Вычислительные технологии **Том 11, часть 1, Специальный выпуск, 2006**

К ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ*

Ю. Н. Григорьев
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: grigor@ict.nsc.ru

Choice of energy functionals for formulation of a variational problem for the global stability of compressible gas flows is considered.

Введение

Как известно, любые течения жидкостей и газов при достижении режимными параметрами, например числом Рейнольдса, некоторых критических значений теряют устойчивость и становятся турбулентными. Для многих течений, в частности типа пристенных пограничных слоев, эти значения с достаточной точностью рассчитываются в рамках линейной теории устойчивости [1]. Они соответствуют началу экспоненциального роста малых возмущений основного потока. Вместе с тем есть ряд примеров, которые нельзя считать исключениями, для которых линейная теория не дает удовлетворительных результатов. Так, течения Гагена — Пуазейля в трубах и плоское течение Куэтта в приближении линейной теории оказываются устойчивыми к любым малым возмущениям.

В подобных случаях альтернативой линейной теории является энергетическая теория глобальной гидродинамической устойчивости [2]. Здесь под глобальностью понимается неограниченность амплитуд рассматриваемых возмущений. В основе энергетического подхода к задаче устойчивости лежит некоторое уравнение энергетического баланса, составляемое для всей области течения. Оно приводит к вариационной задаче для некоторого функционала, характеризующего эволюцию энергии возмущений. Впервые подобное уравнение было выведено еще О. Рейнольдсом (1895) для турбулентного течения. Первые результаты по нелинейной устойчивости принадлежат В. Орру (1907), рассмотревшему течения Куэтта и Пуазейля. Современное изложение энергетической теории, опирающееся на строгие математические результаты для соответствующих вариационных задач, содержится в монографии [2]. Следует заметить, что полученные на ее основе значения критериев устойчивости далеко не всегда близки к экспериментальным данным. Тем не менее, по общему мнению, этот подход дает в настоящее время единственную возможность хотя бы в обобщенном виде учесть нелинейную стадию потери устойчивости. Вместе с тем надо констатировать, что энергетическая теория для сжимаемых жидкостей остается практически неразвитой, что связано с существенной нелинейностью полных уравнений

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00359).

Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа (см. комментарии и библиографию в [2]). Можно отметить, что существует паллиативный подход, когда удается найти отличные от энергии функционалы от возмущений, варьируя их, получают некоторые результаты по устойчивости. Примером являются приведенные в [2] задачи нелинейной устойчивости течений неоднородных жидкостей, описываемых системой уравнений Обербека — Буссинеска. В них рассматривается положительно определенный функционал, содержащий слагаемые с квадратами пассивных скаляров — температуры и концентрации (солености), которые не представляют энергию в каком-либо физическом смысле. Однако в данном случае доказывается строгая теорема, позволяющая получить из соответствующей вариационной задачи достаточный критерий устойчивости течения.

К сожалению, в доказательстве этой теоремы, как и в других случаях, рассмотренных в [2], используется соленоидальность допустимых полей скорости, которая отсутствует в сжимаемых течениях. Возникающие из-за этого трудности математического характера до настоящего времени преодолеть не удается.

Наш интерес к нелинейной теории устойчивости связан с проблемой влияния релаксационных процессов на ламинарно-турбулентный переход и генерацию турбулентности в течениях молекулярных газов. В рамках модели Навье — Стокса при небольших отклонениях от равновесия эффект релаксации учитывается коэффициентом объемной вязкости в дивергентной части тензора напряжений [3]. В работах [4–6] на основе численных расчетов простой нелинейной модели показано, что дополнительный диссипативный эффект, связанный с объемной вязкостью (релаксацией), может оказать заметное влияние на затухание энергии возмущений. Однако эти результаты не позволяют прямо оценить изменение числа Рейнольдса ЛТП Re_t, что было бы весьма показательно. В то же время существующие в литературе данные по этому вопросу носят противоречивый характер. В экспериментах [7] зафиксировано существенное возрастание Re_t при увеличении объемной вязкости. В противоположность этому расчеты в приближении линейной теории устойчивости [8, 9] показали, что влияние объемной вязкости на переход пренебрежимо мало. Однако эти результаты, вообще говоря, несопоставимы. В [8, 9] рассматривался переход на плоской пластине, а в экспериментах [7] исследовался переход к развитой турбулентности в течении Гагена — Пуазейля в трубе, которое в линейном приближении устойчиво.

В такой ситуации для прямой оценки зависимости числа Re_t от объемной вязкости представляется разумным воспользоваться энергетической теорией устойчивости для некоторого простого течения сжимаемого газа. Например, рассмотреть течение Куэтта, для которого в случае несжимаемой жидкости расчетное значение числа Re_t близко к экспериментальным данным. В качестве первого шага необходимо получить для него уравнение энергетического баланса возмущений, содержащее функционал, очевидным образом отражающий энергию возмущений без введения нефизических слагаемых. Введенное уравнение позволяет сформулировать вариационную задачу для критерия перехода, исследовать возможности ее упрощения и методы решения. Это составляет содержание данной работы.

1. Основные уравнения

Задача нелинейной устойчивости основного течения рассматривается на основе системы полных уравнений Навье — Стокса сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Область течения Ω представляет собой квадрат со сторонами, параллельными осям декартовой системы (x_1, x_2), центр которого совпадает с началом координат. В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны размер канала L по оси x_2, модуль скорости U_0, плотность ρ_0 и температура T_0 на непроницаемых стенках канала, параллельных скорости основного потока, время $\tau_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$.

В безразмерных переменных система уравнений записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0,\\
&\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j},\\
&\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = (\gamma - 1)\mathrm{M}_0^2 \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2}{2\mathrm{Re}} \times\\
&\times\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 + (\gamma - 1)\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\frac{\mathrm{M}_0^2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2,\\
&\gamma \mathrm{M}_0^2 p = \rho T, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Предполагается, что диссипативные коэффициенты в системе (1) не зависят от температуры и постоянны. Параметры, входящие в уравнения (1), определяются следующим образом. Коэффициент α равен отношению объемной вязкости к сдвиговой $\alpha = \mu_v/\mu$ и характеризует степень неравновесности внутренних степеней свободы молекул газа; $\mathrm{M} = U_0/\sqrt{\gamma R T_0}$ есть число Маха основного потока; $\mathrm{Re} = U_0 L \varrho_0/\mu$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\lambda$ — число Прандтля; R — газовая постоянная; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты; c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно; λ — коэффициент теплопроводности.

На границах области во все моменты времени выполняются следующие условия:

— периодические при $x_1 = \pm 1/2$, $x_2 \in [-1/2; 1/2]$

$$
\begin{aligned}
&u_1(t, 1/2, x_2) = u_1(t, -1/2, x_2), \;\; u_2(t, 1/2, x_2) = u_2(t, -1/2, x_2),\\
&\rho(t, 1/2, x_2) = \rho(t, -1/2, x_2), \;\; p(t, 1/2, x_2) = p(t, -1/2, x_2);
\end{aligned}
\tag{2}
$$

— основного течения при $x_2 = \pm 1/2$, $x_1 \in [-1/2; 1/2]$

$$
\begin{aligned}
&u_1(t, x_1, 1/2) = -u_1(t, x_1, -1/2) = 1, \quad u_2(t, x_1, 1/2) = u_2(t, x_1, -1/2) = 0,\\
&\rho(t, x_1, 1/2) = \rho(t, x_1, -1/2) = 1, \quad p(t, x_1, 1/2) = p(t, x_1, -1/2) = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

В качестве основного потока выбрано плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости, который в безразмерных переменных имеет вид $U_s = x_2$. Оно является точным стационарным решением системы (1) с граничными условиями (2), (3).

Действительно, для плоскопараллельного потока дивергенция поля скорости $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$. Для стационарного течения все производные по времени в (1) равны нулю. При этом из уравнения неразрывности следует, что плотность зависит только от поперечной координаты $\rho(t, x_1, x_2) = \Theta_s(x_2)$. В уравнениях импульсов все слагаемые, включающие скоростные переменные, на линейном профиле скорости обращаются в нуль. Отсюда $\dfrac{\partial p}{\partial x_1} = \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0$

и $\dfrac{dp}{dt} = 0$, т. е. в течении Куэтта давление постоянно и равно значению на стенках канала $P_s = \dfrac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}$. С учетом вида Θ_s из уравнения состояния получаем $T_s = T_s(x_2) = 1/\Theta_s$. Из сделанных замечаний следует, что уравнение энергии сводится к виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + (\gamma - 1)\mathrm{M}_0^2 \mathrm{Pr} = 0.$$

Интегрируя его с граничными условиями $T(1) = T(-1) = 1$, получаем профиль температуры T_s. Таким образом, основное течение описывается соотношениями

$$U_s(x_2) = x_2, \quad T_s(x_2) = 1 + \frac{(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2 \mathrm{Pr}}{2}(1 - x_2^2), \quad \Theta_s(x_2) = 1/T(x_2), \quad P_s = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}. \tag{4}$$

Представляя мгновенные значения гидродинамических величин возмущенного течения в виде

$$\rho = \Theta_s + \rho', \quad u_i = U_s + u_i', \quad T = T_s + T', \quad p = P_s + p',$$

запишем уравнения для двумерных возмущений основного течения (4) без ограничения на их амплитуды:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + U_{s,j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j}\right) = \\ &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i,\, j = 1,\, 2; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial T_s}{\partial x_i}\right) = (\gamma - 1)\mathrm{M}_0^2 \frac{dp'}{dt} + \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T'}{\partial x_i^2} + \frac{(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2}{\mathrm{Re}} \times \\ &\times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i}\right) + \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь, чтобы не усложнять форму суммирования по индексам, мы временно не используем явные зависимости параметров основного течения (4) от одной координаты x_2.

Система (5)–(7) замыкается уравнением состояния для возмущений

$$p' = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}(\rho T' + \rho' T_s). \tag{8}$$

Предполагается, что возмущения $u_1', u_2', \rho', T', p'$ при $x_1 = \pm 1/2$, $x_2 \in [-1/2; 1/2]$ удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1/2$, $x_1 \in [-1/2; 1/2]$ принимают нулевые значения.

2. Уравнения энергетического баланса и функционалы

Определим кинетическую энергию возмущений как интеграл по области течения вида

$$E(t) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho u_i'^2}{2}\, d\Omega. \tag{9}$$

Для эволюции $E(t)$ из уравнений (5), (6) выводится уравнение энергетического баланса [4]. Для этого уравнения (5) и (6) умножаются на $u_i'^2$ и u_i соответственно и складываются. При этом в левой части полученного уравнения выделяется ряд слагаемых в дивергентной форме

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i'^2)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i'^2 u_j')+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i'^2)+\rho u_i' u_j'\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=$$
$$=-u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}u_i'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)u_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}. \qquad (10)$$

При интегрировании уравнения (10) по области течения дивергентные слагаемые в левой части переходят в интегралы по границе, которые в силу граничных условий на возмущения обращаются в нуль. Слагаемые в правой части интегрируются по частям, причем возникающие здесь граничные интегралы также зануляются. В результате приходим к интегральному уравнению вида

$$\frac{dE}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\frac{\rho u_i'^2}{2}\,d\Omega=J_1+J_2-\frac{1}{\mathrm{Re}}(J_3+\alpha J_4). \qquad (11)$$

Слагаемое

$$J_1=-\int\limits_{\Omega}\rho u_i' u_j'\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\,d\Omega$$

описывает обмен энергией между возмущением и основным потоком. Интеграл

$$J_2=\int\limits_{\Omega}p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\,d\Omega$$

можно интерпретировать как работу при пульсационном сжатии (расширении) газа. Интегралы

$$J_3=\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2\right]d\Omega,\quad J_4=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$$

соответствуют процессам диссипации.

В приведенных выражениях знаки интегралов J_1, J_2 не определены, в то время как J_3, J_4 неотрицательны. Из физических соображений, принадлежащих В. Орру, можно заключить, что с уменьшением числа Рейнольдса, начиная с некоторого $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ диссипативные слагаемые J_3, J_4 становятся превалирующими, при этом производная $dE/dt<0$ и любые возмущения затухают со временем. Это позволяет сформулировать на основе уравнения (11) вариационную задачу для оценки критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$, которое соответствует $dE/dt=0$ и вычисляется как минимум функционала:

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}=\min\left[\frac{J_3+\alpha J_4}{J_1+J_2}\right]. \qquad (12)$$

Из уравнения (12) видно, что возрастание объемной вязкости (или параметра α) действительно сдвигает переход в сторону больших значений $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$, но для получения количественного результата необходимо решить вариационную задачу на собственные значения.

В работах [4–6] влияние объемной вязкости на затухание возмущений изучалось на основе временной эволюции кинетической энергии возмущений $E(t)$ (9), рассчитываемой как непосредственно, так и на основе уравнения энергетического баланса (11). Вместе с тем уравнение (11) выведено в полной аналогии с подобным уравнением для несжимаемой жидкости [1] и в таком виде не отражает явно особенностей возмущений в сжимаемых течениях. В частности, в отличие от несжимаемой жидкости полная энергия возмущений в газе (полная энтальпия) кроме кинетической составляющей $E(t)$ включает также внутреннюю и деформационную компоненты. Кроме того, в (11) отсутствует явная зависимость от числа Маха M_0. Это связано с тем, что при выводе не были использованы уравнения энергии (7) и состояния (8). Хотя это можно сделать в процессе решения вариационной задачи, представляет интерес выполнить соответствующие преобразования непосредственно в уравнении энергетического баланса.

Преобразуем подынтегральное выражение в J_2. Здесь и ниже учтены зависимости для полей основного течения (4). Подстановка (8) дает

$$p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}\left(\frac{\rho'}{\Theta_s} + \rho T'\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}.$$

Слагаемые в правой части выразим из уравнений неразрывности и энергии системы Навье — Стокса (1) для мгновенных значений в возмущенном потоке с учетом (4)*. Умножив уравнение неразрывности на ρ'/Θ_s^2, получим из него

$$\frac{\rho'}{\Theta_s}\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = -\frac{1}{\Theta_s^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'^2}{2\Theta_s^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{\Theta_s^2}\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + u_2'\left(\frac{\rho'^2}{2}\frac{d}{dx_2}\left(\frac{1}{\Theta_s^2}\right) - \frac{1}{\Theta_s^2}\rho'\frac{d\Theta_s}{dx_2}\right). \tag{13}$$

Соответственно, из уравнения энергии после умножения его на агрегат $\gamma T'[T_s(\gamma-1)]^{-1}$ получается достаточно громоздкое выражение для слагаемого $\rho T'\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_i}$, которое содержит член с временной производной $-\dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\dfrac{T'^2}{2T_s}\right)$. После подстановки полученных выражений в уравнение (11) в левой части выделяется производная по времени интеграла

$$E_t(t) = \int\limits_{\Omega}\left\{\frac{\rho u_i'^2}{2} + \frac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}\left[\frac{\rho'^2}{2\Theta_s^2} + \frac{1}{\gamma-1}\rho\frac{T'^2}{2T_s}\right]\right\}d\Omega. \tag{14}$$

Преобразованное таким образом уравнение энергетического баланса принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dE_t(t)}{dt} \equiv \Phi = &-\int\limits_{\Omega}\left\{\rho u_1'u_2' + \frac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{\Theta_s^2}\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \frac{u_2'\rho'}{\Theta_s^2}\frac{d\Theta_s}{dx_2} - \frac{u_2'\rho'^2}{2}\frac{d}{dx_2}\left(\frac{1}{\Theta_s^2}\right)\right]\right\}d\Omega + \\ &+\frac{1}{\gamma \mathrm{M}_0^2}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\gamma}{(\gamma-1)\mathrm{RePr}}\frac{T'}{T_s}\frac{d^2T_s}{dx_2^2} - \frac{\rho u_2'}{\gamma-1}\left(\frac{T'^2}{2T_s^2} + \frac{T'}{T_s}\right)\frac{dT_s}{dx_2} - \frac{\rho}{T_s}T'^2\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right]d\Omega + \\ &+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{\Omega}\frac{T'}{T_s}\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_1}\right) + 2 + (\alpha - \frac{2}{3})\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2\right]d\Omega - \\ &-\frac{\gamma}{(\gamma-1)\mathrm{RePr}}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{T'}{T_s}\right)\frac{\partial T'}{\partial x_i}d\Omega - \frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + (\alpha + \frac{1}{3})\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2\right]d\Omega.\end{aligned} \tag{15}$$

---

*Упоминание о подобном преобразовании применительно к линеаризованной системе уравнений Рейнольдса турбулентных пульсаций со ссылкой на недоступный источник имеется в [10].

Функционал $E_t(t)$, в отличие от предложенного в [2] для уравнений Обербека — Буссинеска, получен преобразованием энергетического уравнения (11), имеет “размерность” энергии и может рассматриваться как обобщенная энергия возмущений. Поэтому, если ограничиться умеренными числами M_0, то для уравнения (15), несмотря на его сложность, также может быть поставлена вариационная задача на собственные значения для нахождения критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$.

Если использовать для преобразования выражения $p'\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_i}$ только уравнение для возмущений температуры (7), то энергетическое уравнение несколько упрощается. При этом в качестве обобщенной энергии возмущений рассматривается функционал

$$E_t'(t) = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\rho u_i'^2}{2} + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2}\rho T \right] d\Omega. \tag{16}$$

3. Вариационная задача

Выведенные уравнения энергетического баланса позволяют выявить трудности, препятствующие успешному применению энергетической теории глобальной устойчивости для сжимаемых течений. Для всех трех полученных уравнений, включающих функционалы $E(t), E_t(t), E_t'(t)$, эти трудности одинаковы. Остановимся на вариации функционала Φ. Придавая возмущениям малые гладкие вариации, допускаемые граничными условиями

$$\rho' + \delta\rho', \quad u_i' + \delta u_i', \quad T' + \delta T',$$

обычным образом получаем линейный по вектору вариаций функционал $L(\delta\rho', \delta T', \delta u_i')$. Из него следуют уравнения Эйлера — Лагранжа, определяющие дифференциальную задачу на собственные значения $\lambda = \mathrm{Re}$. Не приводя их здесь, отметим, что эти уравнения содержат нелинейные слагаемые второй и третьей степени, включающие как функции возмущений, так и их производные до второго порядка. Уже простая нелинейность не позволяет сделать обычный переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем отделения периодической переменной x_1 в виде

$$(\rho', T', u_i') = [\hat{\rho}'(x_2), \hat{T}'(x_2), \hat{u}_i'(x_2)] \exp(\imath\beta x_1)$$

даже с учетом периодичности в направлении x_1 основного потока (4). Степени производных типа $\left(\dfrac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2$ можно убрать, если пренебречь диссипативной функцией в уравнении для возмущений температуры T' (члены в квадратных скобках в правой части (7)). Однако это довольно часто используемое упрощение не затрагивает нелинейностей по функциям возмущений вида $\rho' u_2', T'^2$ и др. Для них необходима некоторая квазилинеаризация, возможно, путем асимптотических разложений возмущений.

Можно отметить, что применение к вариационной задаче для функционала Φ прямых методов, например метода Ритца, также приводит к трудно разрешимым системам нелинейных алгебраических уравнений из-за присутствующих в нем нелинейностей третьей степени. Тем не менее этот подход имеет определенные перспективы.

В заключение автор хотел бы отдать долг памяти академику Н.Н. Яненко, привлекшему его к исследованиям в области теории гидродинамической турбулентности.

Список литературы

[1] Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.

[2] Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.

[3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.

[4] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Подавление вихревых возмущений релаксационным процессом в течениях возбужденного молекулярного газа // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 4. С. 22–34.

[5] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Ершова Е.Е. Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 15–23.

[6] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Ершова Е.Е., Синяя А.В. Численное моделирование эффекта объемной вязкости на последовательности вложенных сеток // Вычисл. технологии. 2006. (в печати).

[7] Nerushev A., Novopashin S. Rotational relaxation and transition to turbulence // Phys. Lett. 1997. Vol. A232. P. 243–245.

[8] Bertolotti F.B. The influence of rotational and vibrational energy relaxation on bondary-layer stability // J. Fluids Mech. 1998. Vol. 372. P. 93–118.

[9] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. К вопросу о влиянии вращательной релаксации на ламинарно-турбулентный переход // Тез. докл. Юбил. науч. конф., посвященной 40-летию Ин-та механики МГУ. Москва, 22–26 ноября 1999. М.: МГУ, 1999. С. 65–66.

[10] Mack L.M. Boundary layer stability theory. Pasadena, California. 1969 (Rev.A./Jet propulsion lab.; Doc. 900-277).

Поступила в редакцию 4 апреля 2006 г.