ПРИБЛИЖЕНИЕ КОНСТАНТАМИ ФУНКЦИЙ ТИПА $y = x^{\alpha *}$

Т. В. Сидорова
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: polovinkin@fivt.krasn.ru

Function æ $=$ æ(s), depending on the parameter α defined as the solution of the following trancendental equation $\int\limits_a^b |f(x) - æ|^s \mathrm{sgn}(f(x) - æ) dx = 0,\ a < b$ when $f(x) = x^\alpha$ is studied.

Исследуется уравнение

$$\int\limits_a^b |f(x) - æ|^s \mathrm{sgn}(f(x) - æ) dx = 0, \quad a < b, \tag{1}$$

относительно неизвестной $s,\ s > 0$.

Уравнение (1) исследовалось В.И. Половинкиным [1, 2] в случае, когда функция $f(x)$ — полином Бернулли степени m. Четность степени полинома Бернулли играет важную роль. На основе исследований уравнения (1) были решены некоторые задачи теории кубатурных формул и получены следующие результаты.

Теорема 1. [1] *При m — нечетном последовательности формул С.Л. Соболева с регулярным пограничным слоем являются асимптотически оптимальными в пространствах $L_p^{(m)}[a, b],\ p \in (1, \infty]$.*

В случае четного m были доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. [2, 3] *Решение уравнения (1) относительно æ $=$ æ(s) не является постоянной величиной при $s \in (0, \infty]$.*

Случаи, когда степени полинома Бернулли $m = 2,\ m = 4$, рассматривались в [2, 3]; $m = 6,\ m = 8$ исследовались в работах [4, 5]. Был получен следующий результат.

Теорема 3. *Последовательности квадратурных формул С.Л. Соболева с регулярным пограничным слоем не являются асимптотически оптимальными в пространствах $L_p^{(m)}[a, b]$ ни при каких $p \neq 2$ при $m = 2, 4, 6, 8$.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04–01–00823).

В данной статье исследуется уравнение (1) в случае, когда $f(x) = x^\alpha$.

$$\int\limits_a^b |x^\alpha - æ|^s \operatorname{sgn}(x^\alpha - æ)dx = 0, \quad \alpha \neq 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) единственно при данном s, $s > 0$. Считаем, что $æ \in [a, b]$ и справедливо неравенство

$$æ - a^\alpha < b^\alpha - æ. \tag{3}$$

Основной результат работы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Если* $\alpha > 0, 0 \leq a < b$, *или* α *— нечетное число и* $a < 0, b > 0$, *то уравнение (2) может быть верно лишь при одном значении* $s \in (0, \infty)$.

Доказательство. Уравнение (2) равносильно следующему:

$$\int\limits_a^c (æ - x^\alpha)^s dx - \int\limits_c^b (x^\alpha - æ)^s dx = 0, \tag{4}$$

где $c = æ^{1/\alpha}$, $c \in (a, b)$. Сделаем в левом интеграле замену $æ - x^\alpha = t$, а в правом интеграле — $x^\alpha - æ = t$. Тогда найдем последовательно.

При $æ - x^\alpha = t$ получим

$$\begin{aligned}
&æ - x^\alpha = t,\\
&x^\alpha = æ - t,\\
&x = (æ - t)^{1/\alpha},\\
&dx = -\frac{1}{\alpha}(æ - t)^{1/\alpha - 1}dt,\\
&t_1 = æ - a^\alpha,\\
&t_2 = 0.
\end{aligned}$$

При $x^\alpha - æ = t$ получим

$$\begin{aligned}
&x^\alpha - æ = t,\\
&x^\alpha = æ + t,\\
&x = (æ + t)^{1/\alpha},\\
&dx = \frac{1}{\alpha}(æ + t)^{1/\alpha - 1}dt,\\
&t_1 = 0,\\
&t_2 = b^\alpha - æ,
\end{aligned}$$

где $\dfrac{1}{\alpha} - 1 < 0$; $æ + t > æ - t$, следовательно, $æ - a^\alpha < b^\alpha - æ$. Отсюда $æ < \dfrac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$. Тогда выводим

$$\int\limits_0^{æ - a^\alpha} t^s \frac{1}{\alpha}(æ - t)^{1/\alpha - 1}dt - \int\limits_0^{b^\alpha - æ} t^s \frac{1}{\alpha}(æ + t)^{1/\alpha - 1}dt = 0. \tag{5}$$

Обозначим $\eta(y) = y^{1/\alpha}$ — обратную функцию для x^α и перепишем равенство (5) с учетом данного обозначения

$$\int\limits_0^{æ - a^\alpha} t^s \eta'(æ - t)dt - \int\limits_0^{b^\alpha - æ} t^s \eta'(æ + t)dt = 0. \tag{6}$$

Сделаем в уравнении (6) новые замены переменных:

$$z = t/(æ - a^\alpha) \;\Rightarrow\; t = z(æ - a^\alpha), \quad dt = (æ - a^\alpha)dz. \tag{7}$$

Тогда (6) примет вид

$$\int\limits_0^1 z^s (æ - a^\alpha)^{s+1} \left[\eta'(æ - zæ + a^\alpha z) - \eta'(æ + zæ - a^\alpha z)\right] dz =$$

$$= \int\limits_1^{\frac{b^\alpha - æ}{æ - a^\alpha}} z^s (æ - a^\alpha)^{s+1} \eta'(æ + zæ - a^\alpha z) dz$$

или

$$\int\limits_0^1 z^s \left[\eta'(æ - zæ + a^\alpha z) - \eta'(æ + zæ - a^\alpha z)\right] dz =$$

$$= \int\limits_1^{\frac{b^\alpha - æ}{æ - a^\alpha}} z^s \eta'(æ + zæ - a^\alpha z) dz. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $u(z),\ z \in [0,1]$,

$$u = \eta'(æ - zæ + a^\alpha z) - \eta'(æ + zæ - a^\alpha z) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}(æ - zæ + a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}(a^\alpha - æ) - \frac{1}{\alpha}(æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}(æ - a^\alpha) =$$

$$= \frac{a^\alpha - æ}{\alpha}\left((æ - zæ + a^\alpha z)^{1/\alpha - 1} + (æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}\right), \tag{9}$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = \frac{æ - a^\alpha}{\alpha}\left(a^{1-\alpha} + (2æ - a^\alpha)^{1/\alpha - 1}\right).$$

Докажем, что решение уравнения (2) монотонно зависит от s. Отметим неравенства, справедливые для всех рассмотренных ниже случаев:

— при $a \le x \le c$ выполняется неравенство $æ - a^\alpha \ge 0$;
— при $c \le x \le b$ выполняется неравенство $æ - a^\alpha \le 0$;
— для любых $a,\ b,\ æ$ выполняется неравенство $æ \le \dfrac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$.

1. Положим $0 \le a < b,\ \alpha = 1$, $æ > 0$. Уравнение (2) примет вид

$$\int\limits_a^c (æ - x)^s dx - \int\limits_c^b (x - æ)^s dx = 0, \tag{10}$$

где $c = æ$, $c \in (a,b)$. С учетом замен (7) получим уравнение

$$\int\limits_0^1 z^s \left((æ - zæ + az)^{1-1} + (æ + zæ - az)^{1-1}\right) dz = \int\limits_1^{\frac{b - æ}{æ - a}} z^s dz$$

или
$$3 = \left(\frac{b - æ}{æ - a}\right)^{s+1}.$$
Очевидно, что данное равенство будет верным при единственном значении s, а также, что разным значениям s будут соответствовать различные значения æ.

2. Пусть далее $\alpha \neq 1$. В данном случае $\eta(y) = y^{1/\alpha}$, $\eta'(y) = \dfrac{1}{\alpha} y^{1/\alpha - 1}$. Уравнение (8) примет вид
$$\int\limits_0^1 z^s \frac{æ - a^\alpha}{\alpha} \left[(æ - zæ + a^\alpha z)^{1/\alpha - 1} + (æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}\right] dz =$$
$$= \int\limits_1^{\frac{b^\alpha - æ}{æ - a^\alpha}} z^s \frac{æ - a^\alpha}{\alpha} (æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1} dz. \tag{11}$$
А. Положим $0 \leq a < b$, $\alpha > 1$, æ> 0.

Функция $u(z)$ будет иметь следующий вид:
$$u(z) = \frac{æ - a^\alpha}{\alpha} \left[(æ - zæ + a^\alpha z)^{1/\alpha - 1} + (æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}\right], \quad z \in [0, 1].$$
Рассмотрим при $z \in [0, 1]$ поведение функции
$$u_1(z) = (æ - zæ + a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}. \tag{12}$$
Известно, что $æ - zæ \geq 0$, $a^\alpha z \geq 0$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 < 0$. Отсюда $u_1(z) \geq 0\ \forall z \in [0, 1]$.

Рассмотрим при $z \in [0, 1]$ поведение функции
$$u_2(z) = (æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}. \tag{13}$$
Имеем $æ > 0$. Так как $æ - a^\alpha \geq 0$, то $zæ - a^\alpha z \geq 0$, $z \in [0, 1]$. Отсюда $u_2(z) \geq 0$ при любых $z \in [0, 1]$.

Таким образом, $u(z) \geq 0$ при всех $z \in [0, 1]$.

Рассмотрим поведение выражения из правой части (11). Так как $2æ \geq a^\alpha$, то $(æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1} \geq 0$, для всех $z \in \left[1, \dfrac{b^\alpha - æ}{æ - a^\alpha}\right]$.

Поскольку функция $u(z)$ сохраняет знак при $z \in [0, 1]$, а функция $\dfrac{æ - a^\alpha}{\alpha}(æ + zæ - a^\alpha z)^{1/\alpha - 1}$ сохраняет знак на $z \in \left[1, \dfrac{b^\alpha - æ}{æ - a^\alpha}\right]$, решение всегда существует и будет единственным при данном s.

Замечание. Так как основания степени функций u_1 и u_2 являются неотрицательными функциями, выводы справедливы для любых $\alpha > 1$ (как четных, так и нечетных, а также не являющихся целыми числами).

Б. Положим $0 \leq a < b$, $|\alpha| < 1$, æ> 0.

Данный случай аналогичен исследованному выше, за исключением того, что степени подынтегральных функций $1/\alpha - 1$ будут неотрицательными, что не влияет на сохранение знака в обоих случаях.

В. Рассмотрим следующий случай: α — нечетное число, $a < 0$, $b > 0$, $æ > 0$.

Исходное уравнение примет вид

$$\int\limits_0^1 z^s \left[(æ - zæ + a^\alpha z)^{\frac{1}{\alpha}-1} + (æ + zæ - a^\alpha z)^{\frac{1}{\alpha}-1} \right] dz =$$

$$= \int\limits_1^{\frac{b^\alpha - æ}{æ - a^\alpha}} z^s (æ + zæ - a^\alpha z)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Исследуем поведение функции $u(z)$ из (9) и правой части уравнения (11).

Так как $a < 0$, следовательно, $a^\alpha < 0$, поскольку α — нечетное число. Рассмотрим степень $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$. Число $1 - \alpha$ является четным, поскольку α — нечетное. Тогда функции u_1 и u_2 из (12), (13) являются неотрицательными при $z \in [0, 1]$.

Рассмотрим поведение правой части (11). Так как $a^\alpha < 0$, то $æ + zæ - a^\alpha z \geq 0$ при $z \in \left[1, \dfrac{b^\alpha - æ}{æ - a^\alpha}\right]$. Таким образом, правая часть (11) сохраняет свой знак на соответствующем интервале.

Из вышеизложенного следует, что уравнение будет иметь единственное решение при фиксированном æ.

Отметим, что поскольку достаточно гладкие функции в малых окрестностях точек определения хорошо приближаются многочленами, результаты исследования могут представлять интерес при аппроксимациях таких функций кусочно-постоянными.

Список литературы

[1] Половинкин В.И. Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем и последовательности типа Грегори // Квадратурные и кубатурные формулы. Решение функциональных уравнений. Методы вычислений: Сб. науч. тр./ Ленингр. гос. ун-т. 1981. Вып. 12. С. 7–25.

[2] Половинкин В.И. Асимптотически оптимальные последовательности квадратурных формул с пограничным слоем в $L_p^2(a, b)$ // Оптимальные методы вычислений и их применение: Сб. науч. тр./ Пензенский гос. техн. ун-т. 1996. Вып. 12. С. 78–83.

[3] Polovinkin V.I. Approximations of the Bernoulli polinomials by constants and approximations to theory of quadrature formulas // Siberian Advances in Mathematics. 1998. Vol. 8, N 2. P. 110–121.

[4] Сидорова Т.В. Об асимптотической оптимальности квадратурных формул С.Л. Соболева в пространствах $L_p^{(6)}(a, b)$ // Кубатурные формулы и их приложения: Матер. V Междунар. семинара-совещания. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2000. С. 176–187.

[5] Сидорова Т.В. Об асимптотической оптимальности квадратурных формул С.Л. Соболева в пространствах $L_p^{(8)}(a, b)$ // Вопр. мат. анализа: Сб. науч. тр./ Красноярский гос. техн. ун-т. Вып. 4. 2001. С. 174–184.

[6] Sidorova T.V. Investigation of asymptotically optimal Sobolev sequences of quadrature formulas // The Intern. Conf. on Computational Mathematics: Proc. Pt I. Novosibirsk: ICM&MG Publ, 2002. P. 170–173.

Поступила в редакцию 2 ноября 2005 г.