Вычислительные технологии **Том 10, № 5, 2005**

ОБ ε-УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ, В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

О. А. Рузакова, В. Е. Федоров
Челябинский государственный университет, Россия
e-mail: `amber@csu.ac.ru, kar@csu.ru`

Necessary and sufficient conditions of ε-controllability are obtained for the class of linear differential equations of the first order unsolved with respect to the derivative in Banach spaces. Abstract results are applied to the study of ε-controllability of the evolution equation for free surface of filtered liquid as well as for a degenerate system of algebraic partial differential equations.

Введение

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (т. е. линейный непрерывный), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (т. е. линейный замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{X}$), $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \in \mathrm{dom} M \tag{1}$$

для уравнения

$$L \dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

(В дальнейшем для краткости это уравнение в случае, когда оператор L непрерывно обратим, будем называть *регулярным* уравнением, а в случае $\ker L \neq \{0\}$ — *сингулярным.*) Задача (1), (2) представляет собой абстрактную форму многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений математической физики, не разрешенных относительно производной по времени [1, 2]. Целью работы является изучение ε-управляемости сингулярного уравнения (2), т. е. возможности приведения траектории его решения в ε-окрестность наперед заданной точки. Заметим, что понятие управляемости (ε-управляемости) является весьма важным в математической теории управления, поскольку содержание задачи управляемости состоит в исследовании области достижимости, т. е. множества точек пространства состояний, в которые можно перевести систему из начального состояния посредством допустимых управлений (и в частности, определение условий, обеспечивающих совпадение области достижимости или ее замыкания с пространством

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ и Правительства Челябинской области (грант № 010.01.05-04БМ).

состояний). Кроме того, изучение управляемости часто необходимо для построения оптимального управления (подробнее см. в [3]).

Свойства сингулярных уравнений (2), касающиеся их так называемой одномерной ε-управляемости, т. е. в случае скалярной функции управления, исследованы в работах авторов [4, 5]. В работе [6] получены достаточные условия бесконечномерной ε-управляемости уравнения (2) с сильно (L,p)-радиальным оператором M и ее критерий в случае $p=0$. В данной работе результаты работы [6] получили свое развитие.

Уравнение (2) редуцировано к системе двух уравнений: регулярного (на образе разрешающей полугруппы уравнения $L\dot{x}(t)=Mx(t)$)

$$\dot{x}(t)=S_1x(t)+Tu(t) \tag{3}$$

и сингулярного (на ядре полугруппы)

$$H\dot{x}(t)=x(t)+Gu(t) \tag{4}$$

с нильпотентным оператором H. Управляемость (ε-управляемость) регулярного уравнения (3), т. е. уравнения, разрешенного относительно производной, исследовали в своих работах Н.Н. Красовский [7], R.E. Kalman, Y.C. Ho, K.S. Narendra [8], H.O. Fattorini [9], Ф.А. Шолохович [10], А.Б. Куржанский [11], Л.М. Куперман и Ю.М. Репин [12], R. Triggiani [13] и многие другие. Обзор результатов, касающихся управляемости регулярных уравнений, можно найти в работе Ф.А. Шолоховича [3]. Авторами использованы результаты некоторых из перечисленных работ для исследования ε-управляемости полученного уравнения (3). При этом приходилось учитывать специфику исходного уравнения (2) с сильно (L,p)-радиальным оператором M, которая заключается в том, что для разрешимости уравнения необходимо требовать принадлежность функции управления классу $C^{p+1}([0,T];\mathfrak{U})$, поскольку в случае функций меньшей гладкости уравнение (4) может оказаться неразрешимым (см. по этому поводу [2]).

Существенным результатом настоящей работы является теорема о том, что уравнение (2) ε-управляемо точно тогда, когда ε-управляемы соответствующие уравнения (3) и (4). Этот факт нетривиален потому, что в обоих уравнениях (3) и (4) используется одна и та же функция управления. Получены необходимые и достаточные для ε-управляемости уравнений (3) и (4) условия в терминах операторов, входящих в уравнение.

Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании ε-управляемости уравнения эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости и вырожденной алгебро-дифференциальной системы уравнений с частными производными.

1. Сильно (L,p)-радиальный оператор

Приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные результаты, доказательства которых можно найти в [2, 14].

Пусть $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Если $\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{X}$, действующих в $\mathfrak{Y}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$. Множество операторов $\mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{X})$ обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{X})$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$. Обозначим $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$, $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}$,

$R^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^p R^L_{\mu_k}(M)$, $L^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^p L^L_{\mu_k}(M)$, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+=\{a\in\mathbb{R}:a>0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$.

Определение 1. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, $p\in\mathbb{N}_0$, если:

(i) $\exists a\in\mathbb{R}\quad\forall\mu>a\quad\mu\in\rho^L(M)$;

(ii) $\exists K>0\quad\forall\mu_k>a,\quad k=\overline{0,p},\quad\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})},\|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\}\le\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^p(\mu_k-a)^n};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)y\|_{\mathfrak{Y}}\le\frac{\mathrm{const}(y)}{(\lambda-a)\prod\limits_{k=0}^p(\mu_k-a)}\quad\forall y\in\overset{\circ}{\mathfrak{Y}},$$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})}\le\frac{K}{(\lambda-a)\prod\limits_{k=0}^p(\mu_k-a)}$$

при любых $\lambda,\mu_0,\mu_1,...,\mu_p>a$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*:

(i) $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^0\oplus\mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}^0\oplus\mathfrak{Y}^1$;

(ii) $L_k=L\Big|_{\mathfrak{X}^k}\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $M_k=M\Big|_{\mathrm{dom}M_k}\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $\mathrm{dom}M_k=\mathrm{dom}M\cap\mathfrak{X}^k$, $k=0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$ *и* $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$;

(iv) *существует сильно непрерывная полугруппа* $\{X^t\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}):t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$, *разрешающая уравнение* $L\,\dot{x}\,(t)=Mx(t)$;

(v) *инфинитезимальным генератором C_0-непрерывной полугруппы* $\{X_1^t=X^t\Big|_{\mathfrak{X}^1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^1):t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ *является оператор* $S_1=L_1^{-1}M_1\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X}^1)$;

(vi) *оператор* $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ *нильпотентен степени не больше* p.

Через P (Q) обозначим проектор вдоль $\mathfrak{X}^0$ $(\mathfrak{Y}^0)$ на $\mathfrak{X}^1$ $(\mathfrak{Y}^1)$.

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, вектор-функция $u(t)$ такова, что $(I-Q)Bu(t)\in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{Y})$, $L_1^{-1}QBu(t)\in C^1([0,T];\mathfrak{Y})$. Тогда для любого начального значения*

$$x_0\in\mathcal{P}_u=\left\{x\in\mathrm{dom}M:(I-P)x=-\sum_{k=0}^p H^kM_0^{-1}((I-Q)Bu)^{(k)}(0)\right\}\tag{5}$$

существует единственное решение $x(t)\in C^1([0,T];\mathfrak{X})\cap C([0,T];\mathrm{dom}M)$ *задачи* (1), (2), *причем*

$$x(t)=X^tx_0+\int\limits_0^t X^{t-s}L_1^{-1}QBu(s)ds-\sum_{k=0}^p H^kM_0^{-1}((I-Q)Bu)^{(k)}(t).\tag{6}$$

2. Определение ε-управляемости

Предположим, что оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, а функции управления $u(t)$ принадлежат $V(T) = C^{p+1}([0,T];\mathfrak{Y})$. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие (5) теоремы 2 о разрешимости задачи Коши, которое в данном случае примет вид

$$(I-P)x_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)Bu^{(k)}(0). \tag{7}$$

Множество функций управления из $V(T)$, удовлетворяющих условию (7), обозначим $V_{x_0}(T)$.

Говоря об ε-управляемости системы, описываемой некоторым уравнением, будем через $x(T;x_0;u(t))$ обозначать значение в момент времени T решения задачи (1), (2) с начальным значением x_0 и функцией управления $u(t)$.

Определение 2. Система (2) называется *ε-управляемой за время T*, если для любых точек $x_0 \in \mathrm{dom}M$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует управление $u(t) \in V_{x_0}(T) \neq \emptyset$ такое, что $\|x(T;x_0;u(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

В силу теоремы 1 задача (1), (2) редуцируется к системе двух задач:

$$\dot{x}^1(t) = S_1 x^1(t) + L_1^{-1}QBu(t), \quad x^1(0) = Px_0 = x_0^1 \tag{8}$$

на пространстве $\mathfrak{X}^1$,

$$H\dot{x}^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1}(I-Q)Bu(t), \quad x^0(0) = (I-P)x_0 = x_0^0 \tag{9}$$

на пространстве $\mathfrak{X}^0$. При этом первые два слагаемых в формуле (6) дают решение задачи (8), а выражение

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)Bu^{(k)}(t) \tag{10}$$

задает решение задачи (9) при выполнении условия согласования (7). При отдельном рассмотрении системы (8) выполнение этого условия не требуется.

Лемма 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*:

(i) *из ε-управляемости за время T системы* (8) *следует, что $QB \neq \mathbb{O}$*;

(ii) *из ε-управляемости за время T системы* (9) *следует равенство*

$$\mathrm{span}\{\mathrm{im} H^k M_0^{-1}(I-Q)B,\ k=\overline{0,p}\} = \mathrm{dom}M_0. \tag{11}$$

Доказательство. 1. Если система (8) ε-управляема, то $QB \neq \mathbb{O}$, иначе система (8) не зависит от функции управления.

2. Из ε-управляемости системы (9) следует, что для всех $x_0 \in \mathrm{dom}M$ должно выполняться включение $(I-P)x_0 \in \mathrm{span}\{\mathrm{im} H^k M_0^{-1}(I-Q)B,\ k=\overline{0,p}\}$, иначе множество допустимых функций управления $V_{x_0}(T)$ окажется пустым. Отсюда имеем

$$\mathrm{span}\{\mathrm{im} H^k M_0^{-1}(I-Q)B,\ k=\overline{0,p}\} \supset \mathrm{dom}M_0.$$

Обратное вложение имеет место в силу того, что $H = M_0^{-1}L_0$. $\square$

Обозначим через $x^1(T;x_0^1;u(t))$ решение задачи (8), $x^0(T;x_0^0;u(t))$ — решение задачи (9).

Лемма 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален и выполняется условие* (11). *Тогда:*

(i) *если для любых* $x_0 \in \mathrm{dom}M$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}^1$, $\varepsilon > 0$ *существует* $u(t) \in V(T)$ *такое, что* $\|x^1(T; Px_0; u(t)) - \tilde{x}\| \le \varepsilon$, *то существует* $u_1(t) \in V_{x_0}(T)$ *такое, что* $\|x^1(T; Px_0; u_1(t)) - \tilde{x}\| \le \varepsilon$;

(ii) *если для всех* $\tilde{x} \in \mathfrak{X}^0$, $\varepsilon > 0$ *существует* $u(t) \in V(T)$, *для которого выполняется* $\|x^0(T; x^0(0); u(t)) - \tilde{x}\| \le \varepsilon$, *то для любого* $x_0 \in \mathrm{dom}M$ *существует* $u_1(t) \in V_{x_0}(T)$ *такое, что* $\|x^0(T; (I-P)x_0; u_1(t)) - \tilde{x}\| \le \varepsilon$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть

$$\forall x_0 \in \mathrm{dom}M \ \forall \tilde{x} \in \mathfrak{X}^1 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists u(t) \in V(T) \ \left\| X^T x_0 + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} QBu(s)ds - \tilde{x} \right\| \le \varepsilon/2.$$

По условию леммы существуют $v_0, \dots v_p$

$$(I-P)x_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)Bv_k.$$

Изменим функцию управления $u(t)$ в правой окрестности нуля гладким образом, чтобы получить новую функцию управления $u_1(t) \in V(T)$, для которой $u_1^{(k)}(0) = v_k$, $k = \overline{0,p}$. Будем искать такую функцию в виде

$$u_1(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{p+1} \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{(t-t_0)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{p} v_k \frac{t^k}{k!}, \quad t \in [0, t_0],$$

$u_1(t) = u(t)$, $t \in [t_0, T]$. При любых коэффициентах $a_k \in \mathfrak{U}$, $k = \overline{0,p}$, такая функция удовлетворяет требуемым начальным условиям. Подберем коэффициенты a_k так, чтобы выполнялось $u_1^{(k)}(t_0) = u^{(k)}(t_0)$, $k = \overline{0,p}$. Приравнивая производные, получим рекуррентную формулу для коэффициентов

$$a_0 = u(t_0) - \sum_{k=0}^{p} v_k \frac{t_0^k}{k!},$$

$$a_n = u^{(n)}(t_0) - \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m \frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-n+m+2)}{t_0^{n-m}} a_m - \sum_{k=0}^{p-n} v_{k+n} \frac{t_0^k}{k!}, \quad n = \overline{1,p}.$$

При $t_0 < 1$ имеем $\|a_0\|_{\mathfrak{U}} \le \|u\|_{C^{p+1}([0,T];\mathfrak{U})} + \sum\limits_{k=0}^{p} \|v_k\|_{\mathfrak{U}} = c_0$,

$$\|a_1\|_{\mathfrak{U}} \le \|u\|_{C^{p+1}([0,T];\mathfrak{U})} + \frac{(p+1)c_0}{t_0} + \sum_{k=0}^{p} \|v_k\|_{\mathfrak{U}} \le \frac{c_1}{t_0}, \quad \dots, \quad \|a_p\|_{\mathfrak{U}} \le \frac{c_p}{t_0^p}.$$

Поэтому

$$\|u_1\|_{C([0,t_0];\mathfrak{U})} \le \sum_{k=0}^{p} \|a_k\|_{\mathfrak{U}} t_0^k + \sum_{k=0}^{p} \|v_k\|_{\mathfrak{U}} \le \sum_{k=0}^{p} c_k + \sum_{k=0}^{p} \|v_k\|_{\mathfrak{U}}.$$

Последнее выражение зависит только от u и не зависит от t_0, поскольку константы c_k от него не зависят. Поэтому при достаточно малых t_0

$$\|u - u_1\|_{L_1((0,T);\mathfrak{U})} \le t_0(\|u\|_{C([0,t_0];\mathfrak{U})} + \|u_1\|_{C([0,t_0];\mathfrak{U})}) \le \frac{\varepsilon}{2Ke^{|a|T}\|L_1^{-1}QB\|},$$

где K, a — константы из определения 1. Отсюда

$$\left\| X^T x_0 + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q B u_1(s) ds - \tilde{x} \right\| \leq$$

$$\leq \left\| X^T x_0 + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q B u(s) ds - \tilde{x} \right\| + \left\| \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q B (u_1(s) - u(s)) ds \right\| \leq \varepsilon.$$

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что мы можем выбрать $t_0 < T$, и тогда описанная выше замена функции $u(t)$ на $u_1(t)$ не повлияет на значение решения (10) задачи (9) в момент времени T, поскольку по построению $u(t) = u_1(t)$ для $t \in (t_0, T]$. □

Следствие 1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален и выполняется условие* (11). *Тогда если для всех $x_0 \in \mathrm{dom} M$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$, $\varepsilon > 0$ существует $u(t) \in V(T)$, для которого*

$$\left\| X^T x_0 + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q B u(s) ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (I - Q) B u^{(k)}(T) - \tilde{x} \right\| \leq \varepsilon,$$

то существует $u_1(t) \in V_{x_0}(T)$ такое, что $\|x(T; x_0; u_1(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

Доказательство. В силу теоремы 1 (i) существует такая константа $c > 0$, что для всех $x \in \mathfrak{X}$ $\|x\| \geq c(\|Px\| + \|(I - P)x\|)$. Поэтому

$$\varepsilon \geq c \left(\left\| X^T x_0 + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q B u(s) ds - P\tilde{x} \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (I - Q) B u^{(k)}(T) - (I - P)\tilde{x} \right\| \right).$$

Отсюда следует выполнение условий леммы 2. Осталось воспользоваться функцией $u_1(t)$, построенной при ее доказательстве. □

Замечание 1. В дальнейшем будем использовать лемму 2 и следствие 1 неявным образом и при доказательстве ε-управляемости довольствоваться существованием подходящей функции управления из множества $V(T)$.

Следующий результат говорит о том, что, управляя двумя системами (8) и (9) посредством одной функции управления, мы тем не менее можем привести траектории обеих систем в ε-окрестности нужных точек одновременно.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален. Тогда система* (2) *ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда ε-управляемы за время T системы* (8) *и* (9).

Доказательство. Прямое утверждение теоремы очевидно, поскольку система (2) распадается на две системы на взаимно дополняющих друг друга подпространствах — системы (8) и (9). Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть

$$\forall x_0^0 \in \mathrm{dom} M_0 \ \forall \tilde{x}^0 \in \mathfrak{X}^0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists v(t) \in V(T) \ \left\| - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (I - Q) B v^{(k)}(T) - \tilde{x}^0 \right\| \leq \varepsilon/3,$$

$$\forall x_0^1 \in \mathrm{dom} M_1 \ \forall \tilde{x}^1 \in \mathfrak{X}^1 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists w(t) \in V(T) \ \left\| X^T x_0^1 + \int\limits_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q B w(s) ds - \tilde{x}^1 \right\| \leq \varepsilon/3.$$

Обозначим $u(t) = w(T-t)$, $u_k = v^{(k)}(T)$, $k = \overline{0,p}$, и, как это сделано при доказательстве леммы 2, построим по этим данным функцию $u_1(t) \in V(T)$, для которой $u_1^{(k)}(0) = v^{(k)}(T)$,

$$\|u - u_1\|_{L_1((0,T);\mathfrak{U})} \leq \frac{\varepsilon}{3Ke^{|a|T}\|L_1^{-1}QB\|}.$$

Для $x_0 \in \mathrm{dom} M$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ возьмем $x_0^0 = (I-P)x_0$, $\tilde{x}^0 = (I-P)\tilde{x}$, $x_0^1 = Px_0$, $\tilde{x}^1 = P\tilde{x}$. По этим векторам и по $\varepsilon > 0$ выберем функции управления $v(t), w(t)$, по ним построим функцию $u_1(t) \in V(T)$, как это описано выше. Взяв $v_1(t) = u_1(T-t) \in V(T)$, получим $\|x(T, x_0, v_1(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$. □

Замечание 2. Нетрудно подобно [4] ввести понятия ε-управляемости в нуль, ε-управляемости из нуля за время T и получить очевидные соотношения между различными понятиями ε-управляемости. Перечислим их, временно условившись называть введенное нами в определении 2 понятие ε-управляемостью из любой точки в любую.

1. Для системы (9), а значит, и для системы (2) понятие ε-управляемости в нуль является бессодержательным, поскольку, полагая $u(t) \equiv 0 \in V(T)$ в формуле (10), получим даже ее точную управляемость в нуль за любое (сколь угодно малое) время.

2. Для систем (2) и (9) из ε-управляемости из любой точки в любую следует ε-управляемость из нуля. Обратное верно при выполнении условия (11).

3. Для системы (8) ε-управляемость из любой точки в любую эквивалентна ε-управляемости из нуля.

Лемма 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, а система* (9) *ε-управляема за свободное время, тогда она ε-управляема и за любое время $T > 0$.*

Доказательство. Пусть система (9) ε-управляема из нуля за свободное время, т. е. для любых $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $T_{\tilde{x},\varepsilon} > 0$ и управление $u(t) \in V(T_{\tilde{x},\varepsilon})$ такие, что

$$\left\| -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)Bu^{(k)}(T_{\tilde{x},\varepsilon}) - \tilde{x} \right\| \leq \varepsilon.$$

Покажем, что система (9) ε-управляема за время T. Если $T > T_{\tilde{x},\varepsilon}$, то возьмем функцию управления $v(t) = u(t - T + T_{\tilde{x},\varepsilon})$ при $t \in [T - T_{\tilde{x},\varepsilon}, T]$ и

$$v(t) = \sum_{k=0}^{p} u^{(k)}(0) \frac{(t - T + T_{\tilde{x},\varepsilon})^k}{k!}$$

при $t \in [0, T - T_{\tilde{x},\varepsilon}]$.

Если $T < T_{\tilde{x},\varepsilon}$, то возьмем $v(t) = u(t - T + T_{\tilde{x},\varepsilon})$ при $t \in [0, T]$. □

Замечание 3. Учитывая лемму 3, в дальнейшем будем говорить просто об ε-управляемости системы (9).

3. Критерии ε-управляемости невырожденной системы

Определение 3. Система (2) называется *ε-управляемой за свободное время*, если для любых $x_0 \in \mathrm{dom} M$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ и $\varepsilon > 0$ существуют время T и функция управления $u(t) \in V(T)$ такие, что $\|x(T; x_0; u(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

Замечание 4. В определении 3 используются функции управления $u(t) \in V(T)$, поскольку нетрудно показать, что имеют место аналогичные леммам 1, 2 и следствию 1 утверждения об ε-управляемости систем (2), (8) и (9) за свободное время.

Сформулируем следующий критерий ε-управляемости системы (8) в банаховых пространствах, который для ε-управляемости за свободное время в гильбертовых пространствах доказан в монографии [15].

Лемма 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда система* (8) *ε-управляема за время T (за свободное время) в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\text{span}}\{\text{im} X^s L_1^{-1} QB,\ 0 \le s \le T\} = \mathfrak{X}^1 \quad (\overline{\text{span}}\{\text{im} X^T L_1^{-1} QB,\ T \ge 0\} = \mathfrak{X}^1).$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы об ε-управляемости системы за время T. Прежде всего заметим, что в силу замечания 2 можно рассматривать только ε-управляемость из нуля. Предположим, что множество векторов вида

$$\int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} QBu(s)ds, \quad u(t) \in V(T)$$

не является плотным в пространстве $\mathfrak{X}^1$. Тогда по теореме Хана — Банаха существует функционал $f \in \mathfrak{X}^* \setminus \{0\}$ такой, что

$$0 = f\left(\int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} QBu(s)ds\right) = \int_0^T f(X^{T-s} L_1^{-1} QBu(s))ds \tag{12}$$

для любой функции $u(t) \in V(T)$. Для любой функции $v(t) \in L_1((0,T);\mathfrak{U})$ найдется последовательность функций $\{u_n(t)\} \subset V(T)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \|v - u_n\|_{L_1((0,T);\mathfrak{U})}$. Отсюда

$$\left|\int_0^T f(X^{T-s} L_1^{-1} QBv(s))ds - \int_0^T f(X^{T-s} L_1^{-1} QBu_n(s))ds\right| \le$$

$$\le \int_0^T \left|f(X^{T-s} L_1^{-1} QB(v(s) - u_n(s)))\right| ds \le \|f\|_{\mathfrak{X}^*} K e^{|a|T} \|L_1^{-1} QB\| \int_0^T \|v(s) - u_n(s)\|_{\mathfrak{U}} ds \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому равенство (12) справедливо для всех функций $u(t) \in L_1((0,T);\mathfrak{U})$. Возьмем $t \in (0,T)$, малое $\delta > 0$, $u_\delta(t) = w \in \mathfrak{U}$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $u_\delta(t) = 0$ при $t \in [0,T] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Тогда

$$0 = \frac{1}{2\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(X^{T-s} L_1^{-1} QBw)ds = f(X^{T-\xi} L_1^{-1} QBw), \quad \xi \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta),$$

в силу непрерывности полугруппы. Переходя к пределу при $\delta \to 0+$, получим равенство $f(X^{T-t_0} L_1^{-1} QBw) = 0$ для всех $t_0 \in (0,T)$, $w \in \mathfrak{U}$. Из непрерывности функционала и полугруппы следует, что $f(X^0 L_1^{-1} QBw) = f(X^T L_1^{-1} QBw) = 0$. Значит, множество $\text{span}\{\text{im} X^s L_1^{-1} QB, 0 \le s \le T\}$ не плотно в пространстве $\mathfrak{X}^1$.

Обратное утверждение очевидно. □

В [9] доказано близкое утверждение, которое в нашем случае можно сформулировать следующим образом:

Теорема 4 [9]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда система* (8) *ε-управляема за время T (за свободное время) в том и только в том случае, когда $B^*(L_1^{-1}Q)^*X^{s*}u^*=0$ для всех $0\le s\le T$ $(s\ge 0)$ выполняется только при $u^*=0$.*

4. Критерии ε-управляемости вырожденной системы

Сформулируем критерий ε-управляемости системы (9).

Лемма 5. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Система* (9) *ε-управляема в том и только в том случае, когда выполняется условие* (11).

Доказательство. Учитывая лемму 1, достаточно доказать обратное утверждение данной леммы. Решение системы (9) имеет вид $x(t)=-\sum\limits_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}(I-Q)Bu^{(k)}(t)$. Так как $\overline{\mathrm{dom}M_0}=\mathfrak{X}^0$, для любых $\tilde x\in\mathfrak{X}^0$ и $\varepsilon>0$ найдется $x^0\in\mathrm{dom}M_0$ такой, что $\|x^0-\tilde x\|\le\varepsilon$.

По условию (11) для любого $x^0\in\mathrm{dom}M_0$ существуют $c_0,c_1\dots,c_p\in\mathbb{C}$, $u_0,u_1,\dots,u_p\in\mathfrak{U}$, что $x^0=\sum\limits_{k=0}^{p}c_kH^kM_0^{-1}(I-Q)Bu_k$. Поэтому, взяв $u(t)=\sum\limits_{k=0}^{p}c_k\frac{(t-T)^k}{k!}u_k\in V(T)$, получаем ε-управляемость системы (9). □

Теорема 5. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Система* (2) *ε-управляема за время T (за свободное время) в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}X^sL_1^{-1}QB,0\le s\le T\}=\mathfrak{X}^1\quad(\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}X^TL_1^{-1}QB,T\ge 0\}=\mathfrak{X}^1),\tag{13}$$

$$\mathrm{span}\{\mathrm{im}H^kM_0^{-1}(I-Q)B,\ k=\overline{0,p}\}=\mathrm{dom}M_0.$$

Доказательство. Необходимость условий (13) и (11) следует из лемм 4 и 5. Достаточными они являются в силу тех же лемм и теоремы 3. □

5. Уравнение эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим для уравнения

$$(\lambda-\triangle)v_t(x,t)=\alpha\triangle v(x,t)-\beta\triangle^2v(x,t)+\triangle u(x,t),\ (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+,\tag{14}$$

моделирующего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [16], начально-краевую задачу

$$v(x,0)=v_0(x),\quad x\in\Omega;\tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}v(x,t)=\frac{\partial}{\partial n}\triangle v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+.\tag{16}$$

Положим

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{U}=\{v\in W_2^2(\Omega):\frac{\partial}{\partial n}v(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega\},\quad\mathfrak{Y}=L_2(\Omega),$$

$$L=\lambda-\triangle,\quad M=\alpha\triangle-\beta\triangle^2,\quad B=\triangle,$$

$$\mathrm{dom}M = \{v \in W_2^4(\Omega) : \frac{\partial}{\partial n} v(x,t) = \frac{\partial}{\partial n} \triangle v(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega\}.$$

Обозначим через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ ортонормированный в смысле скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ набор собственных функций однородной задачи Неймана для оператора Лапласа $\triangle$ в области Ω, занумерованный по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие $\alpha\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$. Тогда система* (14)–(16) *ε-управляема за любое время T.*

Доказательство. В [2, 14] показано, что если $\alpha\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, то оператор M сильно $(L,0)$-радиален. При этом $Q = \sum\limits_{\lambda_k \neq \lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,\ I - Q = \sum\limits_{\lambda_k = \lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Имеем $\mathrm{im}B = \mathfrak{Y}$, $\mathrm{im}QB = \mathfrak{Y}^1$, $\mathrm{im}X^0 L_1^{-1} QB = \mathrm{im}L_1^{-1} QB = \mathfrak{X}^1$, $\mathrm{im}(I-Q)B = \mathfrak{Y}^0$, $\mathrm{im}M_0^{-1}(I-Q)B = \mathrm{dom}M_0$. Поэтому в условиях теоремы 5 мы можем взять сколь угодно малое $T > 0$. $\square$

6. Начально-краевая задача для алгебро-дифференциальной системы уравнений с частными производными

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{array}{c} v_{1t}(x,t) = \triangle v_1(x,t) + \alpha u_1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ v_{3t}(x,t) = \triangle v_2(x,t) + \beta u_2(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ 0 = \triangle v_3(x,t) + \gamma u_3(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \end{array} \tag{17}$$

и начально-краевую задачу для них

$$\nu v_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial n} v_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad i = 1,2,3, \tag{18}$$

$$v_i(x,0) = v_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,2,3; \tag{19}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \nu \in \mathbb{R}$.

Возьмем $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{U} = (L_2(\Omega))^3$, $\mathrm{dom}M = \left(W^2_{\nu + \frac{\partial}{\partial n}}(\Omega)\right)^3$, где $W^2_{\nu+\frac{\partial}{\partial n}}(\Omega) = \{v \in W_2^2(\Omega) : \nu v(x,t) + \frac{\partial}{\partial n} v(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем для $\mu > \lambda_1$

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu - \triangle & 0 & 0 \\ 0 & -\triangle & \mu \\ 0 & 0 & -\triangle \end{pmatrix},$$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu - \triangle)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\triangle^{-1} & -\mu\triangle^{-2} \\ 0 & 0 & -\triangle^{-1} \end{pmatrix},$$

$$(R^L_\mu(M))^2 = (L^L_\mu(M))^2 = \left(\begin{array}{ccc} (\mu-\triangle)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\triangle^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{ccc} (\mu-\triangle)^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь через $(\mu-\triangle)^{-1}$ обозначен оператор, обратный к оператору $\mu-\Delta$, с областью определения $W^2_{\nu+\frac{\partial}{\partial n}}(\Omega)$. Поскольку для $\mu>\lambda_1$

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty \frac{v_k\varphi_k}{(\mu-\lambda_k)^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^\infty \frac{|v_k|^2}{|\mu-\lambda_k|^4} \le \frac{1}{(\mu-\lambda_1)^4}\sum_{k=1}^\infty |v_k|^2 =$$

$$= \frac{1}{(\mu-\lambda_1)^4}\|v\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $v_k = \langle v,\varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}$, то

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^2\|_{\mathcal{L}((L_2(\Omega))^3)}, \|(L^L_\mu(M))^2\|_{\mathcal{L}((L_2(\Omega))^3)}\} \le \frac{1}{(\mu-\lambda_1)^2}.$$

Здесь через $\{\varphi_k : k\in\mathbb{N}\}$ и $\{\lambda_k : k\in\mathbb{N}\}$, как и ранее, обозначены собственные функции и собственные значения однородной задачи (18) для оператора Лапласа $\triangle$ в области Ω.

Далее,

$$(R^L_\mu(M))^2(\nu L-M)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} (\mu-\triangle)^{-2}(\nu-\triangle)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\|(R^L_\mu(M))^2(\nu L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}((L_2(\Omega))^3)} \le \frac{1}{(\mu-\lambda_1)^2(\nu-\lambda_1)}.$$

Таким образом, учитывая гильбертовость пространств, можно утверждать, что в рассматриваемой задаче оператор M сильно $(L,1)$-радиален [2].

По формуле $X^t = s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{t}\left(\frac{2k}{t}L-M\right)^{-1}L\right)^{2k}$ (см. [2]) нетрудно найти разрешающую полугруппу системы (17), (18) в явном виде

$$X^t = \left(\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=1}^\infty e^{t\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ядром разрешающей полугруппы будет подпространство $\mathfrak{X}^0 = \ker R^L_{(\mu,1)}(M) = \{0\}\times L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$. Соответственно, $\mathfrak{X}^0=\mathfrak{Y}^0$, $\mathfrak{X}^1=\mathfrak{Y}^1=L_2(\Omega)\times\{0\}\times\{0\}$. Поэтому $L_1^{-1}=I : L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$,

$$M_0^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \triangle^{-1} & 0 \\ 0 & \triangle^{-1} \end{array}\right).$$

Условие $(I-P)x_0 = -\sum\limits_{k=0}^p H^kM_0^{-1}(I-Q)Bu^{(k)}(0)$ примет вид

$$\left(\begin{array}{c} v_{20} \\ v_{30} \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c} \beta\triangle^{-1}u_2(x,0)+\gamma\triangle^{-2}u_{3t}(x,0) \\ \gamma\triangle^{-1}u_3(x,0) \end{array}\right). \tag{20}$$

Решение задачи (17) — (19) при условии (20) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} v_1(x,t) \\ v_2(x,t) \\ v_3(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k}\langle v_{10},\varphi_k\rangle\varphi_k(x) + \alpha\int\limits_0^t e^{(t-s)\lambda_k}u_1(s)ds \\ -\beta\triangle^{-1}u_2(x,t) - \gamma\triangle^{-2}u_{3t}(x,t) \\ -\gamma\triangle^{-1}u_3(x,t) \end{pmatrix}.$$

Система (9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \triangle^{-1}v_{3t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 + \beta\triangle^{-1}u_2(x,t) \\ v_3 + \gamma\triangle^{-1}u_3(x,t) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Лемма 6. *Система* (21) *ε-управляема.*

Доказательство. Условие (11) $\mathrm{span}\{\mathrm{im}H^kM_0^{-1}(I-Q)B,\ k=\overline{0,p}\} = \mathrm{dom}M_0$ для системы (21) имеет вид

$$\mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\begin{pmatrix} \beta\triangle^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma\triangle^{-1} \end{pmatrix}, \mathrm{im}\begin{pmatrix} 0 & \gamma\triangle^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = (W^2_{\nu+\frac{\partial}{\partial n}}(\Omega))^2.$$

Очевидно, что оно выполняется. □

Теорема 7. *Система* (17), (18) *ε-управляема за любое время* $T > 0$.

Доказательство. По теореме 5 должно выполняться условие

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}X^sL_1^{-1}QB,\ 0\le s\le T\} = \mathfrak{X}^1.$$

При $s = 0$ имеем $\overline{\mathrm{im}L_1^{-1}QB} = L_2(\Omega)$. С учетом предыдущей леммы получаем требуемое. □

Если положить $\gamma = 0$, то нетрудно заметить непосредственно, что система (17), (18) не будет ε-управляемой. В этом случае можно заметить, что и условие (11) не выполняется, поскольку

$$\mathrm{span}\{\mathrm{im}H^kM_0^{-1}(I-Q)B,\ k=\overline{0,p}\} = W^2_{\nu+\frac{\partial}{\partial n}}(\Omega)\times\{0\} \ne (W^2_{\nu+\frac{\partial}{\partial n}}(\Omega))^2 = \mathrm{dom}M_0.$$

Список литературы

[1] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

[2] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

[3] Шолохович Ф.А. Об управляемости линейных динамических систем // Изв. УрГУ. 1998. № 10, вып. 1. С. 103–126.

[4] Федоров В.Е., Рузакова О.А. Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 8. С. 1137–1139.

[5] Федоров В.Е., Рузакова О.А. Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 618–628.

[6] Федоров В.Е., Рузакова О.А. Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами // Изв. вузов. Математика. 2002. № 7. С. 54–57.

[7] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[8] Kalman R.E., Ho Y.C., Narendra K.S. Controllability of linear dynamical systems // Contrib. Different. Equat. 1963. Vol. 1, N 2. P. 189–213.

[9] Fattorini H.O. On complete controllability of linear systems // J. Different. Equat. 1967. Vol. 3. P. 391–402.

[10] Шолохович Ф.А. Об управляемости в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 479–484.

[11] Куржанский А.Б. К управляемости в банаховых пространствах // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 9. С. 1715–1718.

[12] Куперман Л.М., Репин Ю.М. К вопросу об управляемости в бесконечномерных пространствах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 767–769.

[13] Triggiani R. Controllability and observability in Banach space with bounded operators // SIAM J. on Control. 1975. Vol. 13, N 2. P. 462–491.

[14] Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.

[15] Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[16] Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.

Поступила в редакцию 30 ноября 2004 г.,
в переработанном виде — 3 мая 2005 г.