РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Б. С. Добронец, Е. А. Стрельникова
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: `dobronec@fivt.krasn.ru, Juri1975@mail.ru`

Methods estimating the regions of existence of solutions of the boundary value problems for ordinary differential equations are considered.

Введение

Цель данной работы — исследование численных методов построения границ множества решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами. Рассмотренные в работе обыкновенные дифференциальные уравнения имеют кусочно-непрерывные коэффициенты, и известны интервальные функции, их включающие. Построение границ множества решений основано на апостериорных оценках погрешности некоторых частных решений. Данная работа продолжает исследования, начатые в [1]. В разд. 2 приведена общая методика оценки границ множества решений, далее в разд. 3 рассмотрен случай кусочно-постоянных коэффициентов. Показано, что при выполнении ряда условий можно получить оптимальные границы множества решений.

Большой вклад в развитие двусторонних методов, основанных на апостериорных и априорных оценках, внес Е.А. Волков [2]. Интервальные методы решения краевых задач рассматривались в ряде работ других исследователей. Например, в [3] описан интервально-аналитический метод нахождения двустороннего решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа. Этот метод непосредственно основан на работе Е.А. Волкова [4]. При нахождении решения учитываются локальные ошибки аппроксимации и возникающие в процессе численного решения ошибки округления, так что в точках сетки можно получить локальные границы решения. Практическая реализация данного метода встречает большие трудности. Более эффективные интервальные методы основаны на использовании теорем сравнения и свойств операторов монотонного типа, описанных в работе [5].

1. Постановка задачи

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: R^n — евклидово пространство размерности n с точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ — интервальное число, $\underline{a} \le \overline{a}$,

$\underline{a}, \overline{a} \in R$, $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a} = \overline{a} - \underline{a}$; $\boldsymbol{R}$ — множество интервальных чисел. Интервальные числа $a = \underline{a} = \overline{a}$ будем называть *вырожденными*. Таким образом, вырожденные интервальные числа совпадают с обычными вещественными числами.

Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$Lu = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ кусочно-непрерывны на $[0,1]$ и $p(x) \geq p^* > 0$, $q(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,l]$.

Зададим краевые условия в общем виде

$$Ru = \begin{cases} \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) - g_1 = 0, \\ \alpha_2 u(l) + \beta_2 u'(l) - g_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, g_i, $i = 1, 2$, — заданные числа, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$.

Будем считать, что для краевой задачи (1), (2) при заданных допущениях существует решение, и оно единственно [6].

Оператор L называется оператором *монотонного типа* [5], если из соотношения $Lu \geq Lv$ следует, что $u \geq v$.

В [5] показано, что (L, R) — оператор монотонного типа. Для решения задачи (1), (2) имеет место оценка

$$||u||_\infty \leq C(||f||_\infty + |g_1| + |g_2|), \tag{3}$$

где C — некоторая константа.

Сформулируем теорему сравнения для системы (1), (2). Подобные теоремы для задачи (1) с краевыми условиями первого или третьего типа сформулированы и доказаны в работах [5, 7, 8].

Теорема 1. *Пусть в задаче (1), (2)* $g_1 \geq 0$, $g_2 \geq 0$, $p(x) \geq p^* > 0$, $q(x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,l)$, *тогда для функции решения справедливо неравенство* $u(x) \geq 0$ *на* $[0,l]$.

2. Краевые задачи с интервальными неопределенностями

Как правило, при решении практических задач коэффициенты исходных задач известны не точно, а заданы их оценки. Поэтому возникает необходимость оценивать множества решений. Допустим, в уравнении (1) коэффициенты p, q, f известны не точно и заданы интервальные функции $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{f}$, их включающие, кроме того, известны интервальные константы $\alpha_i \in \boldsymbol{\alpha}_i$, $\beta_i \in \boldsymbol{\beta}_i$, $g_i \in \boldsymbol{g}_i$. Справедливо предположить, что решение при этом также лежит в некотором интервале $u \in \boldsymbol{u}$.

Следуя [9], построим интервальное решение $\boldsymbol{u}$. Для численного решения поставленной задачи построим равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih;\ i = 0, 1, ..., N\}$ с шагом $h = 1/N$ и целым $N \geq 2$. Обозначим через $\omega_h = \{x_i = ih;\ i = 1, ..., N-1\}$ множество внутренних точек этой сетки. Каждой внутренней точке поставим в соответствие разностное уравнение [10, 11]:

$$L^h u^h = f^h \quad \text{на} \quad \omega_h \tag{4}$$

с сеточной функцией $u^h(x)$, определенной на $\bar{\omega}_h$. Решим разностную задачу (4) для конкретных коэффицентов $p, q, f, \alpha_i, \beta_i, g_i$. Полученное разностное решение u^h проинтерполируем эрмитовым кубическим сплайном s [9]. Далее нам понадобится численное решение $u_1^h(x)$ вспомогательной задачи

$$L^h u_1^h = 1 \quad \text{на} \quad \omega_h,$$

и, соответственно, построим эрмитовый сплайн s_1.

Интервальное решение будем искать в виде

$$\boldsymbol{s} = s + \boldsymbol{a} s_1 + \boldsymbol{b} \supseteq \boldsymbol{u}.$$

Мы будем использовать интервальные расширения операторов $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}$ [9]. Таким образом, для оценки границ множества решений необходимо найти две функции — $\underline{s}$, $\overline{s}$: $\boldsymbol{L}\underline{s} \leq \boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{L}\overline{s}$, $\boldsymbol{R}\underline{s} \leq 0 \leq \boldsymbol{R}\overline{s}$. Тогда в силу теремы 1 $\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{s} = [\underline{s}, \overline{s}]$.

Сначала из неравенств $\boldsymbol{R}\underline{s} \leq 0 \leq \boldsymbol{R}\overline{s}$ найдем $\boldsymbol{b}$. Далее определим $\boldsymbol{a}$ следующим образом:

$$\overline{a} \geq \max_{[0,1]}((\boldsymbol{f} - \boldsymbol{L}s - \boldsymbol{q}\boldsymbol{b})/\boldsymbol{L}s_1), \quad \underline{\alpha} \leq \min_{[0,1]}((\boldsymbol{f} - \boldsymbol{L}s - \boldsymbol{q}\boldsymbol{b})/\boldsymbol{L}s_1).$$

Доказательство существования $\boldsymbol{a}$ и включения $\boldsymbol{s} \supseteq \boldsymbol{u}$ полностью повторяет аналогичное доказательство из [9].

Следует рассмотреть возможность выбора численных решений u_i^h для оптимизации $\operatorname{wid} \boldsymbol{s}$. Пусть нам известно несколько численных решений u_i^h при различных значениях коэффициентов. Тогда, следуя описанной выше методике, мы можем построить соответствующие им интервальные решения $\boldsymbol{s}_i \supseteq \boldsymbol{u}$. Но тогда можно положить $\boldsymbol{s} = \cap \boldsymbol{s}_i \supseteq \boldsymbol{u}$. Таким образом, подбирая u_i^h, можно существенно снизить ширину полученного интервального решения. Конкретную методику построения u_i^h рассмотрим в случае кусочно-постоянных коэффициентов.

3. Случай кусочно-постоянных коэффициентов

Большое число математических моделей ограничивается случаем кусочно-постоянных коэффициентов. Не ограничивая общности, для простоты изложения будем считать, что p и q — константы, $p \in \boldsymbol{p}$, $q \in \boldsymbol{q}$.

Тогда (1) можно переписать в виде

$$Lu = -pu'' + qu = f, \quad 0 < x < l. \tag{5}$$

Следовательно, $u = u(p, q)$, и множество решений $\boldsymbol{u}$ определим как

$$\boldsymbol{u} = \{u(p, q) | p \in \boldsymbol{p}, q \in \boldsymbol{q}\}.$$

Рассмотрим случай, когда границы $\underline{u}$, $\overline{u}$ можно явно выразить через частные решения $u(\tilde{p}, \tilde{q})$, $\tilde{p} \in \boldsymbol{p}$, $\tilde{q} \in \boldsymbol{q}$.

Определим частные производные $u_p = \partial u/\partial p$, $u_q = \partial u/\partial q$. Если известны значения $\boldsymbol{u}_p(x)$, $\boldsymbol{u}_q(x)$, то построим $\tilde{\boldsymbol{p}}(x)$ и $\tilde{\boldsymbol{q}}(x)$:

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(x) = \begin{cases} \overline{p}, & \text{если} \ \ \boldsymbol{u}_p \geq 0, \\ \underline{p}, & \text{если} \ \ \boldsymbol{u}_p \leq 0, \\ \boldsymbol{p}, & \text{если} \ \ \boldsymbol{u}_p \ni 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(x) = \begin{cases} \overline{q}, & \text{если } \boldsymbol{u}_q \geq 0, \\ \underline{q}, & \text{если } \boldsymbol{u}_q \leq 0, \\ \boldsymbol{q}, & \text{если } \boldsymbol{u}_q \ni 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\overline{u} = u(\tilde{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{q}})$, аналогично можно построить зависмости от параметров и для $\underline{u}$. Следовательно, для нахождения $\overline{u}$ можно решить краевую задачу

$$-\tilde{\boldsymbol{p}}v'' + \tilde{\boldsymbol{q}}v = f, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

с краевыми условиями (2) и положить $\overline{u} = \overline{v}$. В ряде случаев непосредственное решение задачи (6), (2) несколько проще решения задачи (5), (2). В частности, если

$$\boldsymbol{u}_p \not\ni 0, \boldsymbol{u}_q \not\ni 0, \tag{7}$$

то $\tilde{p}(x)$, $\tilde{q}(x)$ — вещественные константы и нахождение $\overline{u}$ сводится к оценке решения некоторой вырожденной задачи.

Рассмотрим нахождение $\boldsymbol{u}_p$, $\boldsymbol{u}_q$. Для этого продифференцируем уравнение (5) по p и q:

$$-pu_p'' + qu_p = u'', \quad 0 < x < l,$$

$$-pu_q'' + qu_q = -u, \quad 0 < x < l,$$

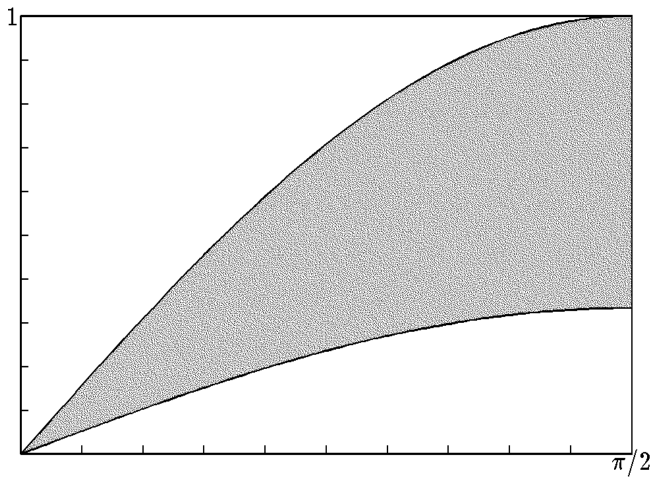
и дополним соответствующими однородными краевыми условиями (2). Несложно видеть, что для выполнения условий (7) должно выполняться постоянство знака для функций u'', u. Действительно, в силу теоремы 1 при однородных краевых условиях постоянство знака правой части влечет постоянство знака решения.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$-[1,2]u'' + [0,1]u = \sin(x), \quad 0 < x < \pi/2,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(\pi/2) = 0.$$

На первом этапе методами, рассмотренными в разд. 2, было построено интервальное решение $\boldsymbol{u}$, далее после дифференцирования исходного уравнения два раза по x аналогичным



Множество решений для примера 1.

образом была построена интервальная оценка на u''. Полученные решения обладали свойствами $\boldsymbol{u} > 0$ и $\boldsymbol{u}'' < 0$. Таким образом, было установлено, что для $\underline{u}$, $\overline{u}$ справедливы уравнения

$$-2\underline{u}'' + 1\underline{u} = \sin(x), \quad 0 < x < \pi/2,$$

$$-1\overline{u}'' + 0\overline{u} = \sin(x), \quad 0 < x < \pi/2,$$

с соответствующими однородными граничными условиями.

На рисунке приведено множество решений исходной задачи. Таким образом, построенные границы $\underline{u}$, $\overline{u}$ являются частными решениями и, следовательно, — оптимальными.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$-u'' + u = (\pi^2 + 1)\sin(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \boldsymbol{u}_1'.$$

Множество решений $\boldsymbol{u} = \sin(\pi x) + \boldsymbol{u}_1'(e^x - e^{-x})/(e - e^{-1})$.

Интервальное решение будем искать в виде

$$\boldsymbol{s} = s + \boldsymbol{\alpha} s_1 + \boldsymbol{\beta} s_2,$$

где s_1, s_2 — кубические сплайны Эрмита, интерполирующие численные решения следующих вспомогательных задач:

$$-u_1'' + u_1 = 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0;$$

$$-u_2'' + u_2 = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_2(0) = 0, \quad u_2'(1) = 1.$$

В силу того что сплайны Эрмита точно удовлетворяют соответствующим краевым условиям, получаем $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u}_1'$. Величина wid $\boldsymbol{\alpha} s_1 \approx O(h^2)$, что соответствует скорости сходимости разностных схем. Таким образом, границы полученного интервального решения отличаются от точных на величину $O(h^2)$.

Список литературы

[1] Dobronets B.S. A Posteriori Error Estimation for Partial Differential Equations // Scientific Computation and Validated Numerics / G. Alefeld, A. Frommer and B. Lang (Eds). Berlin: Akademie-Verlag, 1996. P. 239–244.

[2] Волков Е.А. Поточечные оценки погрешности разностного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 4. С. 717–726.

[3] Tost R. Zur numerischen Lösungen von Randwertaufgabe mit Gesicherter Fehlereinschliessung bei Partiellen Differentialgleichungen // Z. Angew. Math. Mech. 1971. Bd 51. S. T74–T75.

[4] Волков Е.А. Эффективные оценки погрешности решений методом сеток краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и некоторых треугольниках // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 74. С. 55–86.

[5] Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

[6] Волков Е. А. Численные методы. М.: Наука, 1987.

[7] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

[8] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

[9] Добронец Б.С. Интервальная математика. Красноярск: КГУ, 2004.

[10] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

[11] Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.

[12] Добронец Б.С., Рощина Е.Л. Приложения интервального анализа чувствительности // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 1. С. 75–82.

Поступила в редакцию 2 ноября 2005 г.