

# О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА\*

Г. С. ХАКИМЗЯНОВ, Э. В. ЧУБАРОВА  
Институт вычислительных технологий СО РАН  
Новосибирск, Россия  
e-mail: khak@adm.ict.nsc.ru

We present some approximations of mixed problem in a complex domain for the equation with respect to potential of velocity vector and Dirichlet or Neuman conditions on different parts of boundary based on integro-interpolational approach. Coefficients of 9-point difference equations are also presented. Several properties of these equations are shown, the results of test computations are discussed.

1. При численном решении задач о плоских потенциальных течениях идеальной жидкости со свободной границей уравнение для потенциала  $\varphi$  приходится решать на каждом шаге по времени. В декартовых координатах  $x = x^1$ ,  $y = x^2$  для  $\varphi(x^1, x^2)$  имеем уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1.1)$$

решение которого ищется в криволинейной области  $\Omega$  плоскости  $x^1Ox^2$ .

При использовании адаптивных сеток подвижная область  $\Omega(t)$ , занятая жидкостью, отображается в каждый момент времени  $t$  на неподвижную расчетную область  $Q$  с помощью преобразования

$$x^\alpha = x^\alpha(q^\beta, t), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (1.2)$$

Здесь для простоты изложения в качестве  $Q$  рассматривается единичный квадрат в плоскости  $q^1Oq^2$ . В новой координатной системе  $q^1, q^2, t$  уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) = 0, \quad (1.3)$$

где  $k_{11} = g_{22}/J$ ,  $k_{12} = k_{21} = -g_{12}/J$ ,  $k_{22} = g_{11}/J$ ,  $g_{\alpha\beta}$  — ковариантные компоненты метрического тензора,  $J$  — якобиан преобразования (1.2).

Область  $Q$  покрывается равномерной прямоугольной сеткой с шагом  $h_\alpha$  и количеством узлов  $N_\alpha$  в направлении оси  $Oq^\alpha$ . Совокупность внутренних узлов  $q_i$  сетки ( $i$  — мультииндекс,  $i = (i_1, i_2)$ ) будем обозначать  $Q_h$ , граничных —  $\gamma_h$ . Будем считать, что в узлах этой сетки определены сеточные функции  $\varphi$  и  $x^\alpha$ , в то время как коэффициенты  $k_{\alpha\beta}$  могут быть определены как в узлах с целыми индексами, так и с полуцелыми. На сетке  $Q_h$  уравнение

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №97-01-00819.

© Г. С. Хакимзянов, Э. В. Чубарова, 1997.

(1.3) аппроксимируется на девятиточечном шаблоне. В настоящей работе рассматриваются несколько способов аппроксимации уравнения (1.3) и указываются некоторые свойства этих аппроксимаций.

Согласно алгоритму решения задачи о потенциальных течениях [1], после определения значений потенциала на свободной границе  $\Gamma_f$  (рис. 1) вычисляются значения  $\varphi$  внутри области  $\Omega$ , на нижней и боковых ее границах. В работе предполагается, что на границах  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_b$  задано условие непротекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \tag{1.4}$$

которое в координатах  $q^\alpha$  принимает вид

$$k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \Big|_{\gamma_0} = 0, \quad k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \Big|_{\gamma_b} = 0. \tag{1.5}$$

На границе  $\gamma_f$  значение  $\varphi$  считается известным:

$$\varphi|_{\gamma_f} = \bar{\varphi}(q^1), \quad 0 \leq q^1 \leq 1.$$

2. Получение разностных уравнений основывается на интегроинтерполяционном методе.

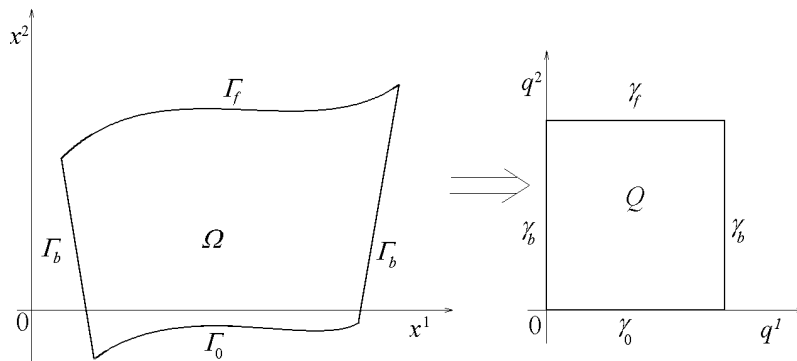


Рис. 1. Физическая  $\Omega$  и вычислительная  $Q$  области.

Для этого уравнение (1.3) записывается в виде контурного интеграла

$$\oint_{\mathcal{C}} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 - \left( k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^1 = 0, \tag{2.1}$$

где  $\mathcal{C}$  — произвольный контур, гомеоморфный окружности.

В качестве  $\mathcal{C}$  возьмем прямоугольник  $ABCD$  (рис. 2, а), стороны которого параллельны координатным осям и делят расстояния до соседних узлов пополам. Для этого контура интегральное соотношение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{(BC)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 - \int_{(AD)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 + \\ & + \int_{(DC)} \left( k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^1 - \int_{(AB)} \left( k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^1 = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

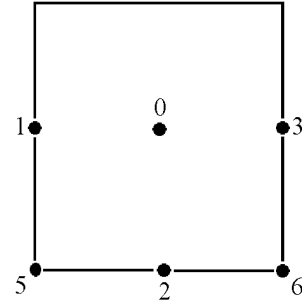
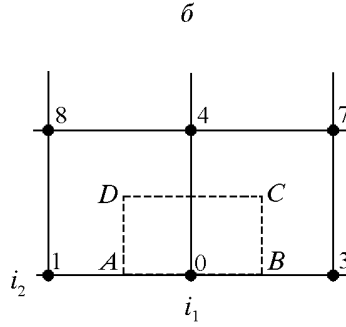
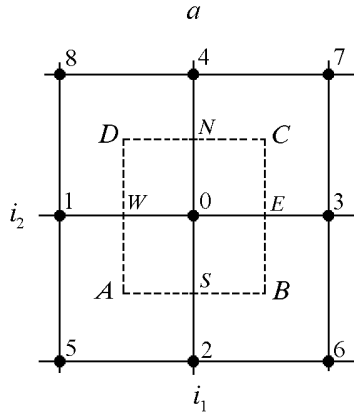


Рис. 2. Шаблон для внутреннего (а) и граничного (б) узлов.

Рис. 3. Нумерация типов узлов в вычислительной области.

Применив для (2.2) ту или иную квадратурную формулу, получим разностное уравнение для  $\varphi_i$  в узле  $q_i$ , вид которого будет зависеть от выбранной квадратурной формулы и от того, в каких узлах вычисляются коэффициенты  $k_{\alpha\beta}$ .

3. При первом способе аппроксимации коэффициенты  $k_{\alpha\beta}$  вычисляются в узлах  $q_i$ , при этом производные  $x_{q^\beta}^\alpha$ , входящие в выражения  $k_{\alpha\beta}$ , аппроксимируются во внутренних узлах центральными разностями, а в граничных — односторонними разностями второго порядка. Для каждого из интегралов в (2.2) применяется формула прямоугольников. Тогда, например, первый интеграл заменится разностным выражением

$$\int_{(BC)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 \sim \sim h_2 \left\{ \frac{k_{11}(0) + k_{11}(3)}{2} \cdot \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_1} + \frac{1}{2} \left( k_{12}(3) \frac{\varphi_7 - \varphi_6}{2h_2} + k_{12}(0) \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{2h_2} \right) \right\}, \quad (3.1)$$

и разностное уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\Lambda^{(1)} \varphi_i \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 [(k_{\alpha\alpha} \varphi_{q^\alpha})_{\bar{q}^\alpha} + (k_{\alpha\alpha} \varphi_{\bar{q}^\alpha})_{q^\alpha}] + + \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \beta}^{1 \div 2} [(k_{\alpha\beta} \varphi_{q^\alpha})_{q^\beta} + (k_{\alpha\beta} \varphi_{\bar{q}^\alpha})_{q^\beta} + (k_{\alpha\beta} \varphi_{q^\alpha})_{\bar{q}^\beta} + (k_{\alpha\beta} \varphi_{\bar{q}^\alpha})_{\bar{q}^\beta}] = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $f_q$  и  $f_{\bar{q}}$  означают [2] разности вперед и назад соответственно.

Разностные уравнения (3.2) выписываются во всех узлах, не принадлежащих верхней границе  $\gamma_f$  расчетной области. Для внутреннего узла используется девятиточечный шаблон (см. рис. 2), для граничных узлов шаблон состоит из меньшего количества точек. На рис. 2, б показан шаблон и контур интегрирования для узла  $q_i$ , расположенного на нижней границе области  $Q$ . В силу граничного условия (1.5) интеграл по стороне  $AB$  в равенстве

(2.2) равен нулю, интеграл по  $DC$  аппроксимируется аналогично случаю внутреннего узла, а для интеграла по  $BC$  вместо (3.1) получим

$$\int_{(BC)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 \sim \sim \frac{h_2}{2} \left\{ \frac{k_{11}(0) + k_{11}(3)}{2} \cdot \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_1} + \frac{1}{2} \left[ k_{12}(3) \frac{\varphi_7 - \varphi_3}{h_2} + k_{12}(0) \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h_2} \right] \right\}. \quad (3.3)$$

Полученные разностные уравнения можно записать в виде

$$\left( \sum_{j=0}^8 \alpha_j \varphi_j \right) (q_i) = 0. \quad (3.4)$$

В табл. 1 приведены выражения для коэффициентов  $\alpha_j$  в зависимости от типа узла, определяемого его расположением на сетке. Внутренним узлам приписан тип 0, узлам на левой границе — тип 1 и т. д. (рис. 3). На верхней границе расчетных узлов нет, так как там значение функции известно.

Т а б л и ц а 1

Тип узла	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
0	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
1	0	$\frac{\beta_2}{2} - \gamma_2$	$\beta_3$	$\frac{\beta_4}{2} - \gamma_4$	0	$\beta_6$	$\beta_7$	0
2	$\frac{\beta_1}{2} - \gamma_1$	0	$\frac{\beta_3}{2} - \gamma_3$	$\beta_4$	0	0	$\beta_7$	$\beta_8$
3	$\beta_1$	$\frac{\beta_2}{2} + \gamma_2$	0	$\frac{\beta_4}{2} + \gamma_4$	$\beta_5$	0	0	$\beta_8$
5	0	0	$\frac{\beta_3}{2} - \gamma_3$	$\frac{\beta_4}{2} - \gamma_4$	0	0	$\beta_7$	0
6	$\frac{\beta_1}{2} - \gamma_1$	0	0	$\frac{\beta_4}{2} + \gamma_4$	0	0	0	$\beta_8$

В таблице использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{h_2}{2h_1} (k_{11}(0) + k_{11}(j)), \quad j = 1, 3; \quad \beta_j = \frac{h_1}{2h_2} (k_{22}(0) + k_{22}(j)), \quad j = 2, 4; \\ \beta_j &= \frac{1}{4} (k_{12}(j-4) + k_{12}(j-3)), \quad j = 5, 7; \quad \beta_j = -\frac{1}{4} (k_{12}(j-4) + k_{12}(9-j)), \quad j = 6, 8; \\ \gamma_j &= \frac{1}{4} (k_{12}(0) - k_{12}(j)), \quad j = 1, 2; \quad \gamma_j = \frac{1}{4} (k_{12}(j) - k_{12}(0)), \quad j = 3, 4. \end{aligned}$$

Коэффициент  $\alpha_0$  вычисляется по формуле

$$\alpha_0 = - \sum_{j=1}^8 \alpha_j. \quad (3.5)$$

Коэффициенты уравнения (3.4) удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \alpha_3(q_{i_1, i_2}) &= \alpha_1(q_{i_1+1, i_2}), \quad \alpha_4(q_{i_1, i_2}) = \alpha_2(q_{i_1, i_2+1}), \\ \alpha_7(q_{i_1, i_2}) &= \alpha_5(q_{i_1+1, i_2+1}), \quad \alpha_8(q_{i_1, i_2}) = \alpha_6(q_{i_1-1, i_2+1}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

что означает симметричность матрицы системы уравнений (3.4).

Разностное уравнение (3.2) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1.3) на его гладких решениях  $\varphi$  со вторым порядком. Так как линейная функция  $\varphi(x, y) = ax + by + c$  удовлетворяет уравнению Лапласа (1.1), было бы желательно, чтобы она являлась решением и сеточных уравнений (3.2). Справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 1.** *Функции  $\varphi = x^\alpha(q^1, q^2)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $q = (q^1, q^2) \in \bar{Q}$  удовлетворяют уравнению (1.3).*

**Утверждение 2.** *Пусть  $\varphi_i = x^\alpha(q_i)$ ,  $q_i \in \bar{Q}_h$ , где  $x^\alpha$  — функции отображения (1.2). Тогда*

$$\Lambda^{(1)}\varphi_i \neq 0, \quad q_i \in Q_h. \quad (3.7)$$

4. При аппроксимации уравнения (1.3) вторым способом коэффициенты  $k_{\alpha\beta}$  вычисляются на сторонах ячеек:  $k_{11}$  и  $k_{12}$  — в точках  $q_{i_1+1/2, i_2}$ ,  $k_{21}$  и  $k_{22}$  — в точках  $q_{i_1, i_2+1/2}$ . Производные  $x_{q^\beta}^\alpha$  аппроксимируются центральными разностями  $D_{q^\beta}x^\alpha$ . Формулы, по которым вычисляются разностные производные, зависят от того, в какой точке (в узле, в середине стороны или в центре ячейки) требуется определить производную. Так как функции  $\varphi$  и  $x^\alpha$  определены только в узлах сетки, то для вычисления  $D_{q^\beta}$  используются при необходимости усреднения. Например,

$$D_{q^1}\varphi(E) = \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_1}, \quad D_{q^1}\varphi(C) = \frac{1}{2} [D_{q^1}\varphi(q_{i_1+1/2, i_2}) + D_{q^1}\varphi(q_{i_1+1/2, i_2+1})],$$

$$D_{q^1}\varphi(0) = \frac{1}{2} [D_{q^1}\varphi(E) + D_{q^1}\varphi(W)], \quad D_{q^1}\varphi(N) = \frac{1}{2} [D_{q^1}\varphi(C) + D_{q^1}\varphi(D)]. \quad (4.1)$$

Теперь вместо (3.1) будем иметь следующее выражение для интеграла по стороне  $BC$ :

$$\int_{(BC)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 \sim h_2 [k_{11}(E)D_{q^1}\varphi(E) + k_{12}(E)D_{q^2}\varphi(E)],$$

а разностное уравнение во внутренних узлах сетки примет вид

$$\Lambda^{(2)}\varphi_i \equiv \sum_{\alpha, \beta=1}^2 D_{q^\alpha} (k_{\alpha\beta} D_{q^\beta} \varphi) (q_i) = 0. \quad (4.2)$$

Справедливо

**Утверждение 3.** *Пусть  $\varphi_i = x^\alpha(q_i)$ , где  $x^\alpha$  — функции отображения (1.2). Тогда*

$$\Lambda^{(2)}\varphi_i \equiv 0, \quad q_i \in Q_h.$$

Доказательство следует из тождеств

$$D_{q^1} (k_{11} D_{q^1} x + k_{12} D_{q^2} x) (q_i) = \frac{y_5 - y_6 + y_7 - y_8}{4h_1 h_2},$$

$$D_{q^2} (k_{21} D_{q^1} x + k_{22} D_{q^2} x) (q_i) = -\frac{y_5 - y_6 + y_7 - y_8}{4h_1 h_2},$$

и аналогичных тождеств для функции  $\varphi = y$ .

Таким образом, разностное уравнение (4.2) обладает тем же свойством, что и дифференциальное уравнение (1.3): на линейных функциях оно выполняется тождественно.

Коэффициенты  $\alpha_j$  для разностного уравнения (4.2), записанные в виде (3.4), приведены в табл. 2. Однако для этого метода матрица системы (3.4) не является симметричной, равенства (3.6) в этом случае не выполняются.

Т а б л и ц а 2

Тип узла	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
0	$\beta_1 - \gamma_4 + \gamma_2$	$\beta_2 - \gamma_3 + \gamma_1$	$\beta_3 + \gamma_4 - \gamma_2$	$\beta_4 + \gamma_3 - \gamma_1$	$\gamma_1 + \gamma_2$	$-\gamma_2 - \gamma_3$	$\gamma_3 + \gamma_4$	$-\gamma_4 - \gamma_1$
1	0	$\beta_2/2 - \gamma_3 + \gamma_2$	$\beta_3 + \gamma_4 - \gamma_2$	$\beta_4/2 + \gamma_3 - \gamma_4$	0	$-\gamma_2 - \gamma_3$	$\gamma_3 + \gamma_4$	0
2	$\beta_1/2 - \gamma_4 + \gamma_1$	0	$\beta_3/2 + \gamma_4 - \gamma_3$	$\beta_4 + \gamma_3 - \gamma_1$	0	0	$\gamma_3 + \gamma_4$	$-\gamma_4 - \gamma_1$
3	$\beta_1 - \gamma_4 + \gamma_2$	$\beta_2/2 + \gamma_1 - \gamma_2$	0	$\beta_4/2 + \gamma_4 - \gamma_1$	$\gamma_1 + \gamma_2$	0	0	$-\gamma_4 - \gamma_1$
5	0	0	$\beta_3/2 + \gamma_4 - \gamma_3$	$\beta_4/2 + \gamma_3 - \gamma_4$	0	0	$\gamma_3 + \gamma_4$	0
6	$\beta_1/2 - \gamma_4 + \gamma_1$	0	0	$\beta_4/2 + \gamma_4 - \gamma_1$	0	0	0	$-\gamma_4 - \gamma_1$

Здесь

$$\beta_1 = \frac{h_2}{h_1}k_{11}(W), \quad \beta_2 = \frac{h_1}{h_2}k_{22}(S), \quad \beta_3 = \frac{h_2}{h_1}k_{11}(E), \quad \beta_4 = \frac{h_1}{h_2}k_{22}(N),$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}k_{12}(W), \quad \gamma_2 = \frac{1}{4}k_{21}(S), \quad \gamma_3 = \frac{1}{4}k_{12}(E), \quad \gamma_4 = \frac{1}{4}k_{21}(N).$$

5. При третьем способе аппроксимации уравнения (1.3) коэффициенты  $k_{\alpha\beta}$  вычисляются в центрах ячеек сетки — в точках  $q_{i_1+1/2, i_2+1/2}$ . Для интегралов в (2.2) по сторонам прямоугольника  $ABCD$  применяется формула трапеций. Тогда вместо (3.1) для аппроксимации интеграла по  $BC$  имеем следующее выражение:

$$\int_{(BC)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 \sim \frac{h_2}{2} [k_{11}(B)D_{q^1}\varphi(B) + k_{12}(B)D_{q^2}\varphi(B) + k_{11}(C)D_{q^1}\varphi(C) + k_{12}(C)D_{q^2}\varphi(C)] \quad (5.1)$$

и разностное уравнение во внутреннем узле  $q_i$  примет вид

$$\Lambda^{(3)}\varphi_i \equiv \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \bar{D}_{q^\alpha} (k_{\alpha\beta} D_{q^\beta} \varphi) (q_i) = 0, \quad (5.2)$$

где

$$\bar{D}_{q^1} F(q_i) = \frac{D_{q^1} F(N) + D_{q^1} F(S)}{2}, \quad \bar{D}_{q^2} F(q_i) = \frac{D_{q^2} F(E) + D_{q^2} F(W)}{2}.$$

**Утверждение 4.** Пусть  $\varphi_i = x^\alpha(q_i)$ , где  $x^\alpha$  — функции отображения (1.2). Тогда

$$\Lambda^{(3)}\varphi_i \equiv 0, \quad q_i \in Q_h.$$

В табл. 3 приведены коэффициенты разностного уравнения (5.2), записанного в виде (3.4). Матрица системы уравнений (3.4) симметрична. Так же как и для первой аппроксимации, разностный оператор получается самосопряженным и положительно определенным. Интересно отметить, что в декартовых координатах на квадратной сетке эта схема переходит в известную пятиточечную схему “косой крест” [3].

Т а б л и ц а 3

Тип узла	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
0	$\beta_1 + \beta_4$	$-\beta_1 - \beta_2$	$\beta_2 + \beta_3$	$-\beta_3 - \beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
1	0	$-\beta_2$	$\beta_2 + \beta_3$	$-\beta_3$	0	$\beta_6$	$\beta_7$	0
2	$\beta_4$	0	$\beta_3$	$-\beta_3 - \beta_4$	0	0	$\beta_7$	$\beta_8$
3	$\beta_1 + \beta_4$	$-\beta_1$	0	$-\beta_4$	$\beta_5$	0	0	$\beta_8$
5	0	0	$\beta_3$	$-\beta_3$	0	0	$\beta_7$	0
6	$\beta_4$	0	0	$-\beta_4$	0	0	0	$\beta_8$

Здесь

$$\beta_1 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(A) - \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(A), \quad \beta_2 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(B) - \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(B),$$

$$\beta_3 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(C) - \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(C), \quad \beta_4 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(D) - \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(D),$$

$$\beta_5 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(A) + \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(A) + \frac{1}{2}k_{12}(A), \quad \beta_6 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(B) + \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(B) - \frac{1}{2}k_{12}(B),$$

$$\beta_7 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(C) + \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(C) + \frac{1}{2}k_{12}(C), \quad \beta_8 = \frac{h_2}{4h_1}k_{11}(D) + \frac{h_1}{4h_2}k_{22}(D) - \frac{1}{2}k_{12}(D).$$

6. Приведем результаты численных расчетов при использовании различных аппроксимаций уравнения (1.3). В качестве области  $\Omega$  в тестовой задаче брался криволинейный четырехугольник, ограниченный слева и справа прямыми  $x = 0$  и  $x = 1$ , снизу — прямой  $y = -1$ , сверху — кривой

$$y = \eta(x) = -a \cos(2\pi x). \quad (6.1)$$

В качестве точного решения задачи (1.1), (1.4) была выбрана функция

$$\varphi_{ex}(x, y) = \frac{1}{\cosh(2\pi)} \cosh[2\pi(y + 1)] \cdot \cos(2\pi x). \quad (6.2)$$

Для отображения области  $\Omega$  на единичный квадрат  $Q$  использовалось преобразование

$$x = q^1, \quad y = -1 + q^2(\eta(x) + 1). \quad (6.3)$$

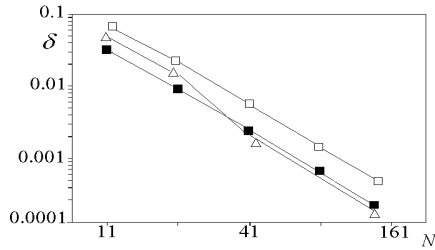


Рис. 4. Отклонение численного решения от точного для методов 1 (■), 2 (□), 3 (△).

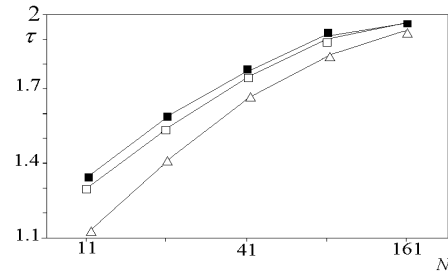


Рис. 5. Оптимальные значения параметра релаксации для методов 1 (■), 2 (□), 3 (△).

Система разностных уравнений, полученная с помощью каждого из рассмотренных здесь способов аппроксимации, решалась методом последовательной верхней релаксации. Расчеты показали, что все три схемы, несмотря на несимметричность матрицы для метода 2 и ненулевую невязку в (3.7) для линейной функции в первом методе, имеют порядок точности, близкий ко второму. В табл. 4 приведены оптимальные значения параметра релаксации  $\tau$ , количество необходимых для сходимости итераций  $k_{\text{last}}$  и норма разности между точным и численным решениями  $\|\varphi - \varphi_{\text{ex}}\|_C$  на различных сетках при первом способе аппроксимации и  $a = 0.5$ . На рис. 4 представлена зависимость величины  $\|\varphi - \varphi_{\text{ex}}\|_C$  от числа узлов  $N = N_1 = N_2$  квадратной сетки для всех трех разностных схем. Можно заметить, что схема 3 дает несколько более высокую точность на мелких сетках. На рис. 5 показано влияние размера сетки  $Q_h$  на оптимальные значения параметра в итерационном методе последовательной верхней релаксации.

Т а б л и ц а 4

$N_1$	$N_2$	$\tau_{\text{опт}}$	$k_{\text{last}}$	$\ \varphi^{k_{\text{last}}} - \varphi_{\text{ex}}\ _C$
11	6	1.24	4	$0.32 \cdot 10^{-1}$
11	11	1.32	4	$0.32 \cdot 10^{-1}$
21	11	1.48	11	$0.13 \cdot 10^{-1}$
21	21	1.58	19	$0.90 \cdot 10^{-2}$
31	31	1.68	39	$0.45 \cdot 10^{-2}$
41	21	1.72	35	$0.36 \cdot 10^{-2}$
41	41	1.78	64	$0.26 \cdot 10^{-2}$
61	61	1.84	133	$0.12 \cdot 10^{-2}$
81	41	1.82	148	$0.96 \cdot 10^{-3}$
81	81	1.94	283	$0.66 \cdot 10^{-3}$
161	81	1.96	442	$0.24 \cdot 10^{-3}$
161	161	1.96	896	$0.17 \cdot 10^{-3}$



Т а б л и ц а 5

$N_1$	$N_2$	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
11	11	$0.31 \cdot 10^{-1}$	$0.95 \cdot 10^{-15}$	$0.35 \cdot 10^{-15}$
21	21	$0.22 \cdot 10^{-2}$	$0.11 \cdot 10^{-14}$	$0.55 \cdot 10^{-15}$
41	41	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.12 \cdot 10^{-14}$	$0.68 \cdot 10^{-15}$

В табл. 5 приведены значения невязки  $r^{(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)}\varphi$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , полученные для функции  $\varphi = y$  при использовании рассмотренных способов аппроксимации. Эти результаты согласуются с утверждениями 2–4.

## Список литературы

- [1] Шокин Ю. И., Рузиев Р. А., Хакимзянов Г. С. *Численное моделирование плоских потенциальных течений жидкости с поверхностными волнами*. Препринт ВЦ СО АН СССР, №12, Красноярск, 1990.
- [2] Самарский А. А. *Теория разностных схем*. Наука, М., 1983.
- [3] Самарский А. А., Андреев В. Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений*. Наука, М., 1976.

Поступила в редакцию 14 марта 1997 г.,  
в переработанном виде 31 июля 1997 г.