ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКТОРОВ НА ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА МАТРИЦ*

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева
Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: matveeva@math.nsc.ru

In the present paper for an arbitrary matrix we discuss a method of approximate construction of the projections P_-, P_+ and P_0 onto maximal invariant subspaces corresponding to the eigenvalues lying in the left half-plane, right half-plane and the imaginary axis respectively. We fulfil qualified estimates that allow us to elaborate a computing algorithm.

В настоящее время имеется ряд алгоритмов решения задачи о дихотомии матричного спектра относительно мнимой оси, то есть задачи о выделении максимальных инвариантных подпространств для матрицы A, отвечающих собственным значениям, принадлежащим левой полуплоскости $C_- = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ и правой полуплоскости $C_+ = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ при отсутствии мнимых собственных значений (см., например, [1–7]). Эти алгоритмы позволяют аппроксимировать проекторы P_- и P_+ на соответствующие максимальные инвариантные подпространства. Особенно широкое распространение получил метод сигнум-функции, предложенный А. А. Абрамовым [3]. Однако эти алгоритмы неприменимы, если хотя бы одно собственное значение матрицы A принадлежит мнимой оси, а при проведении численных расчетов на ЭВМ они неприменимы также для матриц, спектр которых расположен достаточно близко к мнимой оси. Поэтому нужно уметь решать задачу о трихотомии матричного спектра, то есть строить проекторы P_-, P_+ и P_0 на максимальные инвариантные подпространства, отвечающие собственным значениям, лежащим в левой полуплоскости C_-, правой полуплоскости C_+ и на мнимой оси $C_0 = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = 0\}$ соответственно. С теоретической точки зрения решение этой задачи не представляет сложности. Но при решении задачи для конкретной матрицы даже небольшого порядка возникает потребность в приближенных вычислениях. Поэтому необходимо иметь методы нахождения приближенных решений задачи о трихотомии матричного спектра.

Первое решение задачи о трихотомии для произвольной матрицы A порядка $N \times N$ было предложено одним из авторов в 1994 г. [8]. Оно было основано на решении следующей

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96–15–96290.

краевой задачи на интервале $\{0 < t < k\tau\}$:

$$\tfrac{d}{dt}G_1^k = A\,G_1^k, \quad \tfrac{d}{dt}G_2^k = -A\,G_2^k,$$

$$\tfrac{d}{dt}G_3^k = A\,G_3^k, \quad \tfrac{d}{dt}G_4^k = -A\,G_4^k,$$

$$G_1^k(0) + G_2^k(0) + G_3^k(0) = I, \quad G_3^k(0) = G_4^k(0),$$

$$k^{-N}(G_1^k(k\tau) + G_3^k(k\tau)) - G_2^k(k\tau) = 0,$$

$$k^{-N}(G_2^k(k\tau) + G_4^k(k\tau)) - G_1^k(k\tau) = 0,$$

где $\tau = 1/2$, если $\|A\| \le 1$ и $\tau = (2\|A\|)^{-1}$, если $\|A\| > 1$. При достаточно больших $k\tau \gg 1$ эта задача однозначно разрешима, при этом

$$G_1^k(0) \to P_-, \quad G_2^k(0) \to P_+, \quad G_3^k(0) \to P_0 \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Позднее в работе [9] был предложен более универсальный метод решения задачи о трихотомии матричного спектра. Этот метод использует функциональный подход. Из предложенного метода, в частности, может быть получен метод сигнум-функции.

Оба метода, представленные в работах [8, 9], позволяют аппроксимировать проекторы P_-, P_+ и P_0. Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении. С помощью результатов, полученных в [9], будут проведены квалифицированные оценки аппроксимации, которые позволяют разработать алгоритм вычисления проекторов.

Опишем кратко метод приближенного построения проекторов P_-, P_+ и P_0 из работы [9], который основан на следующей теореме.

Теорема. *Пусть $T : B \to B$ линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве B имеет непрерывный обратный T^{-1}. Предположим, что существует проектор $P : B \to B$, удовлетворяющий условиям*

$$PT = TP, \quad \|PT\| < 1, \quad \|T^{-1}(I - P)\| < 1.$$

Тогда оператор $I - T$ имеет обратный $(I - T)^{-1}$, при этом

$$\|(I - T)^{-1}\| \le \|P\|(1 - \|TP\|)^{-1} + \|T^{-1}(I - P)\|(1 - \|T^{-1}(I - P)\|)^{-1}, \tag{1}$$

$$\|P - (I - T)^{-1}\| \le \|TP\|(1 - \|TP\|)^{-1} + \|T^{-1}(I - P)\|(1 - \|T^{-1}(I - P)\|)^{-1}. \tag{2}$$

Пусть матрица A размера $N \times N$. Рассмотрим две последовательности операторов $\{T_{1,k}\}$, $\{T_{2,k}\}$, где

$$T_{1,k} = -k^{-N}e^{-2k\tau A}, \quad T_{2,k} = -k^{-N}e^{2k\tau A},$$

$$\tau = 1/2 \quad \text{при} \quad \|A\| \le 1, \quad \text{и} \quad \tau = (2\|A\|)^{-1} \quad \text{при} \quad \|A\| > 1.$$

Очевидно,

$$\begin{gathered} \|T_{1,k}(P_0 + P_+)\| \to 0, \quad \|T_{1,k}^{-1}P_-\| \to 0, \\ \|T_{2,k}(P_0 + P_-)\| \to 0, \quad \|T_{2,k}^{-1}P_+\| \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Следовательно, по теореме при достаточно больших k существуют обратные операторы $(I-T_{1,k})^{-1}$ и $(I-T_{2,k})^{-1}$, при этом

$$\|(I-T_{1,k})^{-1}-(P_0+P_+)\|\to 0, \quad \|(I-T_{2,k})^{-1}-(P_0+P_-)\|\to 0 \ \text{ при } \quad k\to\infty.$$

Отсюда

$$\begin{gathered} P_-\approx I-(I-T_{1,k})^{-1}, \quad P_+\approx I-(I-T_{2,k})^{-1}, \\ P_0\approx (I-T_{1,k})^{-1}+(I-T_{2,k})^{-1}-I \ \text{ при } \quad k\gg 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Чтобы использовать предложенный метод для вычислений на ЭВМ, необходимо иметь оценки скорости сходимости (3). В работе [9] нужные оценки были получены через нормы матричных интегралов H_p^-, H_p^+, H_p^0, где

$$H_p^-=\lim_{t\to+\infty}H_p^-(t), \quad H_p^+=\lim_{t\to+\infty}H_p^+(t), \quad H_p^0=\lim_{t\to+\infty}H_p^0(t),$$

$$H_p^-(t)=\int_0^t(1+as)^{-p}(e^{sA}P_-)^*e^{sA}P_-ds,$$

$$H_p^+(t)=\int_0^t(1+as)^{-p}(e^{-sA}P_+)^*e^{-sA}P_+ds,$$

$$H_p^0(t)=\int_0^t(1+as)^{-p}(e^{sA}P_0)^*e^{sA}P_0ds,$$

$$p\ge 0, \quad t>0,$$

$$a=1 \quad \text{при} \quad \|A\|\le 1, \quad \text{и} \quad a=\|A\| \quad \text{при} \quad \|A\|>1.$$

Эти интегралы были введены в [8] и называются интегралами типа Ляпунова. Отметим, что, если спектр исходной матрицы A находится строго в левой полуплоскости, то есть $P_-=I$, то H_0^- — хорошо известный интеграл, являющийся решением уравнения Ляпунова

$$H_0^-A+A^*H_0^-=-I.$$

В случае, когда у исходной матрицы нет мнимых собственных значений и часть спектра расположена в C_-, а часть — в C_+, интегралы H_0^-, H_0^+ изучались в работах М. Г. Крейна (см. литературные указания к гл. 1 [10]).

Как было установлено в [9], при $1/2<\varepsilon<1$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{gathered} \|T_{1,k}(P_0+P_+)\|\le \big(2(N+\varepsilon)\alpha_N a\|H_N^0\|\|H_{N-1+\varepsilon}^0\|\big)^{1/2}k^{-N}(1+k)^{(N-1+\varepsilon)}+ \\ +\big(2\|A\|\|H_0^+\|\big)^{1/2}k^{-N}\exp(-k\tau/\|H_0^+\|), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\|T_{1,k}^{-1}P_-\|\le \big(2\|A\|\|H_0^-\|\big)^{1/2}k^N\exp(-k\tau/\|H_0^-\|), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \|T_{2,k}(P_0+P_-)\|\le \big(2(N+\varepsilon)\alpha_N a\|H_N^0\|\|H_{N-1+\varepsilon}^0\|\big)^{1/2}k^{-N}(1+k)^{(N-1+\varepsilon)}+ \\ +\big(2\|A\|\|H_0^-\|\big)^{1/2}k^{-N}\exp(-k\tau/\|H_0^-\|), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\|T_{2,k}^{-1}P_+\|\le \big(2\|A\|\|H_0^+\|\big)^{1/2}k^N\exp(-k\tau/\|H_0^+\|). \tag{8}$$

Опираясь на эти неравенства и теорему, мы установим порядок аппроксимации (4). В дальнейшем будем рассматривать множество матриц A порядка $N \times N$, для которых

$$\|H_0^-\| + \|H_0^+\| + \|H^0_{N-1/3}\| \le \mu, \tag{9}$$

где μ — достаточно большое число, зависящее от разрядной сетки ЭВМ, на которой проводятся расчеты.

Для всех таких матриц из неравенств (5)–(8) имеем оценки

$$\|T_{1,k}(P_0 + P_+)\| \le (2(N+1)\alpha_N a)^{1/2}\mu k^{-N}(1+k)^{(N-1/3)} + (2\|A\|\mu)^{1/2}k^{-N}\exp(-k\tau/\mu), \tag{10}$$

$$\|T_{1,k}^{-1}P_-\| \le (2\|A\|\mu)^{1/2}k^N\exp(-k\tau/\mu), \tag{11}$$

$$\|T_{2,k}(P_0 + P_-)\| \le (2(N+1)\alpha_N a)^{1/2}\mu k^{-N}(1+k)^{(N-1/3)} + (2\|A\|\mu)^{1/2}k^{-N}\exp(-k\tau/\mu), \tag{12}$$

$$\|T_{2,k}^{-1}P_+\| \le (2\|A\|\mu)^{1/2}k^N\exp(-k\tau/\mu). \tag{13}$$

Возьмем теперь произвольное $\delta \in (0,\,1)$ и найдем число k_0 такое, что при всех $k \ge k_0$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}(2(N+1)\alpha_N a)^{1/2}\mu k^{-N}(1+k)^{(N-1/3)} + (2\|A\|\mu)^{1/2}k^{-N}\exp(-k\tau/\mu) \le \delta/5,\\ (2\|A\|\mu)^{1/2}k^N\exp(-k\tau/\mu) \le \delta/5.\end{gathered} \tag{14}$$

Тогда, используя оценки (2), (10), (11) и (14), при $k \ge k_0$ будем иметь

$$\|P_- - \big(I - (I - T_{1,k})^{-1}\big)\| = \|P_0 + P_+ - (I - T_{1,k})^{-1}\| \le$$

$$\le \|T_{1,k}(P_0+P_+)\|(1 - \|T_{1,k}(P_0+P_+)\|)^{-1} + \|T_{1,k}^{-1}P_-\|(1 - \|T_{1,k}^{-1}P_-\|)^{-1} \le \delta/2.$$

Аналогичным образом в силу (2), (12), (13) и (14) получим

$$\|P_+ - \big(I - (I - T_{2,k})^{-1}\big)\| = \|P_0 + P_- - (I - T_{2,k})^{-1}\| \le$$

$$\le \|T_{2,k}(P_0+P_-)\|(1 - \|T_{2,k}(P_0+P_-)\|)^{-1} + \|T_{2,k}^{-1}P_+\|(1 - \|T_{2,k}^{-1}P_+\|)^{-1} \le \delta/2.$$

Отсюда, поскольку $P_- + P_+ + P_0 = I$, имеем также

$$\|P_0 - \big((I - T_{1,k})^{-1} + (I - T_{2,k})^{-1} - I\big)\| \le$$

$$\le \|P_- - \big(I - (I - T_{1,k})^{-1}\big)\| + \|P_+ - \big(I - (I - T_{2,k})^{-1}\big)\| \le \delta.$$

Зафиксируем теперь некоторое число $k \ge k_0$ и построим приближенные операторы для $T_{1,k}$, $T_{2,k}$ в виде

$$T_{1,k} \approx T_{1,k}^n = -k^{-N}S_n(-2k\tau A), \quad T_{2,k} \approx T_{2,k}^n = -k^{-N}S_n(2k\tau A),$$

где

$$S_n(tA) = \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n.$$

Ниже мы установим, что существует число $n_0 > 0$ такое, что при всех $n \ge n_0$

$$\|P_- - \big(I - (I - T_{1,k}^n)^{-1}\big)\| \le \delta, \quad \|P_+ - \big(I - (I - T_{2,k}^n)^{-1}\big)\| \le \delta,$$

$$\|P_0 - \big((I - T_{1,k}^n)^{-1} + (I - T_{2,k}^n)^{-1} - I\big)\| \le 2\delta. \tag{15}$$

Поскольку $\|2k\tau A\| \le k$, то

$$\|e^{2k\tau A}\| \le e^k, \quad \|e^{2k\tau A} - S_n(2k\tau A)\| \le e^k - \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = d(k,n).$$

Покажем, что при достаточно больших n существуют обратные операторы $(I - T_{1,k}^n)^{-1}$ и $(I - T_{2,k}^n)^{-1}$. Проведем рассуждения для оператора $T_{1,k}^n$. По теореме оператор $(I - T_{1,k})^{-1}$ является непрерывным и

$$\|(I - T_{1,k})^{-1}\| \le \|P_0 + P_+\|(1 - \|T_{1,k}(P_0 + P_+)\|)^{-1} + \|T_{1,k}^{-1}P_-\|(1 - \|T_{1,k}^{-1}P_-\|)^{-1}.$$

Следовательно, для нормы оператора

$$\Delta T_{k,n} = (T_{1,k}^n - T_{1,k})(I - T_{1,k})^{-1}$$

получаем неравенство

$$\|\Delta T_{k,n}\| \le k^{-N} d(k,n)[\|P_0 + P_+\|(1 - \|T_{1,k}(P_0 + P_+)\|)^{-1} + \|T_{1,k}^{-1}P_-\|(1 - \|T_{1,k}^{-1}P_-\|)^{-1}].$$

Поскольку $d(k,n) \to 0$ при $n \to \infty$, при достаточно больших n имеем $\|\Delta T_{k,n}\| < 1$. Тогда существует обратный оператор $(I - \Delta T_{k,n})^{-1}$. Отсюда вытекает существование обратного оператора $(I - T_{1,k}^n)^{-1}$, при этом

$$(I - T_{1,k}^n)^{-1} = (I - T_{1,k})^{-1}(I - \Delta T)^{-1}.$$

Заметим, что

$$(I - T_{1,k}^n)^{-1} - (I - T_{1,k})^{-1} = (I - T_{1,k})^{-1}(T_{1,k}^n - T_{1,k})(I - T_{1,k})^{-1}(I - (T_{1,k}^n - T_{1,k})(I - T_{1,k})^{-1})^{-1}.$$

Следовательно, за счет выбора n, в силу выписанных выше неравенств, норму разности

$$\|(I - T_{1,k}^n)^{-1} - (I - T_{1,k})^{-1}\|$$

можно сделать меньше $\delta/2$.

Аналогичным образом можно показать, что при больших n существует оператор $(I - T_{2,k}^n)^{-1}$ и

$$\|(I - T_{2,k}^n)^{-1} - (I - T_{2,k})^{-1}\| \le \delta/2.$$

Докажем первую оценку из (15). Выбирая $n_0 > 0$ так, чтобы

$$\|(I - T_{j,k}^n)^{-1} - (I - T_{j,k})^{-1}\| \le \delta/2, \quad j = 1, 2,$$

при всех $n \ge n_0$ имеем

$$\|P_- - \big(I - (I - T_{1,k}^n)^{-1}\big)\| = \|P_0 + P_+ - (I - T_{1,k}^n)^{-1}\| \le$$

$$\le \|P_0 + P_+ - (I - T_{1,k})^{-1}\| + \|(I - T_{1,k})^{-1} - (I - T_{1,k}^n)^{-1}\| \le \delta.$$

Точно так же устанавливается второе неравенство. Теперь, принимая во внимание, что

$$P_- + P_+ + P_0 = I,$$

получим последнюю оценку из (15).

Итак, для любых матриц A, удовлетворяющих условию (9), можно указать приближенные проекторы

$$I-(I-T^n_{1,k})^{-1}\approx P_-,$$
$$I-(I-T^n_{2,k})^{-1}\approx P_+,$$
$$(I-T^n_{1,k})^{-1}+(I-T^n_{2,k})^{-1}-I\approx P_0$$

с требуемой точностью.

В заключение приведем пример расчета приближенных проекторов для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -0.9 & 2.3 & -11/12 & 13/6 & -0.5\\ 0.1 & -1.1 & 1/3 & 13/6 & -0.5\\ 0.1 & -0.1 & -2/3 & 13/6 & -0.5\\ -0.2 & 0.2 & -2/3 & 2/3 & 1\\ -0.4 & 0.65 & -0.25 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=i,\ \lambda_4=-i,\ \lambda_5=1,$$

и соответствующие проекторы имеют вид

$$P_-=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad P_+=\begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 1\\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 1\\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 1\\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 1\\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$P_0=\begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 & 1 & 0 & -1\\ 0.2 & -0.2 & 1 & 0 & -1\\ 0.2 & -0.2 & 1 & 0 & -1\\ 0.2 & -0.2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Проводя вычисления при $k\ge 35$, $n\ge 16$, получим приближенные проекторы в виде

$$P_-\approx\begin{pmatrix} 1 & -1.4\cdot 10^{-6} & -1 & 1.8\cdot 10^{-8} & 5\cdot 10^{-9}\\ -10^{-9} & 1 & -1 & 1.8\cdot 10^{-8} & 5\cdot 10^{-9}\\ -10^{-9} & 10^{-9} & -2.3\cdot 10^{-8} & 1.8\cdot 10^{-8} & 5\cdot 10^{-9}\\ -3.4\cdot 10^{-9} & 3.4\cdot 10^{-9} & -5.4\cdot 10^{-9} & -1.2\cdot 10^{-8} & 1.8\cdot 10^{-8}\\ 0.2 & -0.2 & 3.3\cdot 10^{-7} & -7.5\cdot 10^{-16} & 0\end{pmatrix},$$

$$P_+\approx\begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & -1.2\cdot 10^{-8} & -1.8\cdot 10^{-8} & 1\\ -0.2 & 0.2 & -1.2\cdot 10^{-8} & -1.8\cdot 10^{-8} & 1\\ -0.2 & 0.2 & -1.2\cdot 10^{-8} & -1.8\cdot 10^{-8} & 1\\ -0.2 & 0.2 & 5.4\cdot 10^{-9} & -2.3\cdot 10^{-8} & 1\\ -0.2 & 0.2 & 1.4\cdot 10^{-20} & 2\cdot 10^{-20} & 1\end{pmatrix},$$

$$P_0\approx\begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 & 1 & -3.3\cdot 10^{-17} & -1\\ 0.2 & -0.2 & 1 & -3.3\cdot 10^{-17} & -1\\ 0.2 & -0.2 & 1 & -3.3\cdot 10^{-17} & -1\\ 0.2 & -0.2 & 7.25\cdot 10^{-16} & 1 & -1\\ -4.62\cdot 10^{-11} & 2.9\cdot 10^{-7} & 3.3\cdot 10^{-7} & 7.6\cdot 10^{-16} & 3.3\cdot 10^{-8}\end{pmatrix}.$$

Видно, что эти матрицы дают достаточно хорошее приближение точных проекторов.

Список литературы

[1] Кублановская В. Н. О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **1**, №4, 1961, 555–570.

[2] Воеводин В. В. Решение полной проблемы собственных значений степенными методами. В *“Вычисл. методы и программирование”*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 7–55.

[3] Абрамов А. А. О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **11**, №1, 1971, 275–278.

[4] Balzer L. A. Accelerated convergence of the matrix sign–function method of solving Lyapunov, Riccati and other matrix equations. *Int. J. Control*, **32**, No. 6, 1980, 1057–1078.

[5] Roberts J. D. Linear model reduction and solution of the algebraic Riccati equation by use of the sign-function. *Ibid.*, **32**, No. 4, 1980, 677–687.

[6] Булгаков А. Я., Годунов С. К. *Параметр дихотомии спектра матрицы и схема расчета.* Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, препр. №8, 1985.

[7] Годунов С. К. Задача о дихотомии спектра матриц. *Сиб. матем. журн.*, **27**, №5, 1986, 24–37.

[8] Демиденко Г. В. *О построении проекторов на инвариантные подпространства матриц.* Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, препр. №17, 1994.

[9] Demidenko G. V. *On consruction of approximate projections.* Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, preprint No 38, 1996.

[10] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* Наука, М., 1970.

Поступила в редакцию 6 октября 1997 г.