Вычислительные технологии **Том 10, № 3, 2005**

МОДИФИКАЦИЯ ПОДХОДА ОЕТТЛИ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ МНОЖЕСТВ AE-РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С. П. Шарый, Б. С. Джаныбеков
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: shary@ict.nsc.ru, janybekov@mail.ru

The paper presents a modification of Oettli approach for computing the optimal (exact) interval of the outer estimates of AE-solution sets for interval linear algebraic systems. In contrast with the original Oettli algorithm, we only examine the orthants that may have non-empty intersections with the solution set.

Введение

Предметом исследования в настоящей статье являются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

с вещественными интервальными $n\times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ и n-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ в правой части. Мы мыслим подобные системы как семейства “точечных” линейных систем вида $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Решение интервальных систем уравнений — это, как известно, решение тех или иных связанных с ними постановок задач, что требует, в свою очередь, указания множества решений системы (1) и способа его оценивания.

Напомним, что объединенным множеством решений ИСЛАУ называется множество

$$\Xi_{\text{uni}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\,\}, \tag{2}$$

образованное всевозможными решениями систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{A}$. Помимо этого наиболее популярного из множеств решений существуют и другие, обобщенные множества решений интервальных систем уравнений, частным случаем которых являются так называемые множества AE-решений [1, 2]. Обобщенные множества решений возникают в ситуациях, когда различные интервальные параметры системы имеют различные типы неопределенности. При этом в выделяющем предикате множества решений — логической формуле, выписываемой после вертикальной черты в определениях множеств вида (2), появляется смесь различных логических кванторов. Говорят, что интервальный параметр имеет A-неопределенность, если к соответствующей ему переменной применяется логический квантор всеобщности “$\forall$”. Наоборот, если к некоторой переменной в выделяющем предикате применяется квантор существования “$\exists$”, то этот интервальный параметр объявляется имеющим E-неопределенность. Множества AE-решений — это обобщенные множества решений интервальных систем уравнений, у которых в выделяющем предикате все кванторы всеобщности предшествуют кванторам существования. Последнее обстоятельство выражают также словами “выделяющий предикат имеет AE-форму”, что и обусловливает название множеств решений.

Поскольку порядок логических кванторов в определении множеств AE-решений фиксируется, мы можем описывать подобные множества решений путем прямого указания кванторов, которые соответствуют тем или иным элементам интервальной системы, а именно введем $n\times n$-матрицу $\alpha = (\alpha_{ij})$ и n-вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \forall, & \text{если } \boldsymbol{a}_{ij} \text{ имеет A-неопределенность,} \\ \exists, & \text{если } \boldsymbol{a}_{ij} \text{ имеет E-неопределенность;} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } \boldsymbol{b}_i \text{ имеет A-неопределенность,} \\ \exists, & \text{если } \boldsymbol{b}_i \text{ имеет E-неопределенность.} \end{cases}$$

Кроме того, пусть множество индексных пар (i,j) элементов матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. множество

$$\{\ (1,1),(1,2),\dots,(1,n),(2,1),(2,2),\dots,(2,n),\dots,\ (m,1),(m,2),\dots,(m,n)\ \}$$

разбито на две непересекающиеся части $\hat{\Gamma} = \{\,\hat{\gamma}_1,\dots,\hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\,\check{\gamma}_1,\dots,\check{\gamma}_q\}$, $p+q = mn$, такие что

элемент $\boldsymbol{a}_{ij}$ имеет A-неопределенность при $(i,j)\in\hat{\Gamma}$,

элемент $\boldsymbol{a}_{ij}$ имеет E-неопределенность при $(i,j)\in\check{\Gamma}$.

Аналогично пусть $\hat{\Delta} = \{\,\hat{\delta}_1,\dots,\hat{\delta}_r\}$ и $\check{\Delta} = \{\,\check{\delta}_1,\dots,\check{\delta}_s\}$, $\hat{\Delta}\cup\check{\Delta} = \{1,2,\dots,n\}$ — непересекающиеся множества натуральных индексов, такие, что в правой части ИСЛАУ

элемент $\boldsymbol{b}_i$ имеет A-неопределенность при $i\in\hat{\Delta}$,

элемент $\boldsymbol{b}_i$ имеет E-неопределенность при $i\in\check{\Delta}$.

При этом допускается естественная возможность того, что некоторые из множеств $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$ пусты. Ясно, что

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \forall, & \text{если } (i,j)\in\hat{\Gamma}, \\ \exists, & \text{если } (i,j)\in\check{\Gamma}, \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i\in\hat{\Delta}, \\ \exists, & \text{если } i\in\check{\Delta}, \end{cases}$$

а то или иное конкретное AE-множество решений однозначно задается указанием разбиений $\hat{\Gamma}\cup\check{\Gamma}$ и $\hat{\Delta}\cup\check{\Delta}$. Мы называем множеством AE-решений типа $\alpha\beta$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \ :=& \\ \{\ x\in\mathbb{R}^n \mid & \\ & (\forall a_{\hat{\gamma}_1}\in\boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_1})\cdots\ (\forall a_{\hat{\gamma}_p}\in\boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_p})\ (\forall b_{\hat{\delta}_1}\in\boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_1})\cdots(\forall b_{\hat{\delta}_r}\in\boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_r}) \\ & (\exists a_{\check{\gamma}_1}\in\boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_1})\cdots\ (\exists a_{\check{\gamma}_q}\in\boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_q})\ (\exists b_{\check{\delta}_1}\in\boldsymbol{b}_{\check{\delta}_1})\cdots(\exists b_{\check{\delta}_s}\in\boldsymbol{b}_{\check{\delta}_s}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\,Ax=b\,)\ \}. \end{aligned} \tag{3}$$

Подробнее о возникновении множеств AE-решений и их приложениях читатель может узнать, например, из работ [1, 2].

Существует и другой, эквивалентный, но более удобный способ введения множеств AE-решений. Определим интервальные матрицы $\boldsymbol{A}^\forall = (\boldsymbol{a}^\forall_{ij})$ и $\boldsymbol{A}^\exists = (\boldsymbol{a}^\exists_{ij})$ и интервальные векторы $\boldsymbol{b}^\forall = (\boldsymbol{b}^\forall_i)$ и $\boldsymbol{b}^\exists = (\boldsymbol{b}^\exists_i)$ тех же размеров, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$, следующим образом:

$$\boldsymbol{a}^\forall_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases} \qquad \boldsymbol{a}^\exists_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}^\forall_{i} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \forall, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases} \qquad \boldsymbol{b}^\exists_{i} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \exists, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

При этом

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\forall + \boldsymbol{A}^\exists, \qquad \boldsymbol{a}^\forall_{ij}\,\boldsymbol{a}^\exists_{ij} = 0,$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^\forall + \boldsymbol{b}^\exists, \qquad \boldsymbol{b}^\forall_{i}\,\boldsymbol{b}^\exists_{i} = 0,$$

т. е. матрицы $\boldsymbol{A}^\forall$, $\boldsymbol{A}^\exists$ и векторы $\boldsymbol{b}^\forall$, $\boldsymbol{b}^\exists$ образуют *дизъюнктные* (взаимно дополнительные) разложения для $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. В матрице $\boldsymbol{A}^\forall$ и векторе $\boldsymbol{b}^\forall$ сосредоточены все интервальные элементы системы (1), соответствующие A-неопределенности, а в матрице $\boldsymbol{A}^\exists$ и векторе $\boldsymbol{b}^\exists$ — все интервальные элементы, соответствующие E-неопределенности. Ясно, что между кванторными матрицей α и вектором β и дизъюнктными разложениями интервальной матрицы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\forall + \boldsymbol{A}^\exists$ и правой части $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^\forall + \boldsymbol{b}^\exists$ имеется взаимно-однозначное соответствие, так что мы можем свободно переходить от одного способа описания к другому, а множество AE-решений ИСЛАУ можно представить в виде

$$\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \boldsymbol{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \boldsymbol{b}^\forall)(\exists \check{A} \in \boldsymbol{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \boldsymbol{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}) \,\bigr\}. \tag{4}$$

Строение множеств решений интервальных систем уравнений, даже линейных, достаточно сложное, поэтому на практике обычно рассматривают некоторые оценки этих множеств. Мы будем заниматься задачей их внешнего интервального оценивания, стремясь найти интегральный вектор (т. е. брус со сторонами, параллельными координатным осям), который гарантированно содержит множество решений данной ИСЛАУ. При этом нас интересуют *оптимальные*, т. е. наименьшие по включению из внешних оценок (рис. 1). Отметим, что задача отыскания подобных оценок является NP-трудной [3].

Известно несколько подходов к нахождению оптимальных внешних оценок множеств решений интервальных систем уравнений как объединенного, так и AE-множеств решений [4–8]. Исторически самым первым из них был метод, предложенный У. Оеттли в [6], впоследствии он был распространен и на задачи оценивания множеств AE-решений [8]. Цель нашей статьи — представить модификацию метода Оеттли, которая позволяет существенно уменьшить объем необходимой вычислительной работы и даже ввести в метод Оеттли некоторый элемент *адаптивности*, т. е. сделать его способным подстраиваться под конкретные данные задачи и конфигурацию множества решений ИСЛАУ.

Подход Оеттли основан на том, что пересечение множеств решений ИСЛАУ с каждым из ортантов (координатных углов) пространства $\mathbb{R}^n$ — выпуклое полиэдральное множество. Следовательно, минимальное и максимальное значения каждой компоненты точек из этих пересечений могут быть точно найдены как решения задач линейного программирования. Выполняя перебор всех 2^n ортантов, мы решаем в каждом из них $2n$ задач

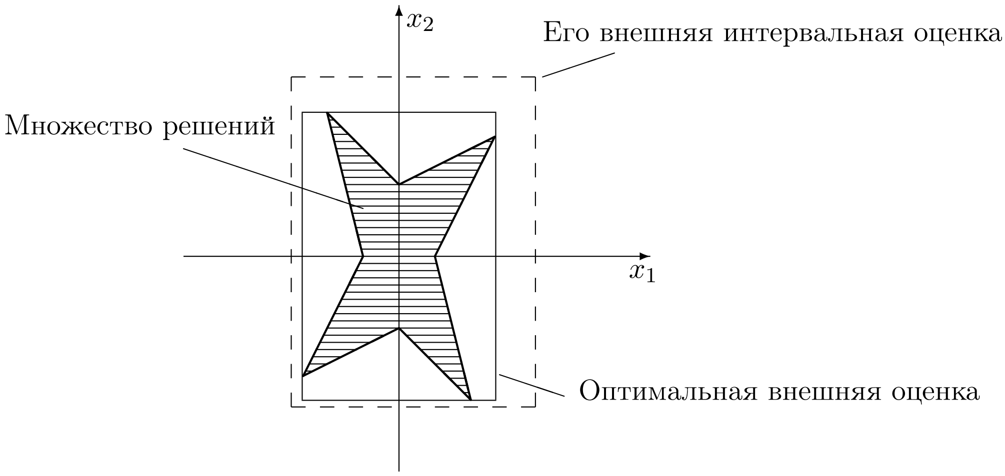

Рис. 1. Внешнее и оптимальное внешнее оценивание множества решений.

линейного программирования: на минимум и на максимум по каждому из n координатных направлений. Наконец, вычисляем по каждой координате наименьшую из оценок минимумов и наибольшую из оценок максимумов.

С момента опубликования работы У. Оеттли [6], где был представлен вышеописанный алгоритм, предпринимались неоднократные попытки усовершенствования его естественной и геометрически наглядной схемы. При этом различными авторами акцент делался на различных этапах исходного алгоритма Оеттли — на эффективном вычислении оценок пересечения множества решений с отдельными ортантами или на наиболее совершенной схеме обхода ортантов и т.п. Х. Янссон [9] предложил, по-видимому, наиболее удачную модификацию исходной идеи Оеттли. В ней обход ортантов осуществляется по принципу “от текущего к соседнему” на основе топологических свойств объединенного множества решений ИСЛАУ. К сожалению, идея Х. Янссона неприменима к множествам AE-решений, которые могут быть несвязными даже для ИСЛАУ с неособенными матрицами (см. пример в § 3).

Наша идея состоит в том, чтобы до начала перебора ортантов предварительно оценить каким-либо несложным способом, с какими ортантами исследуемое множество решений может иметь пересечение, а с какими заведомо не пересекается. Это можно сделать, к примеру, путем нахождения некоторой грубой внешней оценки множества решений. Чтобы еще больше упростить ситуацию, мы даже можем находить эту предварительную внешнюю оценку не для искомого множества AE-решений, а для объединенного множества решений некоторой вспомогательной ИСЛАУ, которая с помощью несложной процедуры получается из рассматриваемой системы.

Соответственно, наш метод состоит из нескольких этапов.

1. По данной ИСЛАУ строится вспомогательная интервальная линейная система, для которой находится предварительная внешняя оценка объединенного множества решений.

2. Вычисляются ортанты, имеющие непустое пересечение с найденной внешней интервальной оценкой.

3. Находятся оптимальные внешние оценки для пересечения множества решений с этими ортантами.

4. Берется интервальная оболочка из всех интервальных векторов, полученных на предыдущем этапе.

В итоге получаем наименьший по включению интервальный вектор, содержащий множество AE-решений рассматриваемой интервальной линейной системы.

Таким образом, в отличие от оригинального алгоритма Оеттли [6], который производит решение задач линейного программирования в каждом ортанте пространства решений $\mathbb{R}^n$, в нашем алгоритме оптимального оценивания рассматриваются только те ортанты, пересечение которых с множеством решений заведомо непусто и возможно непусто. Тем самым число шагов для нахождения оптимальной внешней оценки множества решений, как правило, уменьшается. Отметим также, что наш алгоритм выдает ответ к решаемой задаче лишь при естественном завершении работы, т. е. является финально гарантирующим в смысле [7, 8].

Мы уже упоминали, что задача нахождения оптимальной внешней оценки множеств AE-решений является NP-трудной [3]. Но в случае, когда множество решений расположено только в некоторых, не во всех, ортантах, наш алгоритм может существенно сэкономить усилия.

В этой работе мы придерживаемся обозначений, рекомендуемых проектом неформального международного стандарта [10]. В частности, интервалы и интервальные величины обозначаются нами жирным шрифтом. Подчеркивание и надчеркивание — $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}$ — обозначают нижний и верхний концы интервала $\boldsymbol{a}$, кроме того,

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}) \ \text{— середина (центр) интервала,}$$

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}) \ \text{— радиус интервала,}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \max\{\, |\overline{\boldsymbol{a}}|, |\underline{\boldsymbol{a}}| \,\} \ \text{— абсолютное значение (модуль) интервала.}$$

К интервальным векторам операции взятия середины, радиуса и абсолютного значения будут применяться покомпонентно. $\mathbb{IR}$, $\mathbb{IR}^n$ и $\mathbb{IR}^{n\times n}$ — это множества одномерных интервалов, интервальных n-векторов и интервальных $n \times n$-матриц соответственно.

1. Идея метода

Итак, пусть дана ИСЛАУ

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$, причем $\boldsymbol{A}$ — невырожденная интервальная матрица, т. е. матрица, в которой все точечные матрицы невырождены. Пусть, кроме того, зафиксированы кванторная $n \times n$-матрица α и кванторный n-вектор β, так что для системы (1) определено множество AE-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Нашей целью является нахождение интервального вектора, целиком содержащего это множество решений, причем данный вектор должен быть минимальным по включению.

На начальном этапе процесса решения нам необходимо найти какую-нибудь внешнюю оценку рассматриваемого множества AE-решений ИСЛАУ. Отметим, что оно может быть представлено в виде [1]

$$\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{\hat{A}\in\boldsymbol{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b}\in\boldsymbol{b}^{\forall}} \bigcup_{\check{A}\in\boldsymbol{A}^{\exists}} \bigcup_{\check{b}\in\boldsymbol{b}^{\exists}} \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}. \tag{5}$$

Если зафиксировать какие-либо матрицу $\tilde{A} \in \boldsymbol{A}^{\forall}$ и вектор $\tilde{b} \in \boldsymbol{b}^{\forall}$ в формуле (5), то получившееся множество

$$\bigcup_{\check{A}\in \boldsymbol{A}^{\exists}} \bigcup_{\check{b}\in \boldsymbol{b}^{\exists}} \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\tilde{A} + \check{A})x = \tilde{b} + \check{b} \} \tag{6}$$

будет, очевидно, включать в себя $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, так как мы опустили операцию пересечения. Но (6) является объединенным множеством решений интервальной системы

$$(\tilde{A} + \boldsymbol{A}^{\exists})\, x = \tilde{b} + \boldsymbol{b}^{\exists}, \tag{7}$$

поэтому его внешняя оценка $\boldsymbol{U}$ легко может быть найдена каким-либо из многочисленных разработанных для этой цели методов [4, 5, 12 и др.].

Далее можно переходить к перебору ортантов, имеющих непустое пересечение с $\boldsymbol{U}$. Для удобства формализации алгоритма введем

Определение. *Сигнатурой ортанта $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^n$ назовем n-вектор $v = (\, v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$ с компонентами $v_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, образованный знаками компонент внутренних точек $\mathcal{O}$, т. е. такой, что $v_i = sgn\ x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где x лежит внутри ортанта $\mathcal{O}$. Ортант с сигнатурой v обозначим как $\mathcal{O}_v$.*

Опишем наш метод в виде последовательности шагов, причем если пользователю до начала работы алгоритма известны все ортанты, имеющие непустое пересечение с множеством решений (например, из каких-либо физических соображений), то он может сразу перейти к шагу III:

I. Находится внешняя оценка $\boldsymbol{U}$ объединенного множества решений интервальной линейной системы $(\tilde{A} + \boldsymbol{A}^{\exists})x = \tilde{b} + \boldsymbol{b}^{\exists}$ (например, интервальным методом Гаусса).

II. Определяется количество ортантов p, имеющих непустое пересечение с внешней оценкой $\boldsymbol{U}$ множества решений. Вычисляются сигнатуры $v^{(i)}$ ортантов $\mathcal{O}_{v^{(i)}}$, пересекающихся с $\boldsymbol{U}$, $i = 1, 2, \dots, p$.

III. Находятся оптимальные внешние оценки множества решений $\boldsymbol{m}_{v^{(i)}}$ в ортантах с сигнатурами $v^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, p$:

$$\boldsymbol{m}_{v^{(i)}} = \Bigg(\Big[\min\{\, x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}_{v^{(i)}} \}, \max\{\, x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}_{v^{(i)}} \} \Big] \Bigg)_{\nu=1}^{n}. \tag{8}$$

Задачи нахождения $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}_{v^{(i)}} \}$ и $\max\{\, x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}_{v^{(i)}} \}$ являются задачами линейного программирования (ЛП), которые могут быть эффективно решены, например, симплекс-методом [12, 13]. Укажем их конкретный вид, основываясь на результатах работ [2, 8].

Значение $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}_v \}$ является решением задачи ЛП с ограничениями

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} (\operatorname{mid} \boldsymbol{A}) \cdot S - (\operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\exists} - \operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\forall}) \\ -(\operatorname{mid} \boldsymbol{A}) \cdot S - (\operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\exists} - \operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\forall}) \end{pmatrix} y \;\le\; \begin{pmatrix} b^c + (\operatorname{rad} \boldsymbol{b}^{\exists} - \operatorname{rad} \boldsymbol{b}^{\forall}) \\ -b^c + (\operatorname{rad} \boldsymbol{b}^{\exists} - \operatorname{rad} \boldsymbol{b}^{\forall}) \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y \;\ge\; 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $S = \operatorname{diag}\{\, v_1, v_2, \dots, v_n \}$ — диагональная матрица с элементами v_1, v_2, …, v_n по главной диагонали, и минимизируемой функцией

$$z = c^\top y, \tag{10}$$

Модифицированный метод Оеттли для оптимального внешнего оценивания множеств АЕ-решений ИСЛАУ

Вход

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ — интервальная матрица и интервальный вектор правой части рассматриваемой интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

α, β — кванторная матрица и кванторный вектор, задающие распределение типов неопределенности по элементам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно.

Выход

$\boldsymbol{m}$ — интервальная оболочка множества АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Алгоритм

`if` ($\boldsymbol{A}$ — вырожденная интервальная матрица) `then`
  завершаем работу алгоритма
`end if`

фиксируем матрицу $\tilde{A}$ и вектор $\tilde{b}$ и находим внешнюю оценку $\boldsymbol{U}$ объединенного множества решений системы (7);

находим p — количество ортантов, с которыми $\boldsymbol{U}$ имеет непустое пересечение;

векторам $v^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, присваиваем сигнатуры ортантов $\mathbb{R}^n$, которые пересекают $\boldsymbol{U}$;

`do for` $i = 1$ `to` p
  `do for` $\nu = 1$ `to` n
    в ортанте $\mathcal{O}_{v^{(i)}}$ решаем задачу ЛП с системой ограничений (9) и целевой функцией (10);
  `end do`
  `do for` $\nu = 1$ `to` n
    в ортанте $\mathcal{O}_{v^{(i)}}$ решаем задачу ЛП с системой ограничений (9) и целевой функцией (11);
  `end do`
  вычисляем интервальный вектор $\boldsymbol{m}_{v^{(i)}}$ согласно (8);
`end do`

$\boldsymbol{m} := \square\Bigl(\bigcup_{i=1}^{p} \boldsymbol{m}_{v^{(i)}}\Bigr)$;

где $c^\top = (0, \dots, 0, v_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $y = |x|$.

Значение $\max\{\, x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}_v \}$ является решением задачи ЛП с ограничениями (9) и максимизируемой функцией

$$z = c^\top y \tag{11}$$

с тем же вектором c, что и в (10). Таким образом, в ортанте, пересечение с которым множества решений определено нами как возможно непустое, должно быть выполнено $2n$ решений задач ЛП.

IV. Берется интервальная оболочка $\boldsymbol{m}$ для всех интервальных векторов $\boldsymbol{m}_{v^{(i)}}$, $i = 1, 2, \dots, p$. Тем самым получается действительно наименьший по включению интервальный вектор $\boldsymbol{m}$, целиком содержащий множество решений, — оптимальная внешняя оценка множества AE-решений ИСЛАУ.

Псевдокод алгоритма, реализующего данный метод, представлен выше.

2. Численный пример

На практике для проверки того, что интервальная матрица невырождена (неособенная), можно пользоваться простыми условиями, приведенными, к примеру, в работе [14]: для того чтобы интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ была невырожденной, достаточно выполнения любого из неравенств

$$\rho\big(\, |(\mathrm{mid}\, \boldsymbol{A})^{-1}| \cdot \mathrm{rad}\, \boldsymbol{A} \,\big) < 1,$$

$$\sigma_{\max}(\, \mathrm{rad}\, \boldsymbol{A}\,) < \sigma_{\min}(\, \mathrm{mid}\, \boldsymbol{A}\,),$$

где ρ — спектральный радиус матрицы, а $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ — соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы, т. е. собственные числа произведения матрицы на ее транспонированную матрицу. Отметим, что первый из этих признаков связывается с именем Х. Бека, а второй был впервые получен З. Румпом.

Рассмотрим теперь пример применения нашего алгоритма для нахождения оптимальной внешней оценки множества AE-решений типа $\begin{smallmatrix} \exists\exists & \exists \\ \exists\forall & \exists \end{smallmatrix}$ интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-2, 2] & [1, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-0.75, 0.75] \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Интервальная матрица

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-2, 2] & [1, 3] \end{pmatrix}$$

является невырожденной, так как согласно признаку Х. Бека

$$\rho\big(\, |(\mathrm{mid}\, \boldsymbol{A})^{-1}| \cdot \mathrm{rad}\, \boldsymbol{A} \,\big) = 0.5 < 1.$$

Далее, во вспомогательной системе (7) в качестве фиксированной матрицы $\tilde{A} \in \boldsymbol{A}^\forall$ возьмем среднюю матрицу $\mathrm{mid}\, \boldsymbol{A}$, а внешнюю оценку объединенного множества решений получившейся ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-2, 2] & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-0.75, 0.75] \\ 2 \end{pmatrix}$$

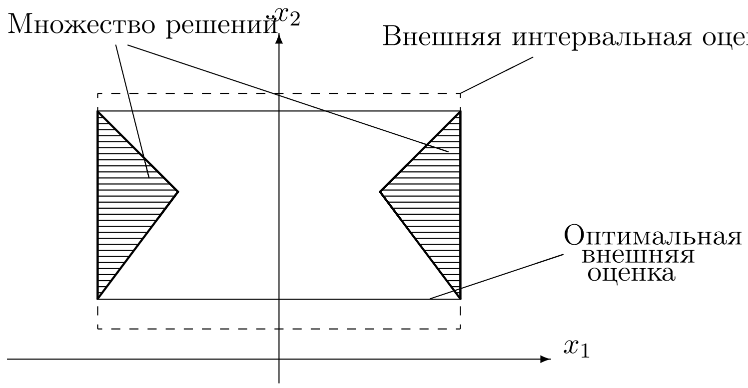

Рис. 2. Внешняя и оптимальная внешняя оценки множества решений ИСЛАУ (12).

вычислим интервальным методом Гаусса. Его расчетные формулы можно найти, к примеру, в [4, 5]. В результате получим следующую предварительную внешнюю оценку множества решений:

$$\begin{pmatrix} [-0.75, 0.75] \\ [0.25, 1.75] \end{pmatrix},$$

из которой видно, что множество решений может пересекаться с ортантами, имеющими сигнатуры $(1, 1)$ и $(-1, 1)$. Переберем их.

Для ортанта с сигнатурой $(1, 1)$ путем решения четырех задач линейного программирования находим оптимальную внешнюю оценку множества решений:

$$\boldsymbol{m}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} [0.5, 0.75] \\ [0.5, 1.16667] \end{pmatrix}.$$

Полученная таким же образом оптимальная внешняя оценка части множества решений, лежащей в ортанте с сигнатурой $(-1, 1)$, есть

$$\boldsymbol{m}_{(-1,1)} = \begin{pmatrix} [-0.75, -0.5] \\ [0.5, 1.16667] \end{pmatrix}.$$

Итак, рассмотрены все ортанты, пересечение которых с множеством решений может быть непустым, поэтому процесс оценивания кусков множества решений в ортантах на этом заканчивается. Мы можем собрать воедино все результаты для отдельных ортантов, получая

$$\boldsymbol{m} = \Box\left(\bigcup_{i=1}^{2} \boldsymbol{m}_{v^{(i)}} \right) = \begin{pmatrix} [-0.75, 0.75] \\ [0.5, 1.16667] \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 изображены рассматриваемое множество $\begin{smallmatrix} \exists\exists & \exists \\ \exists\forall & \exists \end{smallmatrix}$-решений ИСЛАУ (12), его внешняя оценка и оптимальная внешняя оценка. Как видим, множество решений системы уравнений оказалось несвязным.

Заключение

Подводя итоги работы, еще раз отметим, что в отличие от исходного подхода Оеттли к оптимальному внешнему оцениванию множеств решений, в предлагаемом алгоритме мы стараемся ограничить себя рассмотрением только тех ортантов, пересечение которых с множеством решений может быть непустым. Задача нахождения оптимальной внешней оценки множеств AE-решений является NP-трудной, так что принципиально обойти экспоненциальную трудоемкость процесса решения нам не удастся, но прием нахождения предварительной грубой внешней оценки может существенно повысить эффективность подхода Оеттли.

Список литературы

[1] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61.

[2] Shary S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. 2002. Vol. 8, N 5. P. 321–418.

[3] Lakeyev A.V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 1. С. 12–23.

[4] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[5] Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[6] Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // SIAM J. Numer. Anal. 1965. N 2. P. 115–118.

[7] Shary S.P. On optimal solution of interval linear equations // SIAM J. Numer. Anal. 1995. Vol. 32, N 2. P. 610–630.

[8] Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Ч. 1, 2 // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 6. С. 90–113; Ч. 2. — Т. 8, № 1. С. 84–109.

[9] Jansson Ch. Calculation of exact bounds for the solution set of linear interval systems // Linear Algebra and Its Appl. 1997. Vol. 251. P. 321–340.

[10] Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A. et al. Standardized notation in interval analysis // в печати в журнале Reliable Computing (см. `http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int`)

[11] Шарый С.П. Алгебраический подход во "внешней задаче" для интервальных линейных систем // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 67–114.

[12] Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и приложения. М.: Прогресс, 1974.

[13] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. М.: Мир, 1991.

[14] Rex G., Rohn J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 20. P. 437–445.

Поступила в редакцию 9 июля 2004 г.