hat{B}^d]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mu=0$ | $\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$ | $S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\ldots,(2,6)\}$ | 13 | $\beta^{(0)}=(4,5)$ | 14 | | | 0 |
| | | | | | | | | | 0 |
| 2 | $\mu=1$ | $\Omega^{(1,1)}=\{2,7\}$ | $S^{(1,1)}=\{(2,7),(7,2)\}$ | 2 | $\beta^{(1)}=(2,7)$ | 6 | | | 0 |
| 3 | $\mu=2$ | $\Omega^{(1,2)}=\emptyset$ | $S^{(1,2)}=\emptyset$ | 0 | | | $B^1=\{4,2,7,5\}$ | 14 | 0 |
| 4 | $\nu=0$ | $\Omega^{(2,0)}=\{1,6\}$ | $S^{(2,0)}=\emptyset$ | 0 | $i^*=1$ | 4 | $B^2=\{1\}$ | 4 | 18 |
| 5 | $\mu=1$ | $\Omega^{(1,1)}=\{2,7\}$ | $S^{(1,1)}=\{(2,7),(7,2)\}$ | 2 | $\beta^{(1)}=(7,2)$ | 6 | $B^1=\{4,7,2,5\}$ | 14 | 18 |
| 6 | $\nu=0$ | $\Omega^{(2,0)}=\{1,6\}$ | $S^{(2,0)}=\emptyset$ | 0 | $i^*=1$ | 4 | $B^2=\{1\}$ | 4 | 18 |
| 7 | $\mu=0$ | $\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$ | $S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\ldots,(2,6)\}$ | 13 | $\beta^{(0)}=(4,7)$ | 14 | | | 18 |
| 8 | $\mu=1$ | $\Omega^{(1,1)}=\{2,5\}$ | $S^{(1,1)}=\{(2,5)\}$ | 1 | $\beta^{(1)}=(2,5)$ | 6 | | | 18 |
| 9 | $\mu=2$ | $\Omega^{(1,2)}=\emptyset$ | $S^{(1,2)}=\emptyset$ | 0 | | | $B^1=\{4,2,5,7\}$ | 14 | 18 |
| 10 | $\nu=0$ | $\Omega^{(2,0)}=\{1,6\}$ | $S^{(2,0)}=\emptyset$ | 0 | $i^*=1$ | 4 | $B^2=\{1\}$ | 4 | 18 |
| 11 | $\mu=0$ | $\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$ | $S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\ldots,(2,6)\}$ | 13 | $\beta^{(0)}=(5,7)$ | 12 | | | 18 |
| 12 | $\mu=1$ | $\Omega^{(1,1)}=\{4\}$ | $S^{(1,1)}=\emptyset$ | 0 | $i^*=4$ | 5 | $B^1=\{5,4,7\}$ | 12 | 18 |
| 13 | $\nu=0$ | $\Omega^{(2,0)}=\{1,2,6\}$ | $S^{(2,0)}=\{(2,6)\}$ | 1 | $\alpha^{(0)}=(2,6)$ | 5 | | | 18 |
| 14 | $\nu=1$ | $\Omega^{(2,1)}=\emptyset$ | $S^{(2,1)}=\emptyset$ | 0 | | | | | 18 |
| 15 | $\mu=0$ | $\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$ | $S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\ldots,(2,6)\}$ | 13 | $\beta^{(0)}=(1,5)$ | 11 | | | 18 |
| 16 | $\mu=1$ | $\Omega^{(1,1)}=\{7\}$ | $S^{(1,1)}=\emptyset$ | 0 | $i^*=7$ | 4 | $B^1=\{1,7,5\}$ | 11 | 18 |
| 17 | $\nu=0$ | $\Omega^{(2,0)}=\{2,4,6\}$ | $S^{(2,0)}=\{(4,6),(4,2),(2,6)\}$ | 3 | $\alpha^{(0)}=(4,6)$ | 10 | | | 18 |
| 18 | $\nu=1$ | $\Omega^{(2,1)}=\{2\}$ | $S^{(2,1)}=\emptyset$ | 0 | $i^*=2$ | 2 | $B^2=\{4,2,6\}$ | 10 | 21 |
| $\omega_s$ | $\omega_1=\{4\},\ \omega_2=\{2\},\ \omega_3=\{6\},\ \omega_4=\{1\},\ \omega_5=\{7,5\},\ \omega_0=\{3\}$ | | | | | | $\pi^*=(3,4,2,6,1,7,5).$ | | |

Таблица 5
Зависимость максимальной глобальной погрешности от величины шага

| $-\lg(h)$ | $-\lg\|\max_{x\in[0,10]}\|y_i(x)-y_i\|\|$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $RK4$ | $DOPRI5(4)7F$ | $PC(\pi^1)$ | $PC(\pi^2)$ |
| 2.000 | -1.3229 | -0.3749 | -0.4042 | -0.4593 |
| 2.500 | 1.5100 | 1.9966 | 2.0944 | 2.0439 |
| 3.000 | 2.9692 | 4.4891 | 4.5915 | 4.5412 |
| 3.500 | 4.8711 | 6.9900 | 7.0907 | 7.0407 |
| 4.000 | 6.8443 | 9.3635 | 9.6442 | 9.7863 |
| 4.500 | 8.8857 | 9.7154 | 9.9318 | 9.6638 |
| 5.000 | 9.6123 | 9.8461 | 9.6891 | 9.7538 |

Ниже приведены структурные матрицы исходной системы и преобразованных на соответствующих перестановках:

$$A(F)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ A(\pi^1F)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ A(\pi^2F)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Изменение порядка следования уравнений (на перестановках $\pi^1$ и $\pi^2$), во-первых, позволило повысить эффективность структурного метода до максимально возможной, во-вторых, дало возможность использовать для интегрирования преобразованных систем полученную здесь расчетную схему (см. табл. 2). Интегрирование производилось на интервале $x\in[0,10]$ с постоянным шагом $h$. В серии расчетов шаг интегрирования $h$ изменялся от $10^{-2}$ до $10^{-5}$, причем каждое следующее значение было в $\sqrt{10}$ раз меньше предыдущего. Помимо метода Дормана — Принса [7] (DP5(4)7) для демонстрации точностного превосходства полученного метода в серии вычислений использовался и четырехэтапный (равнозатратный полученному) классический метод Рунге — Кутты четвертого порядка (RK4). Поскольку для исходной системы рассмотрены две нуль-структуры — $\overline{ZS^4}_{\pi^1F}[2,3,r^1]$ и $\overline{ZS^4}_{\pi^2F}[1,3,r^2]$, и результатов реализации метода (расчетных схем) два — $PC(\pi^1)$ и $PC(\pi^2)$ соответственно. Результаты тестирования — зависимость нормы максимальной глобальной погрешности от величины шага интегрирования — представлены в табл. 5. Тестирование подтвердило теоретическое ожидание результатов эксперимента. При равных порядках погрешности полученный метод (см. табл. 2) требует меньшего числа этапов, чем метод Дормана — Принса (DP5(4)7). При равных же затратах $PC(\pi^1)$ и $PC(\pi^2)$ на порядок точнее метода Рунге — Кутты четвертого порядка.

## Список литературы


[1] Олемской И.В. Численный метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. методы анализа управляемых процессов. Л., 1986. С. 157–160.

[2] Олемской И.В. Экономичная расчетная схема четвертого порядка точности численного интегрирования систем специального вида // Процессы управления и устойчивость: Тр. XXX научн. конф. СПб.: НИИ химии СПбГУ, 1999. С. 134–143.

[3] Олемской И.В. Структурный подход в задаче конструирования явных одношаговых методов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 7. С. 961–974.

[4] Олемской И.В. Четырехэтапный метод пятого порядка точности численного интегрирования систем специального вида // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 8. С. 1179–1190.

[5] Олемской И.В. Методы типа Рунге — Кутты интегрирования систем и дифференциальных уравнений второго порядка специального вида // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 2. С. 67–81.

[6] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М., 1979.

[7] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.

[8] Олемской И.В. Алгоритм выделения структурных особенностей // Николай Ефимович Кирин: Сб. стат. под ред. В.В. Жука, В.Ф. Кузютина, 2003. С. 234–251.

*Поступила в редакцию 18 июня 2004 г.*