

О КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОЙ И ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТЯХ*

В. И. БУКРЕЕВ

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: buklabex@hydro.nsc.su

Some results are discussed of experimental study of gravity waves generated by a translatory movement of the vertical plate in homogeneous and two-layer fluids. Particular emphasis has been placed on the fact that, at the specified propagation speed, the waves lose their stability and break down. The hypothesis is supported by the fact the magnitude of this speed coincides with the limiting propagation speed of the solitary wave for waves of the more general form as well. Quantitative data are given which might be useful for testing the results of numerical computations.

Постановка задачи. Рассмотрим волновой бассейн с плоским горизонтальным дном длиной 7.3 м и шириной 0.2 м, который заполнялся на глубину $H = 1 - 6$ см (рис. 1) однородной по плотности или двухслойной жидкостью (водой и керосином). В невозмущенном состоянии жидкость покоилась. Возмущение вносилось вертикальной пластиной l , полностью перекрывающей поперечное сечение бассейна, не допускающей перелива через себя и движущейся вдоль бассейна по заданному закону:

$$x_*(t) = \begin{cases} Ut + UT_1[\exp(-t/T_1) - 1] & \text{при } 0 \leq t < T_2, \\ l & \text{при } t \geq T_2, \end{cases} \quad (1)$$

где t — время, x_* — продольная координата произвольной точки пластины, U (скорость), l (длина пути), T_1 (характерное время разгона) и T_2 (время движения) — параметры. Используемая далее неподвижная система координат показана на рис. 1. Вертикальная координата отсчитывается от дна бассейна вверх. При $t = 0$ $x = 0$. Вследствие условия

$$l = UT_1 + UT_2[\exp(-T_2/T_1) - 1]$$

из четырех параметров закона движения независимы только три.

С помощью чувствительных волномеров и киносъемки с частотой 32 кадра в секунду регистрировались волны на свободной поверхности, а в двухслойной жидкости и на границе раздела.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №95-01-01164.

© В. И. Букреев, 1997.

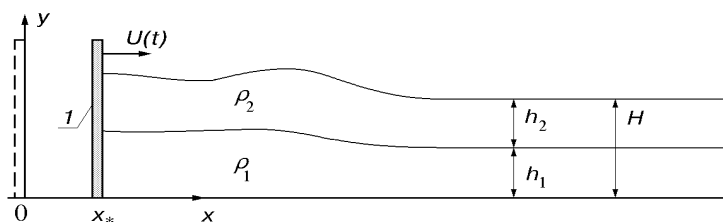


Рис. 1.

Рассматриваемая задача представляет интерес по крайней мере в трех аспектах. Во-первых, она имеет определенную аналогию с фундаментальной задачей газовой динамики о движении поршня в трубе. Эта аналогия имеет ограниченную область применимости, но полезна с физической точки зрения, а также при качественном анализе соответствующих математических моделей и апробации численных методов. Во-вторых, полное перекрытие поперечного сечения потока можно трактовать как предельный случай задачи о движении или обтекании препятствия, которой в последние десятилетия уделяется большое внимание [1–3 и др.]. В третьих, указанным возмущением легко реализуется процесс обрушения волн в сравнительно простых условиях. Этот процесс служит не менее удобным объектом для изучения фундаментальной проблемы перехода от порядка к хаосу, чем турбулизация пристенных и струйных течений. Несмотря на большое внимание, уделяемое проблеме турбулентности, количественные исследования процесса обрушения волн только начинаются [4–6].

В однородной жидкости аналогичные по постановке опыты проводились ранее в [7–9]. В работе [7] основное внимание уделялось не волнам, а силовому взаимодействию пластины с жидкостью, в [8] изучались только гладкие волны до стадии обрушения, [9] — прежняя публикация автора. Численных экспериментов выполнено немного больше. В качестве примеров можно отметить работы [10, 11]. Прямые аналоги физических и численных экспериментов для двухслойной жидкости автору не известны. Однако заслуживают внимания многочисленные исследования волн при движении (или обтекании) препятствия, не полностью перекрывающего поперечное сечение бассейна (например, обзоры [12, 13]).

Однородная жидкость. Первая и вторая критические скорости распространения гравитационных волн на мелкой воде. Для кинематических характеристик гравитационных волн наиболее важными параметрами рассматриваемой динамической системы являются глубина H и ускорение силы тяжести g . Они определяют характерную скорость $c_* = b\sqrt{gH}$, где b — безразмерная величина, которая в общем случае сама зависит от всех других параметров системы (в частности, от тех же g и H , от вязкости жидкости, коэффициента поверхностного натяжения и др.), а на практике может принимать несколько выделенных значений. Значение $b_1 = 1$ широко известно. Соответствующая скорость $c_1 = \sqrt{gH}$ ограничивает сверху область существования линейных гармонических волн и снизу — кноидальных (в частности, уединенных) волн. В гидравлике c_1 называется критической скоростью. Ее аналогом в газовой динамике является скорость звука. Привлекает внимание еще одно характерное значение $b_2 > b_1$, а именно то, которому соответствует предельная сверху область существования уединенных волн. В зависимости от исходной математической модели в теории получаются разные значения b_2 . На основе второго приближения теории мелкой воды найдено $b_2 = \sqrt{2}$ [14], а расчеты на основе полной модели потенциального движения дали $b_2 = 1.294$ [15]. В работе [15] приведен обзор

других исследований этого вопроса.

Одна из целей данной работы состояла в экспериментальной проверке гипотезы о том, что предельная скорость распространения уединенных волн критична и для волн более общего вида. Признаком критичности служило то, что в процессе своей эволюции из состояния покоя волны, пересекая границу $c = c_1$ (c — скорость распространения), оставались гладкими, но обрушивались, если пересекали границу $c = c_2$. Указанная гипотеза неизменно подтверждалась во многих десятках опытов, причем обрушение имело место при втором из приведенных теоретических значений b_2 . При обратном переходе из закритической области в докритическую обрушивающиеся волны становились гладкими. Упоминание об обрушении волн при переходе через вторую критическую скорость имеется также в [8].

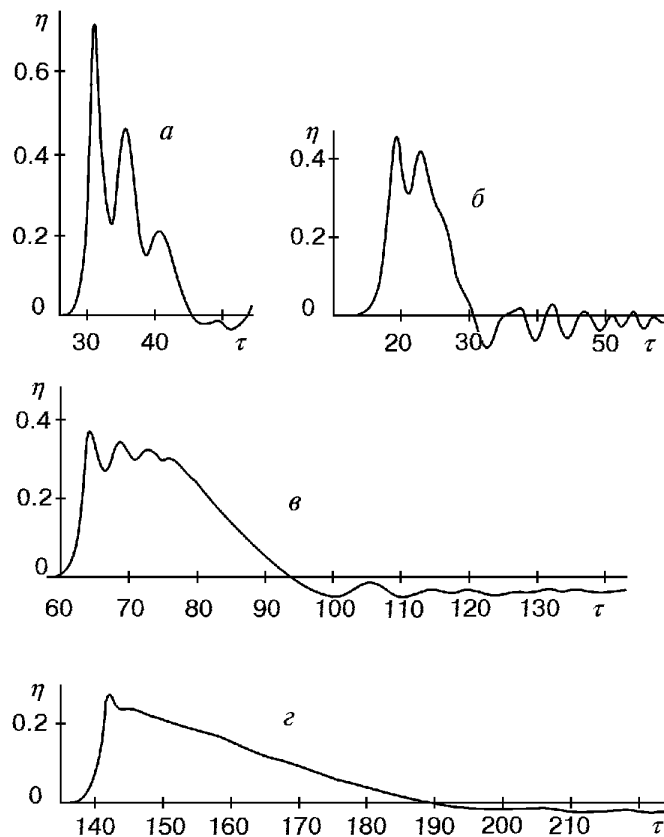


Рис. 2.

На рис. 2 приведены примеры волн разного вида, сохранявших гладкость при $c < c_2$, но обрушивавшихся при $c \geq c_2$. Они существенно отличаются от уединенной волны по многим признакам. В частности, они нестационарны. Безразмерная высота их первого гребня в предкритическом состоянии изменяется от 0.40 до 0.71, тогда как по теории [15] безразмерная амплитуда уединенной волны при $c = c_2$ равна 0.79 (следует отметить, что предельная амплитуда теоретической уединенной волны равна 0.827 и достигается при скорости распространения, меньшей c_2 [15]).

Экспериментальные волны на рис. 2 зарегистрированы неподвижными волномерами, расположенными при $x = x_j$. Приняты обозначения: $\tau = t\sqrt{g/H}$, $\eta = (y - H)/H$ (y — ордината свободной поверхности); η_m — высота первого гребня. Для нестационарных волн требуется дополнительно определить понятие скорости распространения. Далее фигури-

рует вычисленная по сигналам двух неподвижных волномеров, смещенных на $\Delta x \leq 10H$, скорость продольного перемещения c_E той точки переднего фронта волны, для которой $\eta = \eta_m/2$. Для волн $a-g$ на рис. 2 значения величин [H (см), x_j/H , l/H , U/\sqrt{gH} , $T_1\sqrt{g/H}$, c_E/\sqrt{gH} , η_m] равны [5.5, 34.5, 5.0, 0.396, 2.74, 1.30, 0.71], [3.2, 18.8, 4.4, 0.356, 2.80, 1.26, 0.45], [1.0, 70, 10, 0.351, 7.46, 1.28, 0.40], [1.0, 170, 10, 0.492, 6.58, 1.25, 0.29] соответственно. Волны $a-b$ близки к критическому состоянию, но еще сохраняют гладкость. Волна g уже побывала в области $c > c_2$, потеряла часть своей энергии при обрушении и снова стала гладкой. Перед обрушением она была похожа по форме на волну b , а после возврата в докритическую область приобрела вид так называемой N -волны.

Разрушительные тенденции при $c > c_2$ так сильны, что им неспособны противостоять ни дисперсия (как это имеет место при $c_1 < c < c_2$), ни поверхностное натяжение (для большинства встречающихся на практике жидкостей). Только достаточно сильное “благоприятное” ускорение способно на некоторое время затянуть развитие процесса обрушения при переходе через границу $c = c_2$. Для таких волн наблюдается своеобразный гистерезис по скорости распространения. Сильно ускоренная волна может сохранить гладкость при переходе в закритическую область, но постепенно скорость ее распространения замедляется, достигает c_2 сверху, здесь волна обрушивается, после чего ее скорость может снова возрасти. При современном уровне знаний возможность существования стационарных свободных гладких волн с $c > c_2$ проблематична.

Из выполненных опытов следует, что на практике обрушение волн происходит только при $c \geq c_2$, а разрывные решения первого приближения теории мелкой воды при $c_1 < c < c_2$, соответствующие обрушивающимся волнам, являются “дефектом” этой математической модели. На границе $c = c_1$ с разрушительными тенденциями вполне справляются нестационарность и дисперсия, так что неустойчивость приводит здесь только к появлению гладких двумерных ондуляций и трехмерных косых волн.

В табл. 1 приведены выборочные значения c_{E2}/c_2 , где c_{E2} — значение c_E в начальный момент процесса обрушения. Экспериментальные данные получены при разных сочетаниях параметров, из которых в таблице указан только H . При вычислении c_2 взято $b_2 = 1.294$. Разброс c_{E2}/c_2 относительно 1 лежит в пределах погрешности измерений, коэффициент вариации которой был порядка 2%. Такая погрешность позволяет уверенно отдать предпочтение значению $b_2 = 1.294$, а не $\sqrt{2}$.

Т а б л и ц а 1

H , см	1.0	1.6	2.4	3.2	4.8	5.5	6.8
c_{E2}/c_2	0.993	0.971	0.972	1.001	1.005	0.992	0.980

В табл. 2 приведены данные об эволюции одной и той же волны при $H = 3$ см, $l/H = 30$, $U/\sqrt{gH} = 0.448$, $T_1\sqrt{g/H} = 7.78$. Она зарегистрирована неподвижными волномерами, расположенными в трех точках по оси x (соответствующие конкретные значения ξ приведены в таблице), в виде функции $y(t)$. Принято обозначение $\Delta\tau = \tau - \tau_0$, где τ_0 — указанное в таблице условное начало отсчета времени, до которого волна еще не достигла рассматриваемой точки. Обрушение волны произошло в окрестности $\xi = 55 \pm 5$, так что при $\xi = 18.3$ она еще далека от критического состояния, при $\xi = 51.6$ близка к обрушению, а при $\xi = 85$ (см. табл. 2) обрушение полностью развито. Обрушение продолжалось вплоть

Т а б л и ц а 2

$\xi = 18.3, \tau_0 = 13.9,$ $c_E/\sqrt{gH} = 1.165$		$\xi = 51.7, \tau_0 = 41.1,$ $c_E/\sqrt{gH} = 1.300$		$\xi = 85.0, \tau_0 = 68.4,$ $c_E/\sqrt{gH} = 1.280$	
$\Delta\tau$	η	$\Delta\tau$	η	$\Delta\tau$	η
0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
1.81	0.0063	1.81	0.0036	1.81	0.0159
2.89	0.0267	2.53	0.0109	2.53	0.0658
3.62	0.0723	3.26	0.0364	3.26	0.2540
4.34	0.1666	3.99	0.1641	3.99	0.5240
5.06	0.1918	4.70	0.5471	4.16	0.7195
5.79	0.3710	5.43	0.6109	4.70	0.4920
6.51	0.3961	6.15	0.4377	5.43	0.3837
7.78	0.3773	6.87	0.3373	6.15	0.3410
9.04	0.3930	7.41	0.2991	7.23	0.4476
10.13	0.3961	8.32	0.4084	7.96	0.5062
11.57	0.4323	9.40	0.5926	8.68	0.4441
12.65	0.4276	10.49	0.4011	9.77	0.3091
13.74	0.4433	11.03	0.3756	10.49	0.2789
16.28	0.4433	11.94	0.4195	11.94	0.4015
18.81	0.4433	13.20	0.4778	12.66	0.4618
19.89	0.3931	14.47	0.3866	14.11	0.3056
20.98	0.2924	15.19	0.3629	15.37	0.2220
22.79	0.1336	15.99	0.3683	16.46	0.2007
24.23	0.0031	17.36	0.3319	17.36	0.2505
25.68	-0.0496	18.81	0.2662	18.45	0.3091
26.77	-0.0585	20.26	0.2407	19.53	0.2646
28.21	-0.0035	21.34	0.2097	20.26	0.2202
29.48	0.0299	22.79	0.1568	21.52	0.1758
30.56	-0.0035	24.05	0.1368	22.79	0.1492
32.01	-0.0461	24.78	0.1349	24.96	0.1510
33.82	0.0144	26.40	0.0820	25.86	0.1581
35.63	-0.0532	28.21	0.0548	27.49	0.1155
37.26	0.0314	30.38	0.0146	29.66	0.1012
38.70	-0.0372	32.19	0.0000	31.11	0.0658
40.15	0.0063	34.36	-0.0246	33.28	0.0657
41.60	-0.0301	36.17	-0.0288	35.08	0.0355
43.58	0.0094	37.98	0.0000	36.53	0.0426
45.57	-0.0160	40.51	0.0182	38.34	0.0089
47.38	0.0000	42.32	0.0000	40.51	0.0000

до ξ порядка 130, и все это время скорость распространения была в окрестности c_2 (в пределах погрешности измерений).

Следует отметить, что картина обрушения не всегда бывает такой, как привычно видеть при выходе крупной волны на мелководье, т. е. с предварительным образованием четко выраженного остроконечного завитка, направленного вперед. Обрушение может начинаться со сползания некоторой массы жидкости с гребня по переднему склону волны подобно лавине, причем еще до сползания на переднем склоне появляется характерная рябь.

Именно такой сюжет наблюдался для волны, приведенной в табл. 2. В сдвиговом потоке двухслойной жидкости возможно опрокидывание гребня назад по ходу распространения волны. Наконец, возможно образование вертикального или почти вертикального султана на гребне неустойчивой волны, например, предельной волны Стокса.

Двухслойная жидкость. В этом случае дополнительно имеются два параметра: $\lambda = \rho_2/\rho_1$ и $m = h_2/h_1$. Кроме того, для устойчивости течения важно наличие межфазного натяжения на свободных границах. В частности, без учета межфазного натяжения сдвиговое течение двухслойной жидкости абсолютно неустойчиво по механизму Кельвина—Гельмгольца. В данных опытах коэффициент межфазного натяжения между водой и керосином был порядка 40 дин/см, и указанная неустойчивость не проявлялась до разности скоростей между слоями около 20 см/с.

Характер движения двухслойной жидкости зависит от того, является ли верхняя граница твердой крышкой или свободной поверхностью. В первом случае имеется только одна свободная граница, и рассматриваемые здесь критические скорости определяются теоретическими формулами [14]:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon g h_1 h_2}{h_1 + (1 + \varepsilon) h_2}}, \quad \varepsilon = \frac{1 - \lambda}{\lambda}, \quad (2)$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} \sqrt{gH}. \quad (3)$$

Формула (3) получена во втором приближении теории мелкой воды и, возможно, допускает уточнение. Для предельной амплитуды уединенной волны в этом приближении получено [14]:

$$a_m = H / (1 + \sqrt{\lambda}). \quad (4)$$

В данных опытах использовалась двухслойная жидкость вода—керосин со свободной поверхностью и $\lambda = 0.8$. В этом случае имеются две свободные границы, две моды собственных колебаний и по крайней мере четыре критические скорости. Пара скоростей, аналогичных по смыслу c_1 , определяется дисперсионным соотношением линейной теории $c(k)$ при $k \rightarrow 0$ (k — волновое число малых гармонических возмущений). Соответствующий анализ дает формулу [14]

$$(c_{11}, c_{21}) = \sqrt{gH} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1 - \lambda)h_1 h_2}{H^2}} \right]}, \quad (5)$$

где первый индекс указывает на номер свободной границы (нумерация снизу вверх), а второй — на номер критической скорости; индекс 2 и знак + соответствуют поверхностной волне. Строгих формул для второй пары критических скоростей автору найти в литературе не удалось.

В данных опытах изучалось поведение волн в окрестности наибольшей из критических скоростей c_{22} , и ее априорная оценка осуществлялась на основе следующих соображений. В реальных условиях, когда λ мало отличается от 1, влияние разности плотностей на первую критическую скорость для поверхностной моды невелико. Это следует из (5). Даже при $\lambda = 0.8$ скорость c_{21} уменьшается по сравнению с c_2 для однородной жидкости (при той же общей глубине) не более, чем на 2.5% (максимально — при $m = 1$). Следует ожидать, что

это справедливо и для c_{22} , так что для ее априорной оценки можно использовать формулу (5) со знаком $+$ и дополнительным множителем $b_2 = 1.294$. Именно такое значение c_{22} использовалось для нормировки экспериментальных данных и подтвердилось в пределах точности измерений.

В методическом отношении опыты с двухслойной жидкостью существенно сложнее, чем с однородной, и пока получена ограниченная экспериментальная информация. С уверенностью можно сделать лишь следующие выводы. По крайней мере при $0.8 \leq \lambda \leq 1$ и $m > 1$ поведение поверхностных волн мало отличается от случая однородной жидкости. В частности, они также гладким образом проходят из состояния покоя через c_{21} и обрушиваются в окрестности c_{22} . Это иллюстрируется табл. 3, полученной при $H = 4.8$ см и $\lambda = 0.8$, (c_{E2} — экспериментальное значение c_{22}). Для всех указанных в таблице значений m кроме $m = 0.1$ c_{E2} совпадает с c_{22} в пределах точности измерений. При $m = 0.1$, возможно, усилилось совместное стабилизирующее влияние поверхностного натяжения на двух близко расположенных свободных границах, и c_{E2} заметно превысило c_{22} . Это напоминает эффект гашения ветровых волн при разливе масла на водную поверхность.

Т а б л и ц а 3

m	0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	11
c_{E2}/c_{22}	1.00	1.10	0.99	0.97	0.99	0.97	1.01	1.02

При прочих равных условиях обрушение поверхностной волны начиналось при промежуточных значениях x по сравнению с одной водой или одним керосином. Вариация критических x была в пределах 10% при наименьшем значении для одной воды. При $m > 1$ головная часть внутренней волны оставалась гладкой даже тогда, когда скорость ее распространения превышала c_{22} и поверхностная волна обрушивалась. Но при рассматриваемом способе возмущения внутренняя волна порождается поверхностной волной и в определенном смысле является вынужденной. Поэтому вопрос о существовании гладких стационарных свободных внутренних волн с $c > c_{22}$ также остается открытым.

С целью внести возмущение, которое порождало бы главным образом свободную внутреннюю волну, были выполнены опыты с движением препятствия, перемещаемого по дну бассейна и не полностью перекрывающего поперечное сечение, т.е. допускающего переток жидкости через себя. Если при этом $m \gg 1$, то поверхностная мода возбуждается слабее внутренней. Однако в этой серии опытов возникли неприятности из-за неустойчивости Кельвина—Гельмгольца, которая неизменно развивалась раньше, чем достигалась скорость c_{12} и даже c_{11} . В результате было трудно однозначно судить о том, происходило ли обрушение в окрестности c_{12} или нет. Вместе с тем замечены три эффекта.

Во-первых, при неполном перекрытии сечения никак не удается разогнать внутреннюю волну до скорости, превышающей c_{12} . Система “предпочитает” затратить избыточную энергию возмущения на перемешивание жидкости между слоями за счет неустойчивости Кельвина—Гельмгольца, а не “пропустить” возмущение впереди препятствия в закритическую область по отношению к c_{12} . Этот эффект нашел отражение в математической модели [16], учитывающей перемешивание жидкости между слоями. Во-вторых, при достижении значения c_{12} в поведении внутренней волны наблюдалась особенность, заключающаяся в том, что при меньшей скорости распространения неустойчивость Кельвина—Гельмгольца не развивалась на переднем склоне волны. Он оставался гладким, и чем меньше была скорость распространения, тем больший участок головной части волны сохранял гладкость. При $c = c_{12}$ указанная неустойчивость охватывала и передний

склон. В-третьих, создается впечатление, что при $c = c_{12}$ все-таки происходило обрушение переднего фронта, но не вперед, а назад по ходу движения волны.

Было бы интересно изучить поведение внутренней волны при неполном перекрытии поперечного сечения препятствием и столь большом межфазном натяжении, что оно позволило бы пересечь границу $c = c_{12}$ без перемешивания из-за неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. Но это проще сделать в численном эксперименте, где варьировать межфазное натяжение легче, чем в опытах с реальными жидкостями. Упрощающим обстоятельством служит то, что в расчетах можно использовать схему движения под крышкой.

Автор благодарит А. В. Гусева, который провел основную часть непосредственных измерений.

Список литературы

- [1] THEWS J. F., LANDWEBER L. *The influence of shallow water on the resistance of a cruiser model*. US Experimental Model Basin. Reports, No. 414, Washington, 1935.
- [2] БУКРЕЕВ В. И., ГАВРИЛОВ Н. В. Экспериментальное изучение возмущений впереди крыла, движущегося в стратифицированной жидкости. *ПМТФ*, №2, 1990, 102–105.
- [3] PEDERSEN G. Three-dimensional wave patterns generated by moving disturbances at transcritical speeds. *J. Fluid Mech.*, **196**, 1988, 39–63.
- [4] NADAOKA K., HINO M., KOYANO Y. Structure of turbulent flow field under breaking waves in the surf zone. *Ibid.*, **204**, 1989, 359–387.
- [5] BONMARIN P. Geometrical properties of deep-water breaking waves. *Ibid.*, **209**, 1989, 405–433.
- [6] PERLIN M., HE J., BERNAL L. P. An experimental study of deep water plunging breakers. *Phys. Fluids*, **8**, No. 9, 1996, 2365–2374.
- [7] CHAN E. S., MELVILLE W. K. Deep-water plunging wave pressure on a vertical plane wall. *Proc. Roy. Soc. London*, **A417**, 1988, 95–131.
- [8] SANDER J., HUTTER K. Evolution of weakly non-linear shallow water waves generated by a moving boundary. *ACTA Mechanica*, **91**, 1992, 119–155.
- [9] БУКРЕЕВ В. И., ТУРАНОВ Н. П. Эксперименты с волнами на мелкой воде, генерируемые движением торцевой стенки бассейна. *ПМТФ*, **37**, №6, 1996, 44–50.
- [10] MIYATA M., MATSUKAWA C., KAJITANI H. Shallow water flow with separation and breaking wave. *J. Soc. Naval Architects Japan*, **158**, 1985.
- [11] SCHULTZ W. W., RAMBERG S. E., GRIFFIN O. M. Steep and breaking deep-water waves. In *“Proc. of 16th Symp. on Naval Hydrodynamics”*, Berkeley, 1986.
- [12] LONG R. R. Finite amplitude disturbances in the flow of inviscid rotating and stratified fluids over obstacles. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4**, 1972, 69–72.
- [13] BAINES P. G. Upstream blocking and airflow over mountains. *Ibid.*, **19**, 1987, 75–97.

- [14] Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*. Наука, Новосибирск, 1985.
- [15] LONGUET-HIGGINS M. S., FENTON J. D. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II. *Proc. Roy. Soc. London*, **A340**, 1974, 471–493.
- [16] Ляпидевский В. Ю. Блокировка потока при обтекании препятствия двухслойной смешивающейся жидкостью. *ПММ*, №4, 1994, 108–112.

Поступила в редакцию 21 февраля 1997 г.