

О ВОЗНИКНОВЕНИИ РАЗРЫВОВ В НЕПЛОСКИХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РАЗРЕЖЕНИЯ*

С. П. БАУТИН

Уральский государственный университет путей сообщения

Екатеринбург, Россия

e-mail: SBautin@math.usart.ru

We consider self-similar cylindrical or spherical rarefaction flows, which appear during rarefaction of a gas. A sharp depression of the gas density occurring due to the propagation of the decreasing gas mass into increasing space volume, leads to a gradient catastrophe. It is possible to avoid it, matching a self-similar (automodelling) rarefaction wave located at $r = r_o > 0$ with a homogeneous quiescent gas through a new flow, which has a singularity at $r = r_o$ that is similar to the singularity of a simple centred rarefaction wave. In case of the approximate matching of a self-similar rarefaction wave with a homogeneous quiescent gas, it is supposed that there is a jump decrease of the gas density at the moment when a weak discontinuity (shock) focuses at the axis or at the centre of symmetry. It leads to the appearance of one more singularity at $r = 0$, which is similar to a singularity of a simple centred rarefaction wave.

Введение

Как хорошо известно [1], и в одномерных (плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричных), и в общих пространственных течениях сжатия газа за конечное время возникает градиентная катастрофа, когда производные газодинамических параметров по пространственным переменным становятся бесконечными, хотя сами газодинамические параметры в этот момент времени имеют конечные значения. Причина этого явления также хорошо известна: в течениях сжимаемой сплошной среды возмущения передаются с местной скоростью звука, которая растет с увеличением плотности. Поэтому более сжатая часть течения “догоняет” менее сжатую и происходит опрокидывание волны сжатия — градиентная катастрофа. После момента градиентной катастрофы в течении сжатия возникает сильный разрыв — ударная волна. Общая задача о распаде произвольного сильного разрыва в настоящее время достаточно подробно исследована как в одномерном [1], так и в общем пространственном случае [2].

Для течений разрежения известно, что в случаях цилиндрической и сферической симметрии градиентная катастрофа заведомо возникает при фокусировке слабого разрыва на ось или в центр симметрии [3] (подробности см., например, в [4]). В многомерных

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-01122 и № 04-01-00205).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

течениях подобный эффект также имеет место, когда главные кривизны характеристических поверхностей стремятся к нулю [5]. Этот факт установлен при исследовании решений транспортных уравнений, описывающих поведение производных газодинамических параметров, выводящихся с поверхности звуковой характеристики, которая отделяет однородный покоящийся газ от волны разрежения. Вопрос о точном построении течения газа после момента градиентной катастрофы, имеющей место на оси или в центре симметрии в волне разрежения, пока остается открытым, однако различные приближенные построения имеются (см., например, [6]).

Цель данной работы — на примере цилиндрически- и сферически-симметричных автомодельных волн разрежения показать, что не только на оси или в центре симметрии, но и в средней части волны разрежения может возникнуть градиентная катастрофа. Кроме того, в работе обсуждается возможная причина возникновения градиентной катастрофы в неплоских течениях разрежения, а также предлагаются способы “раскрытия” этой особенности в течении разрежения с использованием скачкообразного уменьшения плотности и последующим возникновением течения, аналогичного простой централизованной волне.

1. Автомодельные решения

Рассматриваются цилиндрически- и сферически-симметричные изэнтропические течения политропного газа, описываемые решениями системы уравнений [1]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{(\gamma - 1)}{2}c \left(u_r + \nu \frac{u}{r} \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_r = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь t — время; r — расстояние до оси или центра симметрии соответственно в случаях цилиндрической ($\nu = 1$) или сферической ($\nu = 2$) симметрии; $c = c(t, r)$ — скорость звука газа, связанная с плотностью газа соотношением $\rho = c^{2/(\gamma-1)}$; $u = u(t, r)$ — скорость газа; $\gamma = \text{const} > 1$ — показатель политропы газа.

Для построения автомодельных решений системы (1.1) делается замена переменных [7, 8]

$$\zeta = \frac{t}{r}, \quad \chi = r$$

и полагается $\partial/\partial\chi = 0$, т.е. параметры газа становятся постоянными на прямых $t/r = \text{const}$. В результате таких преобразований для искомого скорости звука $c = c(\zeta)$ и скорости газа $u = u(\zeta)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений [7, 8]

$$\begin{cases} \frac{dc}{d\zeta} = -\nu \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{cu(1 - \zeta u)}{[(1 - \zeta u)^2 - \zeta^2 c^2]}, \\ \frac{du}{d\zeta} = -\nu \frac{\zeta c^2 u}{[(1 - \zeta u)^2 - \zeta^2 c^2]}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Если сделать замену переменных

$$z = \zeta^2 c^2, \quad V = \zeta u$$

и поделить одно уравнение системы (1.2) на другое, то получится обыкновенное дифференциальное уравнение для автомодельных течений политропного газа [9]

$$\frac{dz}{dV} = \frac{2z \left\{ (1-V) \left[(1-V) - \nu \frac{(\gamma-1)}{2} V \right] - z \right\}}{V [(1-V)^2 - (\nu+1)z]}. \quad (1.3)$$

Использование системы (1.2) вместо уравнения (1.3) удобнее при численных расчетах, поскольку точка $\zeta = 0$, соответствующая моменту времени $t = 0$, заведомо не является особой для системы (1.2). Задание в этой неособой точке начальных условий

$$c|_{\zeta=0} = c_1 = \text{const} > 0, \quad u|_{\zeta=0} = u_1 = \text{const} \quad (1.4)$$

определяет постоянные значения параметров газа в момент времени $t = 0$. Если $u_1 > 0$, то в этот момент времени газ движется от оси или центра симметрии и тогда решение задачи (1.2), (1.4) определяет волну разрежения. Если $u_1 < 0$, то — волну сжатия.

Для решения уравнения (1.3) в плоскости VOz исследованы [9] особые точки, некоторые интегральные кривые и их свойства. В частности, парабола

$$z = (1-V)^2 \quad (1.5)$$

называется параболой слабого разрыва [9] (на рис. 1 она помечена цифрой 1). Если интегральная кривая уравнения (1.3) пересекает эту параболу, то имеют место следующие факты [9]. У решений системы (1.2) в соответствующей точке $\zeta = \zeta_*$ обращаются в нуль знаменатели обеих правых частей этой системы, поскольку соотношение (1.5) может быть записано в виде

$$\zeta^2 c^2 = (1 - \zeta u)^2.$$

Прямая $t/r = \zeta_*$ является звуковой характеристикой данного автомодельного течения газа. Если одновременно с этим значения $c(\zeta_*)$ и $u(\zeta_*)$ отличны от нуля, то на прямой $t/r = \zeta_*$ в физическом пространстве производные газодинамических параметров имеют бесконечные значения. При этом данное решение не продолжается как в плоскости VOz автомодельных переменных за точку, соответствующую значению $\zeta = \zeta_*$, так и в физическом пространстве за прямую $t/r = \zeta_*$.

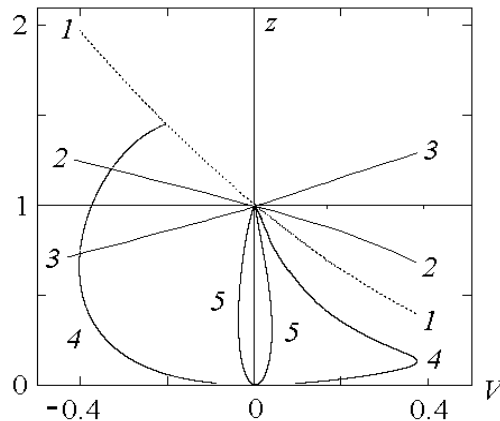


Рис. 1.

Если интегральная кривая уравнения (1.3) попадает на параболу

$$z = (1 - V) \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} V \right], \quad (1.6)$$

то рассматриваемое автомодельное решение возможно состыковать через ударную волну с однородным покоящимся газом [9]. На рис. 1 парабола (1.6) помечена цифрой 2. Однако использование такого ударного перехода не является обязательным при построении автомодельных течений.

В работах [8, 10, 11] часть интегральных кривых уравнения (1.3) применяется для описания безударного сжатия первоначально однородного и покоящегося газа. На рис. 1 цифрой 4 отмечено одно из таких течений сжатия, численно построенное при решении задачи (1.2), (1.4) для значений $c_1 = 1.0$, $u_1 = -1.0$, $\nu = 2$, $\gamma = 5/3$. При $t \leq 0$ соответствующая часть интегральной кривой лежит в правой полуплоскости $V \geq 0$ и описывает сжатие шарового объема газа в меньший шаровой объем с ненулевым радиусом. При $t \geq 0$ интегральная кривая лежит в левой полуплоскости $V \leq 0$, и еще до пересечения с параболой (1.5) она пересекает параболу (1.6) (на рис. 1 при $V < 0$ линия 4 пересекает линии 1, 2). Этот факт позволяет при $t \geq 0$ ввести ударную волну, распространяющуюся из начала координат с постоянной конечной скоростью. Перед этой ударной волной находится продолжающееся при $t > 0$ рассматриваемое автомодельное течение сжатия. За ударной волной — однородный покоящийся газ с большим значением плотности, чем перед ударной волной (как того требуют свойства ударного перехода [1]).

2. Автомодельная волна разрежения

Можно использовать приведенные выше волны сжатия для описания волн разрежения благодаря следующему свойству [1] непрерывных решений системы (1.1). При одновременной смене знака у времени и скорости газа, т. е. при замене

$$t' = -t, \quad u' = -u, \quad (2.1)$$

вид системы (1.1) не изменится и, следовательно, ее непрерывное решение перейдет также в решение системы (1.1). Однако, если два непрерывных решения состыкованы через ударную волну, то при замене (2.1) кусочно-составное течение с ударной волной не перейдет в кусочно-составное решение, поскольку изменится направление ударного перехода и это будет противоречить свойствам ударной волны [1]. Этот общий факт ниже продемонстрирован на конкретном примере.

При замене (2.1) интегральная кривая, помеченная на рис. 1 цифрой 4, перейдет сама в себя. Но та часть кривой, что лежит в правой полуплоскости $V \geq 0$, теперь будет соответствовать моментам времени $t \geq 0$. Эта часть интегральной кривой описывает волну разрежения, которая в данном примере с $\nu = 2$, $\gamma = 5/3$ при $t = 0$ имеет значения

$$c|_{\zeta=0} = 1.0, \quad u|_{\zeta=0} = 1.0. \quad (2.2)$$

При $t > 0$ это течение через выходящую из начала координат физического пространства звуковую C^+ -характеристику непрерывно примыкает к однородному, покоящемуся при $t > 0$ в окрестности точки $r = 0$ газу. В численно рассчитанном примере с начальными

данными (2.2) такая C^+ -характеристика является прямой $t/r = \zeta_o$ со следующими значениями: $\zeta_o \approx 3.61461$, $c(\zeta_o) \approx 0.27666$, $u(\zeta_o) \approx 2.2 \cdot 10^{-8}$. В [9] такое течение при $t \geq 0$ называется разлетом газа с образованием ядра покоя.

При $t < 0$ волну разрежения описывает та часть рассматриваемой интегральной кривой, которая лежит в левой полуплоскости $V < 0$.

Естественно, что эта линия заведомо пересечет параболу (1.6) ударного перехода. На рис. 2 (для скорости звука) и рис. 3 (для скорости газа) приведены распределения газодинамических параметров в этой волне разрежения в момент времени $t = -1$. Если сменить знак у скорости газа, то такие графики функций c , u будут соответствовать моменту времени $t = 1$ в волне сжатия. На рис. 2, 3 представлено качественное поведение разрывных параметров газа в окрестности точки A , соответствующей точке пересечения интегральной кривой, описывающей автомодельную волну сжатия, и параболы (1.6) (напомним, что в этом случае на рис. 3 знак скорости газа надо поменять).

В волне сжатия этот сильный разрыв присутствует при $t > 0$ и распространяется от точки $r = 0$ вправо. Перед ударной волной скорость газа отрицательна, а за ней — нулевая. Поэтому частицы газа переходят через этот разрыв справа налево. И в этом случае плотность газа за ударной волной больше, чем перед ней, как того требует направление ударного перехода.

Если сильный разрыв имеет место и в волне разрежения, то он должен распространяться при $t < 0$ справа налево к точке $r = 0$. В этом случае слева от него скорость газа равна нулю, а справа — положительна. Поэтому частица газа будет переходить через этот разрыв слева направо. Тогда в соответствии со свойствами ударного перехода [1] плотность газа должна повышаться при увеличении значения координаты r . Но в данном случае она понижается (см. рис. 2).

Таким образом, парабола (1.6) ударного перехода не имеет никакого отношения к случаю интерпретации рассматриваемого автомодельного решения как волны разрежения.

Дальнейшее построение интегральной кривой в полуплоскости $V < 0$ приводит к ее пересечению с параболой (1.5) слабого разрыва (пересечение линий 4 и 1 на рис. 1). В этой точке и скорость звука, и скорость газа отличны от нуля. Поэтому у газодинамических параметров на соответствующей прямой в плоскости физических переменных t , r возникает бесконечный градиент, который хорошо виден на рис. 2, 3 в точке $r = r_*$, где $r_* = -1/\zeta_*$. В приведенном примере с параметрами (2.2) соответствующее значение переменной $\zeta = \zeta_* \approx -0.77373$.

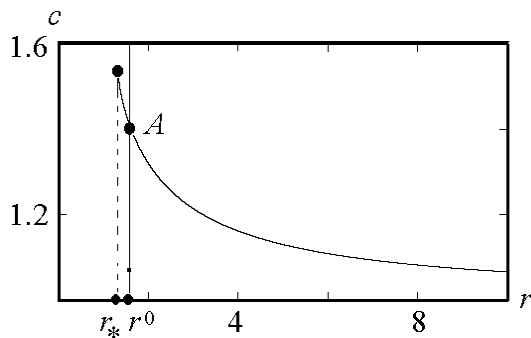


Рис. 2.

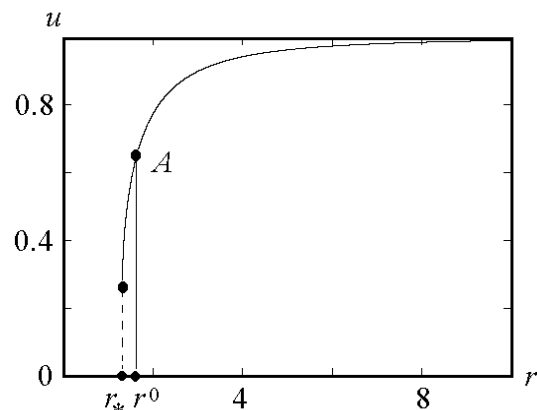


Рис. 3.

Причину возникновения градиентной катастрофы в неплоской волне разрежения можно выяснить при рассмотрении следующего примера. Пусть цилиндрический или сферический объем однородного покоящегося газа ограничен в точке $r = R$ ($R = \text{const} > 0$) непроницаемой стенкой, которая в некоторый момент времени начинает плавно выдвигаться со все возрастающей скоростью в сторону увеличения r . Тогда в течении газа возникнет слабый разрыв (C^- -характеристика), который отделяет еще покоящийся газ от возникшего течения разрежения. При движении этого слабого разрыва с постоянной скоростью к точке $r = 0$ за одинаковые промежутки времени в движение будут вовлекаться слои газа одинаковой ширины. Однако из-за уменьшения радиусов этих слоев их объем и, следовательно, масса газа в них будут уменьшаться. Таким образом, уменьшающиеся массы газа должны заполнять увеличивающийся объем. И если скорость газа, увлекаемого непроницаемым поршнем, будет достаточно велика, то рассматриваемое течение будет иметь тенденцию к быстрому и резкому уменьшению плотности газа. Представляется, что именно это и вызовет градиентную катастрофу, подобную представленной на рис. 2, 3.

Из приведенных рассуждений следует, что появление градиентной катастрофы можно ожидать либо при малых r , либо при больших значениях скорости газа. На самой C^- -характеристике, отделяющей покоящийся газ от течения разрежения, скорость газа равна нулю и, как уже отмечалось выше, градиентная катастрофа на этом слабом разрыве имеет место только в момент его прихода в точку $r = 0$, причем обязательно. Наибольшие значения скорости газа будут в окрестности выдвигающегося поршня. К сожалению, строго аналитически исследовать течение газа в этой области затруднительно.

Из свойств автомодельных решений [9] следует, что рассматриваемые интегральные кривые невозможно продолжить выше параболы (1.5) или, что то же самое, распределение газодинамических параметров невозможно продолжить левее точки $r = r_*$ (см. рис. 2, 3). Следовательно, с помощью автомодельных решений не построить течение разрежения в той части плоскости rOt , которая лежит ниже прямой $t/r = \zeta_*$.

3. Замыкание конфигурации течения

Возникшая в неплоском течении разрежения градиентная катастрофа говорит о том, что при большой скорости газа или при уменьшении r течение разрежения “имеет склонность” к резкому уменьшению плотности газа, к ее разрыву. Явление, когда плотность газа в некоторой точке волны разрежения уменьшается скачком, можно назвать “эффектом переразрезания”.

Чтобы раскрыть особенность в рассматриваемой автомодельной волне разрежения, возникшую из-за градиентной катастрофы, можно предложить две возможности замыкания всей конфигурации течения. Во-первых, поскольку на C^- -характеристике $t/r = \zeta_*$ и значение скорости газа постоянно ($u(\zeta_*) > 0$), можно предположить, что в автомодельное течение на этой характеристике происходит постоянный приток массы газа, ведь $\rho(\zeta_*) = c(\zeta_*)^{2/(\gamma-1)} > 0$. Причем этот приток массы должен иметь место на всей прямой $t/r = \zeta_*$, вплоть до точки $r = 0$. И только такой постоянный приток массы может обеспечить то, что “эффекта переразрезания” не возникнет.

Очевидно, что предложенный приток массы является гипотетическим. В иллюстрирующем примере, приведенном выше для выяснения причины градиентной катастрофы, такой приток массы газа отсутствует.

О том, что в средней части течения может иметь место “эффект переразрезания” —

скачкообразное уменьшение плотности, говорит вторая возможность замкнуть конфигурацию течения с автомодельной волной разрежения при использовании обобщения централизованной волны Римана [7, 12–14].

Теорема. *Существует единственное значение $\zeta = \zeta^o$: $\zeta_* < \zeta^o < 0$, лежащее в области существования автомодельной волны разрежения и позволяющее в некоторой окрестности точки A с координатами $(t = -1, r = r^o)$, где $r^o = -1/\zeta^o > 0$, единственным образом построить кусочно-составное течение, которое возникает при распаде следующего разрыва. В момент времени $t = -1$ (рис. 4) левее точки A , т. е. при $0 \leq r \leq r^o$, задан однородный покоящийся газ со скоростью звука $c = c^o$, где $c^o = -1/\zeta^o$. Правее точки A , т. е. при $r^o \leq r$, в момент времени $t = -1$ заданы распределения газодинамических параметров автомодельной волны разрежения: $c(-1, r) = c(\zeta)$, $u(-1, r) = u(\zeta)$, $\zeta = -1/r$, предельные значения этих параметров газа в самой точке A следующие: $c(-1, r^o) = c(\zeta^o) < c^o$, $u(-1, r^o) = u(\zeta^o) > 0$.*

Вначале, не конкретизируя значение константы ζ^o , рассмотрим возможность построения обобщения централизованной волны Римана в области 1 (рис. 4). Существование примыкающего к однородному, покоящемуся в области 0 газу обобщения централизованной волны, которое имеет амплитуду по плотности от $\rho = 0$ до $\rho = \rho_o > 0$ с произвольным значением ρ_o , доказано в [7, 14]. При этом каждая C^- -характеристика, выходящая из точки A , а также значения газодинамических параметров на ней задаются аналитическими функциями. В момент времени $t = -1$ в точке A скорость звука и скорость газа в таком течении связаны соотношением [7, 14]

$$c = c_o - \frac{(\gamma - 1)}{2}u, \quad c_o = \text{const.} \quad (3.1)$$

Заметим, что в бегущей влево централизованной волне Римана равенство (3.1) справедливо [1] во всех точках течения.

Поскольку при $u = 0$ значение скорости звука задано ($c = c^o$), константа c_o из соотношения (3.1) должна быть равна константе c^o . В результате условие (3.1) приобретает вид

$$c = -\frac{1}{\zeta^o} - \frac{(\gamma - 1)}{2}u.$$

На C^- -характеристике AB в точке A значения параметров газа должны принимать зна-

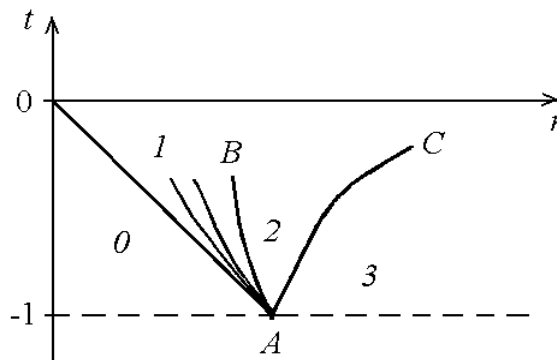


Рис. 4.

чения $c(\zeta^o)$, $u(\zeta^o)$. Поэтому должно выполняться и такое равенство

$$c(\zeta^o) = -\frac{1}{\zeta^o} - \frac{(\gamma - 1)}{2}u(\zeta^o).$$

Таким образом, существование требуемого в теореме значения $\zeta = \zeta^o$ будет возможно, если для уравнения

$$c(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} - \frac{(\gamma - 1)}{2}u(\zeta), \quad (3.2)$$

в котором стоят параметры рассматриваемой автомодельной волны разрежения, найдется корень $\zeta = \zeta^o$: $\zeta_* < \zeta^o < 0$. Факт существования такого корня устанавливается следующим образом. Уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$\zeta c(\zeta) = -\left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}\zeta u(\zeta)\right].$$

После возведения в квадрат и с учетом замен $z = \zeta^2 c^2$, $V = \zeta u$ получается соотношение

$$z = \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}V\right]^2. \quad (3.3)$$

Поэтому существование корня уравнения (3.2) эквивалентно тому, что во втором квадранте плоскости переменных V , z соответствующая интегральная кривая, задающая автомодельную волну разрежения, пересечет параболу (3.3). На рис. 1 парабола (3.3) помечена цифрой 3. Отметим, что ранее парабола (3.3) при исследовании автомодельных течений не встречалась.

Если учесть, что во втором квадранте плоскости VOz интегральная кривая автомодельной волны разрежения пересекает параболу (1.5) (на рис. 1 линии 4, 1), то становится очевидным, что до этого она обязательно пересечет и параболу (3.3) (линии 4, 3 на рис. 1). Следовательно, наличие нужной точки $\zeta = \zeta^o$ установлено. Этим заканчивается обоснование существования течения в области 1 и наличия характеристики AB .

В области 3 (см. рис. 4) рассматривается автомодельная волна разрежения. Существование ее звуковой характеристики AC следует из соответствующей теоремы для задачи Коши

$$\frac{dr}{dt} = u(t, r), \quad r(-1) = r^o > 0. \quad (3.4)$$

Здесь $u(t, r)$ — скорость газа в автомодельной волне разрежения. Поскольку $r^o > 0$, то и сама характеристика, и значения параметров газа на ней задаются аналитическими функциями.

В работе [15] доказана теорема, обеспечивающая существование аналитического решения у задачи Гурса с данными на звуковых характеристиках AB , AC . Благодаря этому устанавливается существование решения в области 2.

Сформулированная выше теорема о существовании и единственности кусочно-составного решения задачи о распаде соответствующего разрыва доказана. \square

В рассчитанном варианте с начальными данными (2.2) корень уравнения (3.3) имеет значение $\zeta^o \approx -0.62022$. На рис. 2, 3, показывающих распределения параметров газа $c(t, r)|_{t=-1}$, $u(t, r)|_{t=-1}$ в построенной автомодельной волне разрежения, поставлена точка A с координатой $r = r^o$ при найденных значениях $c(\zeta^o)$, $u(\zeta^o)$. На рис. 2, 3 показаны разрывы от этих значений $c(\zeta^o)$, $u(\zeta^o)$ (от точек A) до значений $c = -1/\zeta^o$ и $u = 0$ соответственно.

Ранее задачи о распаде подобных разрывов, в том числе в общем пространственном случае, были решены [2, 13, 14] при построении кусочно-составных течений, все части которых задавались с помощью локально сходящихся степенных рядов в пространствах специальных независимых переменных. Отличие результата доказанной выше теоремы от полученных ранее состоит в том, что в области \mathcal{Z} на рис. 4 находится конкретное авто-модельное течение, описать которое можно не только с помощью локально сходящихся рядов, но и при решении задачи (1.2), (1.4), поставленной не в особой точке $\zeta = 0$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Конечно, “эффект перерезания” в средней части течения возникает скорее всего только в тех сферически- и цилиндрически-симметричных течениях разрежения, где скорость газа достаточно велика. Если она относительно мала, то такого скачкообразного уменьшения плотности газа в средней части течений может и не быть.

Естественно, что доказанная теорема гарантирует существование кусочно-составного решения только в некоторой окрестности точки A . Вне такой окрестности течения газа из областей 1 и 2 на рис. 4 также могут иметь особенности. В том числе в момент прихода звуковой характеристики AO в начало координат обязательно имеет место градиентная катастрофа [3, 4, 14].

Следующий пример расчета системы (1.2) с $\nu = 2$, $\gamma = 5/3$ при начальных данных

$$c(\zeta)|_{\zeta=0} = 1.0, \quad u(\zeta)|_{\zeta=0} = 0.1 \quad (3.5)$$

может служить как для иллюстрации случая течений разрежения с малой скоростью газа, так и для осмысления особенности течения в точке $r = 0$.

Естественно, что все полученные при расчете варианта (2.2) эффекты имеют место и в данном варианте (3.5), в частности

$$\zeta_* \approx -0.93844; \quad c_* = c(\zeta_*) \approx 1.06613, \quad u_* = u(\zeta_*) \approx 6.04 \cdot 10^{-4}.$$

На рис. 1 интегральная кривая этого варианта помечена цифрой 5.

Поскольку u_* в данном примере мало отличается от нуля, можно предположить, что $t/r = \zeta_*$ и есть звуковая характеристика, отделяющая построенную волну разрежения от покоящегося однородного газа со значением $c = c_* \approx -1/\zeta_*$. Естественно, что это только предположение, сделанное на основе последних приближенных равенств.

Об обоснованности такого предположения можно, в частности, судить и по выполнению закона сохранения массы, т. е. по величине

$$\frac{|m_1 - m_*|}{m_1} \cdot 100 \%,$$

где m_1 , m_* — массы газа в шаровых объемах с $r = r_1 = 1$, $r = r_*$ и с постоянными значениями плотности $\rho_1 = 1$, $\rho_* = c_*^{2/(\gamma-1)}$ соответственно. Здесь r_* есть координата поршня, рассчитанная при совместном решении задач (1.2), (1.4), (3.4) в сторону уменьшения ζ от $\zeta = 0$ до $\zeta = \zeta_*$. При этом уравнение из задачи (3.4) решалось при начальном условии $r(0) = 1$. В приведенном варианте (3.5) такая погрешность в законе сохранения массы газа оказалась меньше, чем 0.06 %.

Таким образом, при малом значении скорости газа, т. е. при малом значении u_1 , приведенная автомодельная волна передает течение разрежения без разрыва плотности во всем секторе от прямой звуковой C^- -характеристики $t/r = \zeta_*$, которую с указанным приближением можно считать звуковой характеристикой однородного покоя, до другой прямой

звуковой C^+ -характеристики $t/r = \zeta_o$, отделяющей автомодельную волну разрежения от ядра покоя со скоростью звука $c = c(\zeta_o) \approx 0.93297$.

Эти приближенно состыкованные течения также показывают, что может происходить в момент градиентной катастрофы в точке $r = 0$. Иначе говоря, что может происходить в момент фокусировки слабого разрыва в центр или на ось симметрии в точке $r = 0$ при переходе значений времени от $t < 0$ к $t > 0$ в волнах разрежения.

В рассматриваемом составном течении при переходе от $t < 0$ к $t = 0$ параметры газа изменяются скачком: скорость звука от значения c_* уменьшается до значения $c_1 = 1.0$, скорость газа увеличивается от нуля до значения $u_1 = 0.1$. При переходе от $t = 0$ к $t > 0$ параметры газа также изменяются скачком: скорость звука от значения 1.0 уменьшается до значения $c(\zeta_o)$, скорость газа уменьшается от значения 0.1 снова до нуля. При этом итоговый перепад плотности газа определяется значениями $\rho_* = c_*^3 \approx 1.21180$, $\rho_o = c^3(\zeta_o) \approx 0.81209$ и равен величине $\Delta\rho \approx 0.39971$, что в относительном выражении составляет практически 1/3 от плотности исходного однородного покоящегося газа.

Данный приближенный пример дает основание предположить, что во всех течениях разрежения, а не только в близких к автомодельным при уменьшении радиуса кривизны слабого разрыва до нуля градиентная катастрофа, вызванная этим обстоятельством, приведет к скачкообразному уменьшению плотности в точке, где радиус слабого разрыва станет равным нулю. И, следовательно, после момента такой градиентной катастрофы можно ожидать возникновения течения с особенностью, аналогичной особенности в простой центрированной волне разрежения [1].

Все иллюстрирующие примеры даны для $\nu = 2$ — в случае сферической симметрии. Тем не менее все описанные свойства течений имеют место и в случае цилиндрических автомодельных волн разрежения ($\nu = 1$).

Заключение

На основании проведенных исследований можно высказать следующее предположение. В неплоских течениях разрежения либо при большой скорости газа, либо при фокусировке слабого разрыва на ось или в центр симметрии в отдельной точке течения может скачкообразно уменьшиться плотность газа с образованием разрыва первого рода. Последующий сразу за этим распад появившегося разрыва приведет (как это следует из общих газодинамических фактов [1, 9]) к обязательному возникновению течения с особенностью, аналогичной либо особенности в центрированной волне разрежения Римана, либо в автомодельном разлете газа с образованием ядра покоя.

Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
- [2] Тешуков В.М. Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // ПМТФ. 1980. № 2. С. 126–133.
- [3] JEFFREY A. The development of jump discontinuities nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1963. Vol. 14, N 1. P. 27–37.

- [4] БАУТИН С.П. Возникновение градиентной катастрофы при фокусировке на ось или в центр симметрии волн сжатия и разрежения. Екатеринбург: УрГУПС. Деп. в ВИНТИ от 18. 01. 1999 за № 109–В99.
- [5] СИДОРОВ А.Ф. О некоторых пространственных течениях газа, примыкающих к области покоя // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 3. С. 369–380.
- [6] КРАЙКО А.Н. Сферическое течение разрежения в окрестности точки отражения “граничной” характеристики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 6. С. 972–979.
- [7] БАУТИН С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.
- [8] БАУТИН С.П. Математическое описание безударного сильного сжатия одномерных объемов политропного газа // Вычисл. технологии, 2004. Т. 9, № 1. С. 26–33.
- [9] СЕДОВ Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
- [10] КАЖДАН Я.М. К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // ПМТФ. 1977. № 1. С. 23–30.
- [11] ЗАБАБАХИН И.Е., СИМОНЕНКО В.А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикл. математика и механика. 1978. Т.42, вып. 3. С. 573–576.
- [12] БАУТИН С.П. Приближенный метод расчета одномерных течений газа, вызванных немонотонным движением поршня // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 6. С. 1058–1064.
- [13] ТЕШУКОВ В.М. Центрированные волны в пространственных течениях газа // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 39. С. 102–118.
- [14] Баутин С.П. Схлопывание одномерной полости // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 50–59.
- [15] Баутин С.П. О существовании решений задачи А.Н. Крайко // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 3. С. 48–55.

*Поступила в редакцию 18 июня 2004 г.,
в переработанном виде — 10 ноября 2004 г.*